Sciences & Technologie **A** – **N°20**, Décembre (2003), pp. 13-15.

NOUVEAU FORMALISME DES INTEGRALES DE CHEMINS *Q*-DEFORMEES

Reçu le 18/02/2003 – Accepté le 12/04/2003

Résumé

On se basant sur la mécanique quantique, on a élaboré un nouveau formalisme des intégrales de chemins Q-déformées. Ce dernier a un formalisme classique analogue à la limite, lorsque $Q \to 1$. On a calculé le propagateur de l'oscillateur harmonique Q-déformé, ainsi que le spectre d'énergie et la fonction d'onde correspondante.

***Mots clés**: Intégrale de chemin Q-déformé, Oscillateur harmonique Q-déformé.*

Abstract

Based on quantum mechanics, a new Q-deformed path integral formalism is constructed using the weak deformation theory and integral calculi. This formalism has a classical analogue when $Q \to 1$. The energy spectrum and the corresponding wave function are extracted for the Q-deformed harmonic oscillator.

***Keywords**: Q-deformed path integral, Q-deformed harmonic oscillator.*

N. BOUCERREDJ
Département de physique
Faculté des sciences
Université Badji Mokhtar
B.P.12, 23000 Annaba
Algérie

ملخص

ارتكازا على ميكانيكا الكم قمنا بتحضير قانون تكامل الطرق المشوهة أو المضطربة. هذا الأخير له نظير عند النهاية التقليدية لما $Q \to 1$. قمنا بحساب الناشر أو الكرنل للهزاز التوافقي الضعيف التشوه، وكذلك طيف الطاقة ودالة الموجة الموافقة .

***الكلمات المفتاحية**: تكامل العبور المشوه، الهزاز التوافقي المشوه.*

Ces dernières années, la déformation de différents groupes et algèbres [1,2] a attiré l'attention de plusieurs chercheurs, et de grands efforts ont été réalisés par des mathématiciens, le but étant de trouver des solutions probables à différents problèmes dans les domaines de la physique des particules et la physique de hautes énergies [3].

Le but de cet article est de présenter un nouveau formalisme des intégrales de chemins Q-déformées, en passant par la représentation quantique des opérateurs de création et d'annihilation Q-déformés. Les opérateurs a et a^+ vérifient la relation de commutation suivante:

$$aa^+ - Qa^+a = 1,\ Q \in R, \tag{1}$$

Q étant le paramètre de déformation.

Il existe deux possibilités pour la réalisation de la relation (1) [4]. La première est de construire les opérateurs a et a^+ à partir des variables canoniques usuels, et qui conduit à la représentation de Macfarlane [5]:

$$\begin{aligned} a^+ &= \bar{\alpha}\left(e^{2isx} - e^{is\partial} e^{isx}\right) \\ a &= \alpha\left(e^{-2isx} - e^{-isx} e^{is\partial}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

où $\quad Q = e^{-2s^2}, \quad$ et $\quad \alpha = \bar{\alpha} = \dfrac{1}{(1-Q)^{\frac{1}{2}}}.$

Dans la seconde possibilité, on considère la relation de commutation (1) comme une relation de base [6,7], et les opérateurs de création et d'annihilation Q-déformés comme des opérateurs dans la représentation différentielle et de coordonnée [8] dans le plan quantique.

Dans la représentation de Macfarlane, et en utilisant la relation de commutation (1) dans le concept de la théorie de faible déformation, les opérateurs d'annihilation et de création prennent la forme suivante [9]:

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-iq - \frac{3}{2}sq^2 - i\partial + \frac{1}{2}s\partial^2 - sq\partial\right) + o\left(s^2\right) \\ a^+ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(iq - \frac{3}{2}sq^2 - i\partial + s + sq\partial + \frac{1}{2}s\partial^2\right) + o\left(s^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Les symboles q et $-i\partial$ représentent les opérateurs ordinaires de position et de moment.

FORMALISME

Dans la représentation de Macfarlane, on peut écrire les opérateurs de position et de moment Q-déformés dans l'approche de faible déformation comme [9,10]:

$$X_Q=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(a-a^+\right)=\frac{1}{\sqrt{2}i}\left(a^+-a\right)=q-isq\partial-\frac{i}{2}s+o\left(s^2\right),$$
$$P_Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+a^+\right)=-\frac{3}{2}sq^2-i\partial+\frac{1}{2}s\partial^2+\frac{1}{2}s+o\left(s^2\right) \quad (4)$$

Cependant, leurs opérateurs inverses X_Q^{-1}, P_Q^{-1} sont donnés par:

$$X_Q^{-1}=q^{-1}+s\left(-pq^{-1}+\frac{i}{2}\left(q^{-1}\right)^2\right),$$
$$P_Q^{-1}=p^{-1}+\frac{s}{2}\left(1+3p^{-1}q^2p^{-1}-\left(p^{-1}\right)^2\right). \quad (5)$$

Utilisant la distribution de Dirac:

$$\delta\left(q-q'\right)=\langle q\,|\,q'\rangle=\int dp\, e^{ip\left(q-q'\right)},$$
$$\delta'\left(q-q'\right)=\frac{\partial}{\partial\left(q-q'\right)}\delta\left(q-q'\right)=i\int dp.\,p e^{ip\left(q-q'\right)}, \quad (6)$$
$$\delta''\left(q-q'\right)=-\int dp.\,p^2 e^{ip\left(q-q'\right)}.$$

Après tout calcul fait, les éléments matriciels des opérateurs X_Q et P_Q prennent la forme suivante:

$$\langle q|P_{op}|q'\rangle\cong-i\delta'\left(q-q'\right)+\frac{s}{2}\left(1-3q^2\right)\delta\left(q-q'\right)+\frac{1}{2}s\delta''\left(q-q'\right)+o\left(s^2\right),$$
et
$$\langle q|X_{op}|q'\rangle\cong\left(q-\frac{i}{2}s\right)\delta\left(q-q'\right)-isq\delta'\left(q-q'\right)+o\left(s^2\right) \quad (7)$$

Par définition, le propagateur de Feynman est l'élément matriciel de l'opérateur d'évolution $e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}$ entre deux états de Schrödinger $|q_i\rangle$ et $|q_f\rangle$:

$$K\left(q_f,t_f;q_i,t_i\right)=\langle q_f|e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}|q_i\rangle. \quad (8)$$

Si on divise l'intervalle de temps $[0,t]$ en N sub-intervalles égaux,

$$e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}=\left\{e^{-\frac{it}{N\hbar}\hat{H}}\right\}^N \quad (9)$$

et comme que l'opérateur de Hamilton H a comme forme générale:

$$H=\frac{P_{op}^2}{2m}+V(x), \quad (10)$$

on peut écrire [11]:

$$K\left(q_f,t_f;q_i,t_i\right)=\lim_{N\to\infty}\langle q_f|\left[\exp\left(-\frac{it}{N\hbar}\frac{P_{op}^2}{2m}\right)\exp\left(-\frac{it}{N\hbar}V(x)\right)\right]^N|q_i\rangle$$
$$=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\langle q_{j+1}|\left[\exp\left(-\frac{it}{N\hbar}\frac{P_{op}^2}{2m}\right)\exp\left(-\frac{it}{N\hbar}V(x)\right)\right]|q_j\rangle\prod_{j=1}^{N-1}dq_j. \quad (11)$$

où $q_f=q_N, q_i=q_0; t_N=t_f$ et $t_i=t_0$.

La deuxième étape est de calculer l'élément matriciel $\langle q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j\rangle$:

$$\langle q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j\rangle\cong\delta\left(q_{j+1}-q_j\right)-\frac{i\tau}{N\hbar}\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle$$
$$\cong\delta\left(q_{j+1}-q_j\right)-\frac{i\tau}{N\hbar}\langle q_{j+1}|\left(\frac{P_{op}^2}{2m}+V(x)\right)|q_j\rangle \quad (12)$$

Le deuxième facteur dans (12) peut s'évaluer en utilisant l'opérateur identité $\int dp|p\rangle\langle p|=1$ dans l'espace des moments, où p est une valeur propre de l'opérateur du moment ordinaire $-i\partial$. En utilisant la relation $\langle p|q\rangle=\left(2\pi\hbar\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{ipq}{\hbar}}$, on obtient:

$$\langle q_{j+1}|\frac{p^2{}_{op}}{2m}|q_j\rangle=$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\left[\int dp\left(p^2-3sq^2{}_{j+1}p+3isq_j+sp-sp^3\right)\times\right. \quad (13)$$
$$\left.\exp\left[\frac{i}{\hbar}p\left(q_{j+1}-q_j\right)\right]\right]$$

Maintenant, si:

$$V(x)=\sum_{\alpha=1}^{n}c_\alpha X_{op}^\alpha,$$

où

$$X_{op}^\alpha=\left(q+spq-\frac{i}{2}s\right)^\alpha+o\left(s^2\right),$$

l'élément matriciel $\langle q_{j+1}|X_{op}^\alpha|q_j\rangle$ prend la forme:

$$\langle q_{j+1}|X_{op}^\alpha|q_j\rangle=\left(q_j^\alpha+\frac{i}{2}s\alpha\left(q_j\right)^{\alpha-1}\right)\delta\left(q_{j+1}-q_j\right)+$$
$$+\ s\sum_{l=1}^{\alpha}\left(q_{j+1}\right)^l\left(q_j\right)^{\alpha-l}\Omega_l, \quad (14)$$

où:

$$\Omega_l=\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp_l.p_l\exp\left[\frac{i}{\hbar}p_l\left(q_{j+1}-q_j\right)\right]. \quad (15)$$

Insérant (13) et (14) dans (12), on obtient:

$$\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle=\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp_j e^{\frac{i}{\hbar}p_j\left(q_{j+1}-q_j\right)}\left\{\frac{1}{2m}\left[p_j^2-3sq_{j+1}^2p_j+\right.\right.$$
$$\left.+3isq_j+sp_j-sp_j^3\right]+\sum_{\alpha=1}^{n}c_\alpha\left[q_j^\alpha+\frac{i}{2}s\alpha q_j^{\alpha-1}\right]+$$
$$\left.+s\sum_{\alpha=1}^{n}\alpha c_\alpha q_{j+1}^l q_j^{\alpha-l}\right\}. \quad (16)$$

Finalement, on obtient la forme finale du propagateur Q-déformé:

$$K\left(x_f,t_f;x_i,t_i\right)=\iint D[q(t)]D[p(t)]\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left\{p\dot{q}-\left[H(p,q)+\widetilde{H}_{eff}(p,q)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\overline{H}_{eff}(p,q)\right]\right\}dt+$$
$$+s\alpha\iint D[q(t)]D[p(t)]\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left\{p\dot{q}-\sum_{\alpha=1}^{n}c_\alpha q_{j+1}^l q_j^{\alpha-l}p\right\}dt-$$
$$-\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}p\dot{q}dt. \quad (17)$$

avec: $l=1,2,3.....\alpha$,

$$
\begin{aligned}
&H\left(p_j,q_j\right)=\frac{p_j^2}{2m}+\sum_{\alpha=1}^{n}c_\alpha q_j^\alpha,\\
&\widetilde{H}_{eff}\left(p_j,q_j\right)=s\sum_{\alpha=1}^{n}c_\alpha\frac{i\alpha}{2}q_j^{\alpha-1},\\
&\overline{H}_{eff}\left(p_j,q_j\right)=\frac{1}{2m}\left(-3sq_{j+1}^2p_j+3isq_j+sp_j-sp_j^3\right)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

où: $\quad q_j=q\left(t_j\right),\tau=N\varepsilon et\, t_j=\frac{jt}{N},\left(j=1,2,3..........,N\right)$

Application: l'oscillateur harmonique

Le propagateur de l'oscillateur harmonique dans la théorie faiblement déformée et utilisant le résultat (17) prend la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
K_s&=K_{ord}+s\frac{3m}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\omega}b}{c\omega^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\frac{\cos\omega T-1}{\sin\omega T}\right)(x+y)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\hbar T}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\times\\
&\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^nH_n(x)H_n(y)e^{\frac{i\varepsilon}{3m\hbar}}\\
&=K_{ord}+s\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{i}{\hbar}TE_n^o}\left[\psi_o^*(x')\psi_1(x'')+\psi_1^*(x')\psi_o(x'')\right]+o\left(s^2\right)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

K_{ord} représente le propagateur dans le cas ordinaire.

Avec $\psi_o(x)$ la fonction d'onde ordinaire, qui a comme expression:

$$
\psi_o(x)=\left(\frac{m\omega}{2^{2n}\pi\hbar n!^2}\right)^{\frac{1}{4}}H_n\left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}x'\right)e^{-\frac{M\omega}{2\hbar}x'^2},
$$

et $\psi_1(x'')$ la correction Q-déformée de la fonction d'onde, donnée par:

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(x'')=s\frac{3b\sqrt{m\hbar}}{c\omega^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{m\omega}{2^{2n}\pi\hbar n!^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\cos\omega T-1}{\sin\omega T}\right)\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}x''\times\\
&H_n\left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}x''\right)e^{-\frac{M\omega}{2\hbar}x''^2}e^{\frac{i\varepsilon}{3m\hbar}}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

où: $x'=x$ *et* $x''=y$.

et $b=-\frac{2}{m}+\frac{14}{3}c_2, c=\frac{2}{3}-\frac{1}{m}+\frac{4}{3}c_2, M=\frac{5}{3}m, et\, c_2=\frac{1}{2}m\omega^2$.

Notant qu'à la limite $s\to 0\left(Q\to 1\right)$: $K_s\to K_{ord}$, et $\psi_s(x)=\psi_o(x)+s\,\psi_1(x)\to\psi_o(x)$.

Bien plus, le spectre d'énergie à l'ordre s reste inchangé.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a élaboré un nouveau formalisme des intégrales de chemins Q-déformées en utilisant la théorie de faible déformation. On a développé la représentation de Macfarlane pour les opérateurs de création et d'annihilation Q-déformés dont le but est de calculer les éléments matriciels des opérateurs X_Q et P_Q.

Ce formalisme est une alternative de celui proposé par Chaïchian qui a utilisé la représentation de Baragman-Fock avec une forme très compliquée du propagateur.

Finalement, on a calculé le propagateur de l'oscillateur harmonique faiblement Q-déformé et extrait le spectre d'énergie avec la fonction d'onde correspondante.

REFERENCES

[1]- Drinfel'd V.G., Proc. Berkly Ins. Congress of Math., 1, (1987), p.798.

[2]- Woronowitz S.L., *Comm. Math. Phys*., 111, (1987), p.613.

[3]- Aschierie P., Castellani L., "An introduction to non commutative differential geometry on quantum groups", *Phys. Lett. B*, 293, (1992), p.299.

[4]- Chaïchian M. and Demichev A.P., "*q*-deformed path integral", *Phys. Lett*., B 320, (1994), pp.273-280.

[5]- Macfarlane A., *J. Phys*., A 22, (1989), p.4581.

[6]- Pusz W. and Woronowicz S.L., *Rep. Math Phys*., 27, (1989), p.231.

[7]- Kempf A., *J. Math Phys*., 34, (1993), p.969.

[8]- Wess J. and Zumino B., *Nucl. Phys. Suppl*., B 18, (1990), p.302.

[9]- Boucerredj N. ,"*q* deformed coherent states", In topics in high energy and mathematical physics, Constantine University, (1999).

[10]-Boucerredj N., "A new *q*-deformed Heisenberg-Weyl algebra", In the sixth Constantine high energy physics school. Weak and strong interactions phenomenology, Constantine University, (2002).

[11]-Khendekar D.C., Lawand S.V., Bhagwat K.V., "Path integral methods and their applications", Copyright World Scientific Publi Co. Pte. Ltd. (1993).