Sciences & Technologie **A** – **N°20**, Décembre (2003), pp. 7-11.

# SUR LA COMPLETUDE DU SYSTEME DES PUISSANCES D'UNE FONCTION DANS LES ESPACES $L^2\,(X,\mu)$

*Reçu le 05/01/2003 – Accepté le 27/07/2003*

**Résumé**

On établit certaines conditions nécessaires et suffisantes de la complétude dans l'espace $L^2(X,\mu)$ du système des puissances $\{\theta^n\}_1^\infty$ d'une fonction mesurable $\theta(x)$.

***Mots clés***: *Complétude, espace probabilisé, spectre, variable aléatoire.*

**Abstract**

We establish certain necessary and sufficient conditions completeness in the space $L^2(X,\mu)$ of powers of the system $\{\theta^n\}_1^\infty$ of a measurable function $\theta(x)$.

***Keywords***: *Completeness, probability space, spectrum, random variable.*

**A. HEBBECHE**
Département de Mathématiques
Université Mentouri
Constantine, Algérie
**E.L. ALEXANDROV**
Département de Mathématiques
Université de Saratov
Russie

**ملخص**

نبين بعض الشروط اللازمة والكافية لتامية جملة القوى $\{\theta^n\}_1^\infty$ ، لتابع $\theta(x)$ قابل للقياس في الفضاء $L^2(X,\mu)$.

**الكلمات المفتاحية:** جملة القوى $\{\theta^n\}_1^\infty$، الفضاء $L^2(X,\mu)$.

## 1- INTRODUCTION

Soit $(X,\mu)$ un espace mesuré, $\theta(x)$ une fonction $\mu$-mesurable définie sur $X$. On pose le problème suivant : trouver les conditions sur $\theta$ telles que le système de ses puissances $\{\theta^n\}_0^\infty$ soit complet dans $L^p(X,\mu)(p>1)$. Ce problème est étroitement lié au problème classique de la complétude du système $\{x^n\}_0^\infty$ dans divers espace fonctionnel $L^p_\sigma(R)$, où $\sigma$ est une fonction non décroissante. L'article [1] comprend la solution du problème posé si $X=[0,1]$ sous l'hypothèse $\theta$ bornée. Cette solution est simple : $\theta$ doit être quasi-biunivoque. En même temps, on a montré que le résultat cesse d'être valable si $\theta$ est non bornée. Par exemple, le système de puissance de la fonction $Log^3 x^{-1}$ biunivoque sur $[0,1]$ n'est pas complet dans $L^2(0,1)$. Dans [2], on étudie ce problème sans que $\theta$ soit bornée mais sous l'hypothèse que $(X,\mu)$ soit un espace probabilisé (i.e. $\mu(X)=1$).

Le but de ce travail est l'étude du problème posé dans les espaces $L^2(X,\mu)$ sans que $\theta$ soit bornée et $\mu(X)$ fini; on établit certaines conditions nécessaires et suffisantes de la complétude du système $\{\theta^n\}_0^\infty$ (§3, §4) et les liaisons de ce problème avec le problème des moments classiques (§5). Notons que le point central du travail est la théorie spectrale des opérateurs de multiplication dans $L^2(X,\mu)$.

## 2- PROPRIETES SPECTRALES DES OPERATEURS DE MULTIPLICATION

**1.** Soit $(X,\mu)$ un espace mesuré, la mesure $\sigma$-finie $\mu$ est définie sur une $\sigma$-algèbre. On écrira "mesurable", "presque partout", "$\mu(dx)$" au lieu d'écrire respectivement "$\mu$-mesurable", "$\mu$-presque partout", "$\mu(dx)$". De plus, on suppose dans la suite que $(X,\mu)$ est tel que l'espace de Hilbert $L^2(X,\mu)$ des fonctions carrées intégrable est séparable.

**2.** On énonce les notions nécessaires de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert.

Soit $H$ un espace de Hilbert séparable, (.,.) son produit scalaire, $A$ un opérateur auto-adjoint dans $H$, $E_t$ $-\infty \le t \le \infty$ sa fonction spectrale. On pose pour $\Delta = [\alpha, \beta]$, $E(\Delta) = E_{\beta+0} - E_{\alpha}$. On dit que le spectre de $A$ est simple s'il existe un élément $g \in H$ appelé engendrant tel que l'enveloppe linéaire des éléments de $E(\Delta)g$ quand $\Delta$ parcourt l'ensemble de tous les intervalles est dense dans $H$.

**Théorème A** [3]**.** Si le spectre d'un opérateur auto-adjoint $A$ est simple, alors: 1. Il existe un élément engendrant $g \in H$ tel que pour tout $n$ entier, $A^n g$ a un sens (i.e. $g \in D(A^n)$) et le système $\{A^n g\}_0^\infty$ est complet dans $H$. 2. Le système $\{A^n g\}_0^\infty$ est complet dans $H$ si, et seulement si, la famille $\{t^n\}_0^\infty$ est complète dans $L_F^2(\mathrm{R})$ où $F(t) = (E_t g, g)$. Dans toute la suite, $L_F^2(\mathrm{R})$ est l'espace de Hilbert des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, carrés intégrables avec le poids $F(x)$..

**3.** Soient $\theta(x)$ une fonction réelle mesurable définie sur $X$; on ne suppose pas que $\theta \in L^2(X,\mu)$ et $T$ l'opérateur de multiplication par $\theta$ dans $L^2(X,\mu)$: $Tf = \theta f$, $f \in D(T) = \left\{ g \in L^2(X,\mu) : \theta g \in L^2(X,\mu) \right\}$.

On désigne par $1_e$ la fonction indicatrice d'un ensemble $e \subset X$. On pose $e_t = \{x \in X : \theta(x) < t\}, t \in \mathbf{R}.$. La famille des ortho-projecteurs $E_t, -\infty < t < \infty$ définie par $E_t f = 1_{et} f$ est la fonction spectrale de $T$. Dans la suite, on va distinguer des cas particuliers.

**4.** $(X,\mu)$ est un espace probabilisé. Dans ce cas: $\mu(X) = 1$; chaque fonction mesurable sur $X$ est une variable aléatoire; la fonction $F(t) = (E_t 1, 1)$ est la fonction de séparation de $\theta$. On introduit le sous-espace $\Re_\theta \subset L^2(X,\mu)$ en posant $\Re_\theta = \left\{ \xi = \varphi(\theta) : \varphi(t) \in L_F^2(\mathbf{R}) \right\}$. Si $\Re_\theta = L^2(X,\mu)$, on dira que $\theta$ possède la (B)-propriété. L'égalité $\int_X |\varphi(\theta(x))|^2 d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 \, dF(t)$ montre que l'application $V : V_\varphi = \varphi(\theta)$ envoie isométriquement $L_F^2(R)$ sur $\Re_\theta$. On voit aisément que le sous-espace $\Re_\theta$ est réduisant par $T$. On note $T_\theta = T|_{\Re_\theta}$ la restriction de $T$ sur $\Re_\theta$.

**Théorème 1.** *Le spectre de* $T_\theta$ *est simple.*

**Démonstration.** Résulte immédiatement de l'égalité $\varphi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dE_t 1$ quelle que soit la fonction $\varphi(\theta) \in \Re_\theta$, 1 est un élément engendrant.

**Corollaire 1.** *Le spectre de $T$ est simple si, et seulement si, $\theta$ possède la (B)-propriété.*

**Lemme 1.** *Si le spectre de $T$ est simple, alors une fonction $g \in L^2(X,\mu)$ est un élément engendrant si, et seulement si, $g(x) \ne 0$ presque partout.*

**Théorème 2.** *$\theta$ possède la (B)-propriété si, et seulement si, elle vérifie la propriété suivante: quels que soient les ensembles mesurables disjoints $e_1, e_2$, il existe un ensemble $e$ avec $\mu(e) = 0$, tel que $\theta(e_1 \backslash e) \cap \theta(e_2 \backslash e) = \varnothing$.*

**Démonstration.** *Nécessité*: $\theta$ possède la (B)-propriété implique que le spectre de $T$ est simple et que $1 = 1_X$ est un élément engendrant. S'il existe des ensembles disjoints $e_1, e_2$ tels que

$$\tilde{\Delta} = \theta(e_1) \cap \theta(e_2) \quad \text{et} \quad e_{\tilde{\Delta}}^1 = \theta^{-1}\left(\tilde{\Delta}\right) \cap e_1 \quad \text{et} \quad e_{\tilde{\Delta}}^2 = \theta^{-1}\left(\tilde{\Delta}\right) \cap e_2$$

avec $\mu\left(e_{\tilde{\Delta}}^1\right) \cdot \mu\left(e_{\tilde{\Delta}}^2\right) > 0$,

alors, par exemple, la fonction $1_{e_{\tilde{\Delta}}^2}$ ne peut pas être approximée par des combinaisons linéaires des éléments $E(\Delta)1$, car pour tout $\Delta \subset \mathbf{R}$ on aura

$$\left\| E(\Delta)1 - 1_{e_{\tilde{\Delta}}^2} \right\| = \left\| 1_{e_\Delta} - 1_{e_{\tilde{\Delta}}^2} \right\| \ge \left\| 1_{e_{\tilde{\Delta}}} - 1_{e_{\tilde{\Delta}}^2} \right\| \ge \left\| 1_{e_{\tilde{\Delta}}^1} \right\| = \mu\left(e_{\tilde{\Delta}}^1\right) > 0.$$

*Suffisance*: On suppose qu'il existe une fonction $f \in L^2(X,\mu)$, $\|f\| = 1$ orthogonale à tous les $1_{e_\Delta}$, où $e_\Delta = \theta^{-1}(\Delta)$ et $\Delta$ est un ensemble borelien arbitraire. On note $e^+ = \{f \ge 0\}, e^- = \{f < 0\}$, $\theta(e^+) = \Delta^+$, $\theta(e^-) = \Delta^-$, $\Delta = \Delta^- \cap \Delta^+$. On a $e^+ \cup e^- = X$. Montrons que $\Delta \ne \varnothing$ et $\mu(e^+)\mu(e^-) > 0$. $f$ est orthogonale à 1 implique l'égalité

$$0 = (f,1) = \int_{e^+} f(x) d\mu(x) + \int_{e^-} f(x) d\mu(x),$$

d'où $\mu(e^+)\mu(e^-) > 0$. De même, $f$ et $1_{e_\Delta^+}$ sont orthogonales implique

$$0 = \int_{e^+} f(x) d\mu(x) + \int_{e_{\Delta^+} \backslash e^+} f(x) d\mu(x),$$

d'où $\mu(e^+)\mu(e_{\Delta^+} \backslash e^+) > 0$ et, par analogie, $\mu(e_{\Delta^-} \backslash e^-) > 0$.

On pose $e_+^- = e_{\Delta^+} \backslash e^-$, $e_-^+ = e_{\Delta^-} \backslash e^+$. On a

$$\theta(e_-^+ \cup e_+^-) = \Delta^+ \cap \Delta^- = \Delta, \theta^{-1}(\Delta) = e_-^+ \cup \Delta_+^-, \ \mu(e_-^+ \cup e_+^-) > 0$$

d'où contradiction.

**5.** On note le cas particulier important. Soit $\Omega$ un domaine de $\mathbf{R}^n$ avec $\mu(\Omega) = 1$, où $\mu$ est la mesure de Lebesgue.

**Définition 1.** *Une fonction $\varphi$ définie sur $\Omega$ est appelée quasi-biunivoque s'il existe un ensemble négligeable $e \subset \Omega$ tel que sur $\Omega \backslash e$, $\varphi$ est biunivoque.*

**Théorème 3** [2]. *Le spectre de l'opérateur de multiplication par $\varphi$ dans $L^2(\Omega)$ est simple si, et seulement si, $\varphi$ est quasi-biunivoque.*

## 3- CERTAINS CRITERES DE LA COMPLETUDE DU SYSTEME $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$

Distinguons différents cas de $\theta$.

### 3.1- Cas $\theta$ bornée

**Théorème 4.** *Soit $\theta$ une variable aléatoire bornée. Le système $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ est complet dans $L^2(X,\mu)$ si, et seulement si, $\theta$ possède la (B)- propriété.*

**Démonstration.** Comme $\theta$ est bornée et possède la (B)-propriété, l'opérateur $T$ est borné et a le spectre simple. Il en résulte que pour tout élément engendrant $g$ le système $\left\{T^n g\right\}_0^\infty$ est complet dans $L^2(X,\mu)$. Si $g \equiv 1$, on a $T^n 1 = \theta^n$, d'où l'assertion.

**Exemple 1.** *Soit $\theta(x,y)$ une fonction définie pour $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ et $x, y$ écrits dans le système numérique de base 2: $x = 0,x_1x_2x_3\ldots$, $y = 0,y_1y_2y_3\ldots$ Comme $\theta(x,y) = 0,x_1y_1x_2y_2\ldots$, on prouve aisément que $\theta$ est biunivoque sur $K = [0,1]\times[0,1]$ et donc $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ est complet dans $L^2(K)$.*

*Pour $\theta$ non bornée, on ne peut pas affirmer la complétude de $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$. Par exemple, dans $L^2(0,1)$, la famille $\left\{\log^{3n}(x^{-1})\right\}$ ne l'est pas, bien que $\theta = \log^3(x^{-1})$ possède la (B)- propriété.*

**Théorème 5.** *Le système de puissances $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ d'une variable aléatoire $\theta$ est complet dans $L^2(X,\mu)$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites : a) $\theta$ possède la (B)-propriété ; b) pour tout $n \in \mathbb{N}, \theta^n \in L^2(X,\mu)$ ; c) le système $\left\{t^n\right\}_0^\infty$ est complet dans $L_F^2(\mathbf{R})$.*

**Démonstration.** Résulte immédiatement de l'égalité $T^n 1 = \theta^n$ et du théorème A [3].

### 3.2- Cas $\theta$ absolument continue

On suppose que $\theta$ est absolument continue et $p(x) = F'(x)$ est sa densité.

**Théorème 6.**

1). *Pour que le système $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ soit complet dans $L^2(X,\mu)$, il suffit que les conditions a), b) du théorème 5 et c*) $p(x) = O(e^{-\alpha|x|})$ $(\alpha > 0)$ quand $|x| \to \infty$ soient satisfaites.*

2). *Si $\theta$ satisfait aux conditions a),b) du théorème 5 et à c**) $p(x) = e^{-|x|^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, alors $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ n'est pas complet dans $L^2(X,\mu)$.*

3). *Si $\theta$ satisfait à la condition a) du théorème 5 et à la condition : $p(x) = e^{-x^\lambda}$, $x \geq 0$, $p(x) = 0$, $x < 0$, alors $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ est complet dans $L^2(X,\mu)$ si, et seulement si, $\lambda \geq 0,5$.*

**Démonstration.**

1) Résulte de la complétude du système $\left\{x^n e^{-\alpha|x|}\right\}_0^\infty$ dans $L^2(\mathbf{R})$;

2) Résulte du fait que pour tout $k$ entier le système $\left\{x^n e^{-x^\beta}\right\}_{n=0}^\infty$, $\beta = 2k(2k+1)^{-1}$ n'est pas complet dans $L^2(\mathbf{R})$ (voir [4], p. 440).

3) Résulte du fait que le système $\left\{x^n e^{-x^\lambda}\right\}_{n=0}^\infty$ est complet dans $L^2(0,\infty)$ si, et seulement si, $\lambda \geq 0,5$ ([5], p. 86).

**Corollaire 2.** *Si $\theta$ est distribuée par la loi exponentielle ou normale, alors $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ est complet dans $L^2(X,\mu)$ si, et seulement si, $\theta$ possède la (B)-propriété.*

**Remarque 1** [2]. *Si a),b),c*) on lieu, alors $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ est complet dans les espaces $L^p(X,\mu)$, $p > 0$.*

**Exemple 2.** *Il résulte du théorème 6, 3) que le système $\left\{\log^{\alpha n} x^{-1}\right\}_0^\infty$ est complet dans $L^2(0,1)$ si, et seulement su $\alpha \leq 2$.*

### 3.3- Cas $\theta \notin L^2(X,\mu)$

On suppose que $\theta \notin L^2(X,\mu)$. Soit $g \in L^2(X,\mu)$ avec $\|g\| = 1$ et $g \neq 0$ presque partout. On pose $F_g(t) = (E t g, g)$.

**Théorème 7.** *Le système $\left\{\theta^n g\right\}_0^\infty$ est complet dans $L^2(X,\mu)$ si, et seulement si, a) $\theta$ possède la (B)-propriété;*

*b) pour tout n entier,* $\theta^n g \in L^2(X,\mu)$ *; c) le système* $\left\{t^n\right\}_0^\infty$ *est complet dans* $L^2_{F_g}(\mathbf{R})$.

### 3.4- Cas $\theta$ réelle

On suppose que la fonction $\theta$ est réelle et $\mu(X)=1$ cela implique que les fonctions complexes $(\theta-i)(\theta+i)^{-1}$ et $\exp(i\theta)$ appartient à $L^2(X,\mu)$ et que les opérateurs $U$ et $V$ de multiplication respectivement par ces fonctions sont unitaires dans $L^2(X,\mu)$. Il s'en déduit que les systèmes $\left\{(\theta-i)^n(\theta+i)^{-n}\right\}, \left\{e^{in\theta}\right\}, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ sont complet si, et seulement si, $\theta$ possède la (B)-propriété et la fonction $F(t)=(Et1,1)$ de répartition de $\theta$ satisfait à la condition (1) $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\log F'(t)\right|(1+t^2)^{-1}dt=\infty$ où $F'(t)$ est la dérivée de la partie de $F(t)$ absolument continue, alors les systèmes $\left\{(\theta-i)^n(\theta+i)^{-n}\right\}_{n=0}^\infty$ et $\left\{\exp(in\theta)\right\}_{n=0}^\infty$ sont complets dans $L^2(X,\mu)$. Cette assertion résulte du fait [6] que le système $\left\{\exp(int)\right\}_0^\infty$ est complet dans $L^p_F(-\pi,\pi)$, $(p\ge1)$ si, et seulement si, $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log F'(tg\tfrac{t}{2}).Cos^{-2}\tfrac{t}{2}\right|dt=\infty$ ce qui est équivalent à (1).

## 4- COMPLETUDE DU SYSTEME $\left\{\theta^n\right\}$ DANS $L^2(X,\mu)$ QUAND $\mu(X)=\infty$

**1.** On suppose que $\mu(X)=\infty$. Soient $\theta$ une fonction mesurable sur $(X,\mu), \theta\notin L^2(X,\mu)$, $\eta\in L^2(X,\mu)$ une fonction fixée, bornée avec $\|\eta\|=1$ et $\eta(x)\neq0$ presque partout. On introduit une mesure $\mu^*$ en posant pour $e\subset X$ mesurable $\mu^*(e)=1_e\eta,\eta$. On a : $(X,\mu^*)$ est un espace probabilisé, $L^2(X,\mu)\subset L^2(X,\mu^*)$, et l'opérateur d'injection de $L^2(X,\mu)$ dans $L^2(X,\mu^*)$ est continue, donc $L^2(X,\mu)\subset L^2(X,\mu^*)$, $d\mu^*=|\eta|^2d\mu$ et pour toutes fonctions $f,g\in L^2(X,\mu^*)$,

$$(f,g)_*=\int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu^*=(f\eta,g\eta).$$

De plus, $L^2(X,\mu)=L^2(X,\mu^*)\eta$, $L^2(X,\mu^*)=L^2(X,\mu)\eta^{-1}$.

Si les conditions du théorème 5 sont satisfaites pour $\theta$ dans l'espace $L^2(X,\mu^*)$, alors $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$ est complet dans cet espace et réciproquement. D'où le

**Théorème 8.** *La famille* $\left\{\theta^n\eta\right\}_0^\infty$ *est complète dans* $L^2(X,\mu)$ *si, et seulement si, a)* $\theta$ *possède la (B)-propriété ; b) pour tout n entier* $\theta^n\eta\in L^2(X,\mu)$ *; c) le système* $\left\{t^n\right\}_0^\infty$ *est complet dans l'espace* $L^2_{F^*}(\mathbf{R})$, *où* $F^*(t)=(E_t\eta,\eta)$.

Le théorème 6 donne certaines conditions suffisantes pour la complétude du système $\left\{\theta^n\eta\right\}_0^\infty$.

**2.** On suppose : pour tout $n$ entier $\theta^n\in L^2(X,\mu)$, $\theta$ est bornée et $\theta(x)\neq0$ presque partout. Notons que $\theta$ possède la (B)-propriété implique cette dernière condition.

On pose $\eta=\|\theta\|^{-1}\theta$ (alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\theta^n\eta\in L^2(X,\mu)$), $F^*(t)=(E_t\eta,\eta)=(1_{e_t}\eta,\eta)$, où $e_t=\left\{x\in X:\theta(x)<t\right\}$.

**Théorème 9.** *Soit* $\theta$ *une fonction bornée telle que pour tout* $n\in N$, $\theta^n\in L^2(X,\mu)$. *Pour que le système* $\left\{\theta^n\right\}_1^\infty$ *soit complet dans* $L^2(X,\mu)$, *il faut et il suffit que: a)* $\theta$ *possède la (B)-propriété ; b) le système* $\left\{t^n\right\}_0^\infty$ *soit complet dans* $L^2_{F^*}(\mathbf{R})$.

**Démonstration.** Résulte du théorème 8 car $\|\theta\|^{-1}\theta^{n+1}=\theta^n\eta.$

**Exemple 3.**

1) *Dans* $L^2(0,\infty)$, *on considère la fonction* $\theta(x)=e^{-x}$, $x\ge0$. *On a :* $\|\theta\|^2=0{,}5$, $\eta=\sqrt{2}\theta$, $\theta(x)$ *est bornée et pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\theta^n\in L^2(0,\infty)$, $F^*(t)=(1_{e_t}\eta,\eta)=t^2$, $0\le t\le1$, $F^*(t)=0$, $t<0$, $F^*(t)=1$, $t>1$.

*Comme* $\left\{t^n\right\}_0^\infty$ *est complet dans* $L^2_{F^*}(0,1)$, *alors le système* $\left\{e^{-nx}\right\}_{n=1}^\infty$ *est complet dans* $L^2(0,\infty)$.

Notons que la fonction $(x-ni)^{-1}$ $(i^2=-1)$ est la transformation de Fourier de la fonction $e^{-nx}$, $x\ge0$ prolongée par 0 sur $(-\infty,0)$, donc $\left\{(x-ni)^{-1}\right\}_{n=1}^\infty$ est complet dans l'espace $FL^2_+(0,\infty)$, où $F$ est la transformée de Fourier, $L^2_+(0,\infty)$ l'espace des fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ qui s'annulent sur $(-\infty,0)$.

2) *Le système* $\left\{\theta^n\right\}_0^\infty$, *où* $\theta(x)=Sign.xe^{-|x|}$ *est complet dans* $L^2(\mathbf{R})$, *puisque* $\theta$ *est biunivoque, bornée, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\theta^n\in L^2(\mathbf{R})$ *et le système* $\left\{t^n\right\}_0^\infty$ *est complet*

*dans* $L^2_{F^*}(\mathbf{R})$, *où* $F^*(t)=0,5(1-t^2)$, *si* $-1\le t<0$; $F^*(t)=0,5(1+t^2)$, *si* $0\le t\le 1$.

## 5- PROBLEME DES MOMENTS DE HAMBURGER ET LA COMPLETUDE DU SYSTEME $\{\theta^n\}$ DANS $L^2(X,\mu)$

On rappelle que le problème des moments de Hamburger est le suivant : étant donnée une suite des nombres réels $1=s_0,s_1,s_2,\ldots$, on cherche une fonction de répartition $\sigma(t)$ satisfaisante aux équations

$$s_k=\int_{-\infty}^{\infty}t^k\,d\sigma(t),\quad k=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Pour que la solution de ce problème existe, il faut que pour tout $n$ entier et tous nombres complexes $c_1,c_2,\ldots,c_n$, on ait: $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}s_{k+j}c_k\bar{c}_j\ge 0$.

Dans l'ensemble $\Im$ des polynômes $P(t)$ d'une variable réelle $t$ avec des coefficients complexes, introduisons le produit scalaire en posant pour

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n}x_kt^k,\ Q(t)=\sum_{j=0}^{m}y_jt^j,\ (P,Q)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}s_{k+j}x_k\bar{y}_j \tag{3}$$

$\Im$ muni du produit scalaire (3) devient un espace pré-hilbertient . On désigne par $H_0$ l'adhérence de $\Im$ pour la topologie définie par le produit scalaire (3), et $A_0$ la fermeture dans $H_0$ de l'opérateur de multiplication par $t$ dans $\Im$. L'opérateur $A_0$ est auto-adjoint ou symétrique avec les indices de défaut (1,1) [7]. Si $E_t,-\infty<t<\infty$ est une fonction spectrale quelconque de l'opérateur $A_0$, i.e. $E_t$ est la fonction spectrale d'une extension auto-adjoint $A$ de $A_0$ dans $H\supset H_0$, alors la fonction $\sigma(t)=(E_t1,1)$ est une solution du problème (2). Le problème des moments est déterminé (i.e. il admet une solution unique) si, et seulement si, $A_0$ est auto-adjoint. On désigne par $M$ l'ensemble des solutions du problème (2). La solution $\sigma(t)=(E_t1,1)\in M$ est appelée orthogonale si $E_t$ est une fonction spectrale d'un prolongement auto-adjoint dans $H_0$.

Le problème de complétude du système $\{t^n\}_0^{\infty}$ dans $L_\sigma(R)$ est équivalant au problème de densité de $\Im$ dans $H$. Il est claire que $\bar{\Im}=H$ si, et seulement si $\sigma(t)$ est orthogonale.

**Théorème 10** [7]. *L'ensemble des polynômes $\Im$ est dense dans $L^1_\sigma(R)$ si, et seulement si, $\sigma(t)$ est un point extrême de M, i.e l'égalité $\sigma(t)=\alpha\sigma_1(t)+(1-\alpha)\sigma_2(t)$ avec $0<\alpha<1$, $\sigma_1,\sigma_2\in M$ implique $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$.*

**Théorème 11** [7].
1). *Pour que le problème des moments (2) soit défini, il faut et il suffit que :*

*a)* $\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{D_n^*}=0$, *où*

$$D_n=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_n\\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{n+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_n & s_{n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2n}\end{vmatrix},\quad D_n^*=\begin{vmatrix} s_4 & s_5 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{n+2}\\ s_5 & s_6 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{n+3}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{n+2} & s_{n+3} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2n}\end{vmatrix}$$

*ou b) au moins une des séries* $\sum_{k=0}^{\infty}|P_k(0)|^2,\ldots\sum_{k=0}^{\infty}|Q_k(0)|^2$ *est divergente, où $P_k(t)$ et $Q_k(t)$ sont des polynômes de première et de deuxième espèce respectivement associés au problème (2) (voir [7] ).*

2). *Si* $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[2n]{s_{2n}}\right)^{-1}=\infty$, *alors le problème (2) est défini.*

Soient $(X,\mu)$ un espace probabilisé $(\mu(X)=1)$, $\theta$ une variable aléatoire sur $(X,\mu)$, $F(t)$ sa fonction de répartition, $T$ l'opérateur de multiplication par $\theta$. On pose $s_k=(T^k1,1)=\int_{-\infty}^{\infty}t^k\,dF(t),\ldots k=0,1,2\ldots$

**Théorème 12.** *Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\theta^n\in L^2(X,\mu)$, $\theta$ possède la (B)-propriété et la suite $\{s_k\}$ satisfait au moins une des conditions du théorème 11, alors $\{\theta^n\}_0^{\infty}$ est complet dans $L^2(X,\mu)$. Si $F(t)$ est une fonction extrême de M, alors l'ensemble des polynômes $\{P(\theta)\}$ est dense dans $L^1(X,\mu)$.*

**Démonstration** : résulte des théorèmes 10 et 11.

## REFERENCES


**[1]**- Emelianov V.F. and Schvedenko L.A., Sur un problème d'Oulianov P.L., *Izvestia Vuzov*, *Math*., n°3, (1976), pp. 99-102.

**[2]**- Alexandrov E.L., On the completeness of a system of powers of a random variable in the Hilbert space $L^2(\Omega;\Im;P)$, *Teor. Veroyatnost. i Primenen*., 36, n°2, (1991), pp.337-342.

**[3]**- Akhiezer N.I. and Glazman I.M., Theory of linear operators in Hilbert space, vol. 1 and 2, New York, Frederik Ungar (1961) and (1963).

**[4]**- Szegö G., Polynômes orthogonaux. M., Fizmatguiz, (1962).

**[5]**- Gueranimousse Y.L., Théorie des polynômes orthogonaux. M. GITTL, (1950).

**[6]**- Akhiezer N.I., Sur un problème de Kolmogorov et un problème de Krein, *Dokladi akad. Nauk. SSSR*, n°50, (1945).

**[7]**- Akhiezer N.I,. The classical moment problem, Oliver and Boyd, Edimburg, (1965).