Sciences & Technologie **A** – **N°20**, Décembre (2003), pp. 17-20.

APPLICATIONS DE JEUX TOPOLOGIQUES A L'ETUDE DE *C*(*X*) MUNI D'UNE TOPOLOGIE SET-OPEN

Reçu le 21/01/2001 – Accepté le 15/10/2003

Résumé

Dans un espace topologique X, on considère une famille γ non-vide de compacts de X. A l'aide de cette famille, nous munissons $C(X)$ (l'ensemble des fonctions réelles continues sur X) d'une topologie Set-Open. Muni de cette topologie, $C(X)$ sera noté $C_\gamma(X)$. sur X, on définit deux jeux topologiques introduits par R.A. McCoy & I. Ntantu que nous associons à un jeu de Banach-Mazur sur $C_\gamma(X)$ pour donner une condition nécessaire pour que $C_\gamma(X)$ soit faiblement-α-favorable.

***Mots clés**: Jeux Topologiques, Topologie Set-Open, Faiblement-α-favorable.*
Classification AMS : 54C35.

Abstract

On a topological space X, we take a non-void family γ of compact subsets. With this family we define on $C(X)$ (the set of real valued continuous functions on X) a Set-Open topology. Endowed with this topology $C(X)$ will be denoted $C_\gamma(X)$. On X, we define two topological games introduced by R.A. McCoy & I. Ntantu that we associate to a Banach-Mazur game to give a necessary condition for $C_\gamma(X)$ to be weakly-α-favorable.

***Keywords**: Topological Games, Set-Open Topology, Weakly-α-Favorable.*

A.R. BOUCHAIR
Département de mathématiques
Université de Jijel
Jijel, 18000, Algérie

S. KELAIAIA
Département de Mathématiques
Université Badji Mokhtar
Annaba, 23000, Algérie

ملخص

في فضاء طبولوجي X نأخذ أسرة γ غير خالية من المجموعات الجزئية المتراصة، بواسطة هده الأسرة نزود $C(X)$ (مجموعة التوابع الحقيقية المستمرة على X) بطبولوجية تسمى طبولوجيا مجموعة-مفتوحة. $C(X)$ مزود بهده الطبولوجيا يرمز له بالرمز $C_\gamma(X)$.

على الفضاء X نعرف لعبتين طبولوجيتين لماكوى و نتانتى و نرفق لهما لعبة طبولوجية لبناخ-مازير على $C_\gamma(X)$ لأعطاء شرط لازم لكى يكون $C_\gamma(X)$ فضاء α-ملائم ضعيف.

***الكلمات المفتاحية:** اللعب الطبولوجية، طبولوجية مجموعة-مفتوحة، α-ملائم ضعيف.*

Sauf mention contraire, X désigne un espace topologique complètement régulier, $C(X)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur X, γ une famille non-vide de compacts de X et $[A,V]=\{f\in C(X): f(A)\subseteq V\}$ où $A\in\gamma$, V un ouvert de IR.

Nous disons qu'une famille γ de parties de X **refine** autre famille δ de parties de X, si pour tout $A\in\gamma$, il existe $B\in\delta$ tel que $A\subset B$. Nous disons également qu'une famille γ est **admissible** si la condition suivante est vérifiée : Pour tout $A\in\gamma$ et pour toute suite finie $U_1,...,U_n$ telle que $A\subset U_1\cup U_2\cup..\cup U_n$, il existe une suite finie $A_1,...,A_m$ d'éléments de γ qui recouvre A et refine $U_1,...,U_n$.

Nous munissons $C(X)$ de la topologie qui a pour sous base la famille $\{[A,V]\}$ où $A\in\gamma, V$ un ouvert borné de IR. $C(X)$ muni de cette topologie, que l'on nomme topologie **Set-Open**, sera noté $C_\gamma(X)$. Il est montré dans [4] que si γ est une famille admissible, alors la topologie Set-Open engendrée par γ coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de γ et dont une sous-base est donnée par la famille $\{\langle A,\varepsilon\rangle : A\in\gamma, \varepsilon\succ \}$ où $\langle A,\varepsilon\rangle=\{(f,g)\in C(X): \sup|f(x)-g(x)|\prec \}$.

L'une des topologies Set-Open les plus courantes est la topologie **Compact-Open** où la famille γ englobe tous les compacts de X. $C(X)$ muni de cette topologie est noté $C_k(X)$.

Pour étudier certaines propriétés de complétude de $C_k(X)$, R.A. McCoy & I. Ntantu ont introduit dans [6] deux jeux topologiques qui ont permis de caractériser quand $C_k(X)$ est faiblement-α-favorable [7], nous allons dans ce travail définir deux jeux équivalents qui vont nous permettre de démontrer ces mêmes résultats pour $C_\gamma(X)$.

1- JEUX DE BANACH-MAZUR $\Gamma_{BM}(X)$

Etant donnée un espace topologique X, on appelle jeu de Banach-Mazur sur X le jeu topologique noté $\Gamma_{BM}(X)$ dans lequel, au cours d'une partie, deux joueurs notés α et β jouent alternativement des ouverts U_n et V_n non-vides de X comme suit :

Le joueur β commence la partie en jouant un ouvert U_1.

A l'étape n, quand β a joué l'ouvert U_n, α répond par un ouvert $V_n \subset U_n$.

Quand α a joue l'ouvert V_n, β répond par un ouvert $U_{n+1} \subset V_n$, et ainsi de suite.

Le joueur α gagne si $\bigcap_{n\geq 1}$ sinon le joueur β gagne.

Définition 1.1. On appelle stratégie dans $\Gamma_{BM}(X)$ toute application $\sigma : \tau^* \to \tau^*$ tel que $\sigma(U) \subset U$, pour tout $U \in \tau^*$, où τ^* désigne l'ensemble des ouverts non-vides de X. Une stratégie σ pour le joueur α dans $\Gamma_{BM}(X)$ est dite gagnante si pour toute partie de jeu $U_1, V_1, U_2, V_2, ...$ telle que

$$U_1 \supset V_1 = \sigma(U_1) \supset U_2 \supset V_2 = \sigma(U_2) \supset ...$$

on a $\bigcap_{n\geq 1}$ Ainsi définie la stratégie σ ne dépend pas des coups précédents joués par α et β.

Une stratégie peut aussi tenir compte des coups précédemment joués, dans ce cas elle est définie comme suit $\sigma : \prod(\tau^*)^n \to \tau^*$ c'est à dire qu'au coup n joué par β, α répond par $\sigma(U_1, V_1, ..., U_n) \subset U_n$.

Définition 1.2. Un espace topologique X est dit α-favorable si le joueur α possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_{BM}(X)$. Il est dit faiblement-α-favorable si le joueur α possède une stratégie gagnante qui tient compte de tous les coups joués précédemment par α et β.

2- JEU $\Gamma_\gamma^1(X)$

Soit X un espace topologique et γ une famille non-vide de compacts de X comprenant l'ensemble vide. On définit $\Gamma_\gamma^1(X)$ comme étant le jeu topologique dans lequel deux joueurs notés I et II, au cours d'une partie jouent alternativement des éléments de la famille γ.

Au n-ième coup, le joueur I choisit un compact $A_n \in \gamma$ et le joueur II répond par $B_n \in \gamma$, la seule restriction est sur le joueur I qui doit choisir A_n disjoint de $B_1 \cup .. \cup B_{n-1}$ pour tout $n \succ$ le joueur II gagne la partie si la famille $\{A_n : n \geq 1\}$ est discrète dans X, sinon I gagne.

Nous donnons dans le théorème (2.2), à l'aide du jeu $\Gamma_\gamma^1(X)$ une condition nécessaire pour que $C_\gamma(X)$ soit faiblement-α-favorable.

Lemme 2.1. Soit X, Y deux espaces topologiques, f une application continue de X dans Y et $\{A_n : n \geq 1\}$ une famille de sous-ensembles de X tels que $\{f(A_n) : n \geq 1\}$ soit discrète, alors la famille $\{A_n : n \geq 1\}$ est discrète.

Théorème 2.2. Soit X un espace topologique et γ une famille admissible de compacts de X comprenant l'ensemble vide et qui est stable pour les unions finies. Si $C_\gamma(X)$ est un espace faiblement-α-favorable, alors le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^1(X)$.

Démonstration : Supposons que $C_\gamma(X)$ est un espace faiblement-α-favorable, donc le joueur α possède une stratégie gagnante τ dans $\Gamma_{BM}(C_\gamma(X))$. Montrons que le joueur II possède une stratégie gagnante σ dans $\Gamma_\gamma^1(X)$.

Supposons que le joueur I ait choisi un élément A_1 de γ et soit $f_1 : X \to IR$ l'application telle que $f_1(x) = 1, \forall x \in X$. Considérons $U_1 = \left\langle f_1, A_1, \frac{1}{2} \right\rangle$ qui est un ouvert de $C_\gamma(X)$, alors $\tau(U_1)$ est un ouvert de $C_\gamma(X)$ tel que $\tau(U_1) \subset U_1$.

Choisissons $V_1 = \langle g_1, B_1, \varepsilon_1 \rangle \subset \tau(U_1)$ avec $\varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}$. Posons $\sigma(A_1) = B_1$ et supposons que pour $n \succ$ le joueur I ait choisi un élément A_n de γ et que :

$$U_k = \left\langle f_k, A_k \cup B_{k-1}, \frac{\varepsilon_{k-1}}{2} \right\rangle;$$

$$V_k = \langle g_k, B_k, \varepsilon_k \rangle; k = 2, .., n-1.$$

soient définis de telle sorte que

$$V_k \subset \tau(U_1, V_1, .., U_{k-1}, V_{k-1}, U_k),$$

$$\varepsilon_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

et que $f_k(x) = g_{k-1}(x)$ pour $x \in B_{k-1}$ et $f_k(x) = k$ pour $x \in A_k$.

Définissons l'application continue $f_n : X \to IR$ par $f_n(x) = g_{n-1}(x)$ pour $x \in B_{n-1}$ et $f_n(x) = n$, pour $x \in A_n$. Considérons l'ouvert $U_n = \left\langle f_n, A_n \cup B_{n-1}, \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \right\rangle \subset V_{n-1}$, alors il existe un ouvert

$$V_n = \langle g_n, B_n, \varepsilon_n \rangle \subset \tau(U_1, V_1, .., U_{n-1}, V_{n-1}, U_n),$$

avec $\varepsilon_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Posons $\sigma(A_1, A_2, .., A_n) = B_n$, et montrons que σ est une stratégie gagnante pour le joueur *II* dans $\Gamma_\gamma{}^1(X)$. Comme $C_\gamma(X)$ est un espace faiblement-α-favorable, alors

$$\bigcap_{n\geq 1}$$

Soit $f \in \bigcap_{n\geq 1}$ et $x \in A_n$, alors $|f(x) - f_n(x)| \prec \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc $f(A_n) \subset \left]n - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right[$, pour tout $n \geq 1$.

La famille $\{f(A_n) : n \geq 1\}$ est donc discrète dans *IR* et puisque f est continue, alors la famille $\{A_n : n \geq 1\}$ est discrète dans X et, par conséquent, σ est une stratégie gagnante pour le joueur *II* dans $\Gamma_\gamma{}^1(X)$.

3- JEU $\Gamma_\gamma{}^2(X)$

Soit X un espace topologique, γ une famille non-vide de compacts de X On définit $\Gamma_\gamma{}^2(X)$ comme étant le jeu topologique dans lequel deux joueurs notés *I* et *II*, au cours d'une partie, jouent alternativement des éléments de la famille γ sans aucune restriction.

Au n-ième coup, le joueur *I* choisit un compact A_n de la famille γ et le joueur *II* répond par un compact B_n de γ. Soit $R_1 = A_1$ et pour $n \geq 2$, soit $R_n = A_n \setminus (B_1 \cup .. \cup B_{n-1})$. Le joueur *II* gagne la partie si la famille $\{R_n : n \geq 1\}$ est discrète dans *X*, sinon *I* gagne.

Remarquons que si le joueur *II* possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma{}^2(X)$, alors il a une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma{}^1(X)$. Pour le cas inverse, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.1. Soit X un espace topologique, γ une famille admissible de compacts de X comprenant l'ensemble vide et stable pour les unions finies telle que tout point $x \in X$ admette un élément de γ comme voisinage. Si le joueur *II* possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma{}^1(X)$, alors il possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma{}^2(X)$.

La démonstration de ce lemme nécessite la démonstration de la proposition suivante

Proposition 3.2. Soit X un espace topologique, γ une famille admissible de parties compacts de X stable par unions finies. Soit $C, D, D' \in \gamma$ tels que $D' \subset D^\circ$. Alors, il existe $C' \in \gamma$ tel que $(C \setminus D) \subset C'$ et $C' \cap D' = \varnothing$.

Démonstration : (D'^c, D°) est un recouvrement ouvert de C. En vertu du fait que γ soit admissible, on peut trouver $E_1, .., E_m \in \gamma$ recouvrant C et refinant (D'^c, D°). Soit $C' = \bigcup\{ \quad \subset D'^c\}$. Il est aisé de voir que $(C \setminus D) \subset C'$ et $C' \cap D' = \varnothing$.

Démonstration du Lemme 3.1. Soit σ_1 une stratégie gagnante pour le joueur *II* dans $\Gamma_\gamma{}^1(X)$. On définit une stratégie σ_2 pour le joueur *II* dans $\Gamma_\gamma{}^2(X)$ comme suit : soit $A_1 \in \gamma$ le compact joué par le joueur *I* au premier coup, posons $R_1 = A_1$ et $A'_1 = A_1$, alors $B'_1 = \sigma_1(A'_1)$ est bien défini. Par ailleurs, pour tout $x \in B'_1$, il existe un élément $K_x \in \gamma$ et un ouvert O_x contenant x tels que $O_x \subset K_x$. La famille $\{O_x : x \in B'_1\}$ est un recouvrement de B'_1 qui est compact, par conséquent

$$B'_1 \subset \bigcup\left(\quad \right) \quad \bigcup\left(\quad \right) = B_1.$$

Définissons $\sigma_2(A_1) = B_1$.

Au n-ième coup, supposons que le joueur *I* ait choisi A_n de γ pour $n \geq 2$, et soient $A_1, B_1, .., A_{n-1}, B_{n-1}$ et $A'_1, B'_1, .., A'_{n-1}, B'_{n-1}$ les compacts choisis de telle sorte que chaque B'_i est contenu dans l'intérieur de B_i.

Maintenant, soit $R_n = A_n \setminus (B_1 \cup .. \cup B_{n-1})$ et prenant A'_n comme étant un élément de γ qui contient $\overline{R_n}$ dans son intérieur et que l'on peut choisir en vertu de l'admissibilité de γ et de la proposition 3.2 tel que $A'_n \cap (B'_1 \cup .. \cup B'_{n-1}) = \varnothing$, donc $\sigma_1(A'_1, .., A'_n) = B'_n$ est bien définie. Définissons $\sigma_2(A_1, .., A_n) = B_n$ comme étant un élément de γ qui contient B'_n dans son intérieur.

$A'_1, B'_1, A'_2, B'_2, ...$ étant une partie du jeu $\Gamma_\gamma{}^1(X)$, donc la famille $\{A'_n : n \geq 1\}$ est discrète dans *X,* et puisque $R_n \subset A'_n, \forall n \geq 1$, alors la famille $\{R_n : n \geq 1\}$ est discrète dans X et par conséquent σ_2 est une stratégie gagnante pour le joueur *II* dans $\Gamma_\gamma{}^2(X)$.

Nous allons donner, à l'aide de $\Gamma_\gamma{}^2(X)$, une condition suffisante pour que $C_\gamma(X)$ soit σ-compact. Rappelons qu'un espace topologique X est σ-compact s'il est réunion dénombrable de sous-ensembles compacts.

Lemme 3.3. Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ deux suites de sous-ensembles de X avec $B_0 = \varnothing$ et soient les suites (R_n) et (S_n) définies par

$R_n = A_n \setminus (B_0 \cup B_1 \cup .. \cup B_{n-1})$, pour tout $n \geq 1$.

$S_n = B_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n)$, pour tout $n \geq 1$.

Alors,

$$\left(\cup\{R_n : n \geq 1\}\right) \bigcup\left(\quad \right) \quad \left(\quad \right) \bigcup\left(\quad \right)$$

Démonstration : Il est évident que

$\left(\cup\{R_n : n \geq 1\}\right) \bigcup \ldots \bigcup \ldots$

Montrons l'autre sens.

Soit $x \in \left(\cup\{A_n : n \geq 1\}\right) \bigcup \ldots n \geq 1\}\big)$, soit n_1 respectivement n_2 le plus petit indice tel que $x \in A_{n_1}$ et $x \in B_{n_2}$ avec $n_1 = \infty$ si $x \notin \left(\cup\{A_n : n \geq 1\}\right)$ et $n_2 = \infty$ si $x \notin \left(\cup\{B_n : n \geq 0\}\right)$. Si $n_1 \leq n_2$ alors $x \in R_{n_1}$ et si $n_2 \prec \ldots$ on a $x \in S_{n_2}$.

Théorème 3.4. Soient X un espace topologique, γ une famille de compacts de X comprenant l'ensemble vide et γ_0 une sous-famille dénombrable de γ telle que $X = \overline{\bigcup \ldots : \gamma_0\}}$. Si le joueur *II* possède une stratégie gagnante dans $\Gamma^2{}_\gamma(X)$ alors X est une réunion dénombrable d'éléments de γ et donc X est σ-compact.

Démonstration : Soient $X = \overline{\bigcup \ldots}$ $K_i \in \gamma_0$ et σ une stratégie gagnante pour le joueur *II* dans $\Gamma_\gamma{}^2(X)$, définissons une nouvelle stratégie σ' pour le joueur *II* comme suit :

$$\sigma'(A_1,..,A_n) = K_n \cup \sigma(A_1,..,A_n), \quad K_n \in \gamma_0, \quad n \geq 1.$$

σ' est aussi une stratégie gagnante pour le joueur *II* dans $\Gamma^2{}_\gamma(X)$. A présent, le joueur *I* lui aussi utilise la stratégie σ'.

Soit $B_0 = \varnothing$, $A_1 = \sigma'(B_0)$, et soit $B_1 = \sigma'(A_1)$. Pour $n \geq 2$, on définit $A_n = \sigma'(B_0,..,B_{n-1})$; $B_n = \sigma'(A_1,..,A_n)$.

et on pose

$$R_n = A_n \setminus (B_0 \cup .. \cup B_{n-1});$$
$$S_n = B_n \setminus (A_1 \cup .. \cup A_n).$$

Puisque la stratégie σ' est gagnante, alors les deux familles $\{R_n : n \geq 1\}$ et $\{S_n : n \geq 1\}$ sont discrètes dans *X*. De plus l'ensemble

$D = \left(\cup\{R_n : n \geq 1\}\right) \bigcup \ldots \bigcup \ldots$

est dense dans *X*. Montrons que $D = X$.

Soit $x \in X$, alors il existe un voisinage U de x qui rencontre au plus un R_n et au plus un S_n. Comme D est dense dans *X*, alors il existe n_0 et n_1 tels que $x \in \overline{R_{n_0}}$ ou $x \in \overline{S_{n_1}}$ ce qui signifie que $x \in A_{n_0}$ ou $x \in B_{n_1}$ et donc $D = X$, ce qui prouve que *X* est une réunion dénombrable d'éléments de γ.

REFERENCES

[1]- Arens A., "A topology of spaces of transformations", *Annals of Math.*, 47, (1946), 480-495.

[2]- Choquet G., "Lectures in analysis", Benjamin New York and Amsterdam, 1(1969).

[3]- Engelking R., "General topology", Polish Scientific Publishing, (1977).

[4]- Kelaiaia S., "Propriétés de certaines topologies set-open sur C(X)", Thèse de doctorat de l'université de Rouen, soutenu le 30-06-1995.

[5]- McCoy R. A. and Ntantu I., "Topological properties of spaces of continuous functions", Lecture Note in Math, 1315, Springer Verlag Germany, (1988).

[6]- McCoy R. A. and Ntantu I., "Completeness properties of function spaces", *Top. and Appl.*, 2(1986), 191-206.

[7]- White H. E., "Topological spaces that are α-favorable for player with perfect information", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 50 (1975), 477-482.

□