Sciences & Technologie **A** – **N°20**, Décembre (2003), pp. 21-28.

PROBLEME AUX LIMITES POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU TROISIEME ORDRE

Reçu le 05/03/2002– Accepté le 16/04/2003

Résumé

Dans cet article on utilise la méthode des inégalités énergétiques, dite aussi méthode des estimations a priori, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution forte d'un problème aux limites avec des conditions locales pour une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

Mots clés: *Estimation a priori, solution forte.*

Abstract

In this paper we use the energy inequalities method, it called also the a priori estimations method, to proof the existence and the uniqueness of the strong solution of a boundary-value problem with local conditions for a partial differential equation of the third order.

Keywords: *A priori estimation, strong solution.*

AMS msc **: 35A05, 35A25, 35G05, 35G15, 35M15.**

B. BOUDJEDAA
Département de Mathématiques
et d'Informatique
Faculté des Sciences
et des Sciences de L'ingénieur
Université de Ouargla
Ouargla, 30000, Algérie

N. BENOUAR
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
U.S.T.H.B., BP12 El-Alia
Bab-Ezzouar, Alger, 16000, Algérie

ملخص

في هذا البحث نستعمل طريقة التقديرات القبلية لإثبات وجود و وحدانية الحل القوي لمسالة حدية ذات شروط حدية محلية .

الكلمات المفتاحية: *التقريبات القبلية, الحل القوي.*

Dans ce travail on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution forte d'un problème aux limites avec des conditions locales pour une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\mathrm{L}u \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - A(t)\frac{\partial u}{\partial t} - B(t)u - \lambda(x)u = f.$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème considéré, on utilise une méthode fonctionnelle basée essentiellement sur la théorie des estimations *a priori*. Cette méthode nécessite, pour chaque problème donné, une étude *ad hoc*. Elle peut être caractérisée par le schéma suivant :

Pour un problème aux limites donné (P), on associe un opérateur L défini par

$$L: \quad D(L) \subset E \longrightarrow F$$

où $D(L)$ est le domaine de définition de L; E et F sont deux espaces de Banach convenablement choisis, tel que résoudre le problème (P) revient à résoudre l'équation opérationnelle suivante

$$Lu = f \quad \text{où} \quad f \in F \tag{1}$$

Pour ce faire, on établit une estimation *a priori*

$$\|u\|_E \le C\|Lu\|_F, \ \forall u \in D(L) \tag{2}$$

appelée souvent **inégalité de l'énergie**; ensuite, on construit la fermeture de l'opérateur L qu'on note $\bar{L}$, et par passage à la limite, on peut facilement étendre l'inégalité (2) aux éléments de $D(\bar{L})$

$$\|u\|_E \le C\left\|\bar{L}u\right\|_F, \ \forall u \in D(\bar{L}). \tag{3}$$

Pour cet opérateur $\bar{L}$ et de l'inégalité (3), on démontre que

$$\mathrm{R}(\bar{L}) = \overline{\mathrm{R}(L)} \tag{4}$$

où $\mathrm{R}(L)$ représente l'ensemble image de l'opérateur L.

Finalement, si on convient d'appeler solution forte du problème (P) toute fonction $u \in D(\overline{L})$ telle que $\overline{L}u = f$, alors de (4) on constate que pour montrer l'existence de la solution forte du problème (P), quel que soit le second membre, il est nécessaire et suffisant d'établir la densité de $R(L)$ dans F.

Parmi les travaux les plus proches du nôtre et qui utilisent la même méthode développée dans ce travail, citons Dainyak et Korzyuk [1], Tsyvis et Yurchuk [2] où les auteurs établissent l'existence et l'unicité de la solution pour des problèmes d'ordre trois. Citons également l'article de Gavrilova et Yurchuk [3] où les auteurs étudient un problème de Cauchy pour une équation du type Euler-Poisson-Darboux; notons en particulier les travaux de Yurchuk [4-12] où l'auteur étudie, par la méthode de l'inégalité de l'énergie, celle utilisée dans ce travail, des problèmes aux limites pour des équations dont les parties principales contiennent des opérateurs de la forme $\frac{d^m}{dt^m} + A$ (voir [4-5]) et des problèmes aux limites pour des équations avec des coefficients opératoriels dépendant d'un paramètre (voir [7-9]) ainsi qu'une multitude d'autres problèmes aux limites aussi intéressants que les précédents. Tous ces travaux sont les articles de base de notre travail, surtout les deux articles [11-12] desquels on s'est inspiré pour développée la méthode présentée dans ce travail.

I. POSITION DU PROBLEME

Dans le cylindre $Q_T = (0,T) \times \Omega$ où Ω est un ouvert borné de R^n, de frontière Γ assez régulière, T un nombre positif fini, on considère le problème

$$\mathrm{L}u \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - A(t)\frac{\partial u}{\partial t} - B(t)u - \lambda(x)u = f \quad sur \ \ Q_T; \qquad (1.1)$$

$$u(0,x) = 0 \quad sur \ \ \Omega; \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0 \quad sur \ \ \Omega; \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial u(T,x)}{\partial t} = 0 \quad sur \ \ \Omega; \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \ , \quad 0 \le j \le m-1, \ \ \text{sur} \sum {}^{(1)} \qquad (1.5)$$

où $\lambda(x)$ est une fonction mesurable dépendant seulement de $x \in \Omega$; $A(t)$, $B(t)$ sont des opérateurs différentiels à coefficients variables donnés par :

$$A(t) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(a_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \right) + \Theta(x) \, {}^{(2)} \qquad (1.a)$$

où $\Theta(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, est une fonction bornée, mesurable, dépendant seulement de $x \in \Omega$.

$$B(t) \equiv \sum_{|p|,|q| \le m} (-1)^{|p|} \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(b_{pq} \frac{\partial^q}{\partial x^q} \right) \qquad (1.b)$$

Notons $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$ les opérateurs différentiels donnés par:

$$\tilde{A}(t) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \right) \qquad (1 \cdot \overline{a})$$

$$\tilde{B}(t) \equiv \sum_{|p|,|q| \le m} (-1)^{|p|} \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{\partial b_{pq}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^q}{\partial x^q} \right). \qquad (1 \cdot \overline{b})$$

Supposons que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ et b_{pq} vérifient les conditions :

(HA): $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $a_{\alpha\beta} \in C^{1,m}(\overline{Q}_T)$, $|\alpha| \le m, |\beta| \le m$;

(HB): $b_{pq} = b_{qp}$, $b_{pq} \in C^{1,m}(\overline{Q}_T)$, $|p| \le m, |q| \le m$;

(HE): les opérateurs $A(t), -\tilde{A}(t), B(t), -\tilde{B}(t)$ sont uniformément fortement elliptiques, i.e, d'après l'inégalité de Gårding [13]:

1) Il existe deux constantes $\gamma_1 > 0$, $\lambda_1 \ge 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\left(A(t)u, u \right)_\Omega \ge \gamma_1 \|u\|^2_{m,\Omega} - \lambda_1 \|u\|^2_\Omega \,; \forall u \in H^m_0(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \qquad (1.6)$$

2) Il existe deux constantes $\tilde{\gamma}_1 > 0$, $\tilde{\lambda}_1 \ge 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\left(-\tilde{A}(t)u, u \right)_\Omega \ge \tilde{\gamma}_1 \|u\|^2_{m,\Omega} - \tilde{\lambda}_1 \|u\|^2_\Omega \,; \forall u \in H^m_0(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \qquad (1.7)$$

3) Il existe deux constantes $\gamma_2 > 0$, $\lambda_2 \ge 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\left(B(t)u, u \right)_\Omega \ge \gamma_2 \|u\|^2_{m,\Omega} - \lambda_2 \|u\|^2_\Omega \,; \forall u \in H^m_0(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \qquad (1.8)$$

4) Il existe deux constantes $\tilde{\gamma}_2 > 0$, $\tilde{\lambda}_2 \ge 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\left(-\tilde{B}(t)u, u \right)_\Omega \ge \tilde{\gamma}_2 \|u\|^2_{m,\Omega} - \tilde{\lambda}_2 \|u\|^2_\Omega \,; \forall u \in H^m_0(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \qquad (1.9)$$

II. ESPACES FONCTIONNELS ASSOCIES AU PROBLEME

Pour l'étude du problème donné ci-dessus, on a besoin de quelques espaces fonctionnels.

On désigne par E l'espace de Hilbert

$$H^{2,m}(Q_T) \cap H^1(0,T; H^m(\Omega))$$

muni de la norme :

$$\|u\|^2_E = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|^2_{Q_T} + \sum_{|\alpha| \le m} \left(\left\| \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial x^\alpha \partial t} \right\|^2_{Q_T} + \left\| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right\|^2_{Q_T} \right)$$

---

(1) On note par : $\frac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée relative à la normale ν à la surface latérale Σ du cylindre Q_T.

(2) On note par : $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ la dérivée en x d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

L'espace F étant le complété de $L^2(Q_T)$ par rapport à la norme :

$$\|f\|_F^2 = \int_0^T \left\|S^{-1} f\right\|_\Omega^2 \ , \ \forall f \in L^2(Q_T) \, ;$$

où l'opérateur S^2 est engendré par l'expression différentielle $(-\Delta)^m$ sur Ω et les conditions aux limites homogènes du type Dirichlet sur Γ.

III. ESTIMATION A PRIORI

Notons L l'opérateur engendré par le problème (1.1)-(1.5) défini par :

$$L: \ D(L) \subset E \longrightarrow F$$
$$u \mapsto Lu = \mathsf{L}u$$

où

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{c} u \in E / \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L^2(Q_T), \dfrac{\partial^{\alpha+k} u}{\partial x^\alpha \partial t^k} \in L^2(Q_T), |\alpha| \le 2m, \, k = 0,1 \\ u \ \text{verifie} \ (1\cdot 2) - (1 \cdot 5) \end{array} \right\}$$

Théorème 1.

Sous les hypothèses (HA), (HB), (HE), on peut trouver une constante $\lambda_0 \ge 0$ telle que pour toute fonction mesurable et bornée $\lambda(x) > \lambda_0, \forall x \in \Omega$, on a l'estimation :

$$\|u\|_E \le C_0 \|Lu\|_F \, , \ \forall u \in D(L) \tag{3.1}$$

où C_0 est une constante positive indépendante de u.

La démonstration de ce théorème est basée sur la technique du multiplicateur qui est due essentiellement aux idées introduites par Petrovskey, Leray, Garding dans leurs travaux respectifs [14-16] où ils traitent des problèmes du type hyperboliques et qui consiste à multiplier scalairement Lu, où L est l'opérateur associé au problème donné, par une expression Mu qui dépend de u ou de ses dérivées partielles, et, par des intégrations par parties, on essaie de tirer l'estimation voulue.

Jusqu'à présent, la recherche d'un multiplicateur pour un problème donné est encore un problème ouvert et il n'existe pas de méthode générale pour déduire ce multiplicateur sauf dans des cas très particuliers (voir [17]).

Démonstration.

Définissons sur $D(L)$ un opérateur noté :

$$Mu = (t-T)u + C_1 \varphi(t) \frac{\partial u}{\partial t}$$

où

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+T)^2} & si \ \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{1}{\lambda_1 (1+T)^2} & si \ \lambda_1 \ne 0 \end{cases} \quad \text{et} \ \ \varphi(t) = t^2 + t - (1 + T(T+1)).$$

Considérons ensuite le produit scalaire dans $L^2(Q_T)$ de Lu par Mu soit :

$$\left(\mathsf{L}u \, , Mu\right)_{Q_T} = \int_{Q_T} \mathsf{L}u \cdot Mu \, dtdx \tag{3.2}$$

On note par I_1, I_2, I_3, I_4 les quatre termes du second membre de l'égalité (3.2) donnés par :

$$I_1 = \int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \cdot Mu \ dtdx \ ; \ I_2 = -\int_{Q_T} A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \cdot Mu \ dtdx$$

$$I_3 = -\int_{Q_T} B(t) u \cdot Mu \ dtdx \ ; \ I_4 = -\int_{Q_T} \lambda(x) u \cdot Mu \ dtdx$$

En effectuant des intégrations par parties sur chaque terme des $I_j, \, j = 1,2,3,4,$ en tenant compte des conditions (1.2)-(1.5) et des inégalités (1.6)-(1.9), on obtient les estimations :

$$I_1 > \left(\frac{3}{2} + C_1\right) \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{Q_T}^2 + C_1 \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_{Q_T}^2 \ ; \tag{3.3}$$

$$I_2 \ge C_1 \gamma_1 \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial x^\alpha \partial t}\right\|_{Q_T}^2 - C_1 \lambda_1 (1+T)^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{Q_T}^2 + \frac{\gamma_1}{2} \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|_{Q_T}^2$$
$$- \frac{\lambda_1}{2} \|u\|_{Q_T}^2 + \frac{\tilde{\gamma}_1}{2} \int_0^T (T-t) \|u\|_{m,\Omega}^2 - \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \int_0^T (T-t) \|u\|_\Omega^2 \, ; \tag{3.4}$$

$$I_3 \ge C_1 \frac{\gamma_2 + \tilde{\gamma}_2}{2} \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|_{Q_T}^2 - C_1 \frac{\lambda_2 + \tilde{\lambda}_2}{2} (1+T)^2 \|u\|_{Q_T}^2$$
$$+ \gamma_2 \int_0^T (T-t) \|u\|_{m,\Omega}^2 - \lambda_2 \int_0^T (T-t) \|u\|_\Omega^2$$
$$+ \frac{C_1 \gamma_2}{2} \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^\alpha u(T)}{\partial x^\alpha}\right\|_\Omega^2 - \frac{C_1 \lambda_2}{2} \|u(T)\|_\Omega^2 \tag{3.5}$$

$$I_4 \ge \int_{Q_T} (T-t) \lambda(x) u^2 + \frac{C_1}{2} \int_{Q_T} \lambda(x) u^2 + \frac{C_1}{2} \int_\Omega \lambda(x) u^2 . \tag{3.6}$$

Alors les inégalités (3.3)-(3.6) donnent

$$\left(\mathsf{L}u \, , Mu\right)_{Q_T} \ge C_1 \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_{Q_T}^2 + C_1 \gamma_1 \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial x^\alpha \partial t}\right\|_{Q_T}^2$$
$$+ \frac{\gamma_1 + C_1(\gamma_2 + \tilde{\gamma}_2)}{2} \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|_{Q_T}^2 + (\gamma_2 + \frac{\tilde{\gamma}_1}{2}) \int_0^T (T-t) \|u\|_{m,\Omega}^2$$
$$+ \int_{Q_T} \left(\frac{C_1}{2} \lambda(x) - \frac{\lambda_1}{2} - C_1 (1+T)^2 \frac{\lambda_2 + \tilde{\lambda}_2}{2} \right) u^2$$
$$+ \int_{Q_T} (T-t) \left(\lambda(x) - \lambda_2 - \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \right) u^2 + \frac{C_1 \gamma_2}{2} \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^\alpha u(T)}{\partial x^\alpha}\right\|_\Omega^2$$
$$+ \frac{C_1}{2} \int_\Omega \left(\lambda(x) - \lambda_2\right) u^2(T). \tag{3.7}$$

Notons par

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{C_1} + \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} + (\lambda_2 + \tilde{\lambda}_2)(1+T)^2.$$

Pour ce λ_0 et pour toute fonction $\lambda(x)$ mesurable et bornée telle que $\lambda(x) > \lambda_0, \forall x \in \Omega$, on a

$$\left(\mathsf{L}u\,,Mu\right)_{Q_T}\geq C_1\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|^2_{Q_T}+C_1\gamma_1\sum_{|\alpha|\leq m}\left\|\frac{\partial^{\alpha+1}u}{\partial x^\alpha\partial t}\right\|^2_{Q_T}$$

$$+\frac{\gamma_1+C_1(\gamma_2+\tilde\gamma_2)}{2}\sum_{|\alpha|\leq m}\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|^2_{Q_T}+C_2\|u\|^2_{Q_T}+C_3\int_{Q_T}(T-t).u^2$$

$$+(\gamma_2+\frac{\tilde\gamma_1}{2})\int_0^T(T-t)\|u\|^2_{m,\Omega}+\frac{C_1\gamma_2}{2}\sum_{|\alpha|\leq m}\left\|\frac{\partial^\alpha u(T)}{\partial x^\alpha}\right\|^2_{\Omega}+C_4\|u(T)\|^2_{\Omega},\tag{3.8}$$

où : $C_2=\dfrac{C_1\tilde\lambda_1}{4}$;

$$C_3=\frac{\lambda_1}{C_1}+T(T+2)\lambda_2+(1+T)^2\,\tilde\lambda_2\ ;$$

$$C_4=\frac{C_1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{C_1}+\frac{\tilde\lambda_1}{2}+T(T+2)\lambda_2+(1+T)^2\,\tilde\lambda_2\right).$$

Donc, en prenant

$$\delta=\min\left(\gamma_1,\frac{1}{2}(\frac{\gamma_1}{C_1}+\gamma_2+\tilde\gamma_2)\right),$$

l'inégalité précédente devient

$$\left(\mathsf{L}u\,,Mu\right)_{Q_T}\geq C_1\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|^2_{Q_T}$$

$$+C_1\delta\sum_{|\alpha|\leq m}\left(\left\|\partial^{\alpha+1}u\partial x^\alpha\partial t\right\|^2_{Q_T}+\left\|\partial^\alpha u\partial x^\alpha\right\|^2_{Q_T}\right)\tag{3.9}$$

Sachant que

$$\left(\mathsf{L}u\,,Mu\right)_{Q_T}=\int_0^T\left(Lu\,,Mu\right)_\Omega$$

Alors, en utilisant les propriétés **P1**, **P2** (appendice A) de l'opérateur S et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura pour tout $\varepsilon>0$:

$$2\left(\mathsf{L}u\,,Mu\right)_\Omega\leq\frac{1}{\varepsilon}\left\|S^{-1}\mathsf{L}u\right\|^2_\Omega+2\varepsilon\gamma_0k(T)\left(\|u\|^2_{m,\Omega}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{m,\Omega}\right)$$

presque partout sur $[0,T]$

où

$$k(T)=\begin{cases}(1+T)^2 & \text{si}\quad\lambda_1=0,\\ \max\left(\dfrac{1}{\lambda_1^2},(1+T)^2\right) & \text{si}\quad\lambda_1\neq 0,\end{cases}$$

et γ_0 est la constante positive (inégalité (A.2) de l'appendice A) telle que : $\|Sv\|^2_\Omega\leq\gamma_0\|v\|^2_{m,\Omega},\ \forall v\in H_0^m(\Omega)$.

D'où :

$$2\left(\mathsf{L}u,Mu\right)_\Omega\leq\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left\|S^{-1}Lu\right\|^2_\Omega$$

$$+2\varepsilon\gamma_0k(T)\sum_{|\alpha|\leq m}\left(\left\|\frac{\partial^{\alpha+1}u}{\partial x^\alpha\partial t}\right\|^2_{Q_T}+\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|^2_{Q_T}\right)\tag{3.10}$$

Finalement, des inégalités (3.9) et (3.10), on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left\|S^{-1}Lu\right\|^2_\Omega\geq 2C_1\left\|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right\|^2_{Q_T}$$

$$+2(C_1\delta-\varepsilon\gamma_0k(T))\sum_{|\alpha|\leq m}\left(\left\|\frac{\partial^{\alpha+1}u}{\partial x^\alpha\partial t}\right\|^2_{Q_T}+\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|^2_{Q_T}\right)\tag{3.11}$$

Donc, pour $\varepsilon=\dfrac{C_1\delta}{2\gamma_0k(T)}$ l'inégalité précédente devient:

$$\frac{2\gamma_0k(T)}{C_1\delta}\int_0^T\left\|S^{-1}Lu\right\|^2_\Omega\geq$$

$$2C_1\left\|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right\|^2_{Q_T}+C_1\delta\sum_{|\alpha|\leq m}\left(\left\|\frac{\partial^{\alpha+1}u}{\partial x^\alpha\partial t}\right\|^2_{Q_T}+\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|^2_{Q_T}\right)\tag{3.12}$$

Ce qui donne :

$$\|u\|_E\leq C_0\|Lu\|_F,\ \forall u\in D(L),$$

où $\quad C_0=\dfrac{1}{C_1}\sqrt[2]{\dfrac{2\gamma_0k(T)}{\rho\delta}}\quad;\quad\rho=\min(2\,,\delta)$.

Par une méthode classique, on arrive à démontrer la

Proposition 1.
L'opérateur L défini ci-dessus est fermable (admet une fermeture).

Démonstration. Voir appendice B.

Notons par $\bar L$ cette fermeture et $D(\bar L)$ son domaine de définition. Alors par passage à la limite on peut facilement étendre l'estimation (3.1) aux éléments de $D(\bar L)$, c'est-à-dire :

$$\|u\|_E\leq C_0\|\bar Lu\|_F,\ \forall u\in D(\bar L).\tag{3.13}$$

Corollaire 1.
L'opérateur L est à image fermée, et de plus on a :

$$\mathsf{R}(\bar L)=\overline{\mathsf{R}(L)}\ ^{(3)}$$

Définition 1.
On appelle solution forte du problème (1.1)-(1.5) toute fonction $u\in D(\bar L)$ telle que :

$$\bar Lu=f \text{ où } f\in F\,.$$

Alors, de l'estimation (3.13), on a le

Corollaire 2.
Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1 et si $\lambda(x)>\lambda_0$ [4], $\forall x\in\Omega$, alors pour tout second membre $f\in F$, la solution forte du problème (1.1.)-(1.5), si elle existe, est unique et dépend continûment de f.

---

(3) $\mathsf{R}(A)$ désigne l'ensemble image de l'opérateur A.

(4) λ_0 est la constante donnée dans la démonstration du théorème 1.

IV. EXISTENCE DE LA SOLUTION FORTE

D'après le Corollaire 1, on sait que : $\mathsf{R}(\bar{L}) = \overline{\mathsf{R}(L)}$.

Donc, pour démontrer l'existence d'une solution forte du problème (1.1.)-(1.5), il est nécessaire et suffisant d'établir la densité de $\mathsf{R}(L)$ dans F. Pour cela, on a besoin du

Lemme 1.

Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1 et si

1) $\Theta(x) > \left(\dfrac{\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2 T^2}{4}\right), \forall x \in \Omega$;

2) $\lambda(x) > \lambda_2 \ , \forall x \in \Omega$,

alors toute fonction $W \in L^2(Q_T)$ qui vérifie

$$\int_0^T \left(S^{-1}\mathsf{L}u, W\right)_\Omega = 0 \ , \forall u \in D(L) \tag{4.1}$$

est triviale.

Preuve.

On utilise une certaine classe d'opérateurs de régularisation. Soit J l'opérateur engendré par l'expression différentielle $(-\Delta)^m$ sur Ω et les conditions aux limites homogènes du type Dirichlet sur Γ, qui est un opérateur maximal accrétif (pour plus de détails concernant ces opérateurs on peut consulter [18,19]). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'opérateur $J_\varepsilon = I + \varepsilon J$ admet un inverse borné sur $L^2(\Omega)$ que l'on note J_ε^{-1}, et qui vérifie les propriétés de régularisation: si $h \in H^{3,0}(Q_T)$, alors $J_\varepsilon^{-1}h \in H^{3,2m}(Q_T)$ et de plus $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} J_\varepsilon^{-1} g = g$, $\forall g \in L^2(\Omega)$.

Posons $\vartheta = S^{-1}W$, et soit $u_\varepsilon = \int_0^t J_\varepsilon^{-1} h(\xi, x) d\xi$, où $h \in H^{2,0}(Q_T)$ telle que $h(0) = 0$, $h(T) = 0$; $u_\varepsilon \in D(L)$.

Alors en utilisant la relation (4.1) pour ces u_ε, le fait que J_ε^{-1} est auto-adjoint et par des intégrations par parties par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \cdot J_\varepsilon^{-1}\vartheta = &\sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \int_{Q_T} a_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial^\alpha J_\varepsilon^{-1} h}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^\beta \vartheta}{\partial x^\beta} \\ &+ \int_{Q_T} \Theta(x) \cdot J_\varepsilon^{-1} h \cdot \vartheta \\ &+ \sum_{|p|,|q| \le m} \int_{Q_T} b_{pq} \cdot \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\int_0^t J_\varepsilon^{-1} h(\xi) d\xi\right) \cdot \frac{\partial^q \vartheta}{\partial x^q} \\ &+ \int_{Q_T} \lambda(x)\left(\int_0^t J_\varepsilon^{-1} h(\xi) d\xi\right)\vartheta \end{aligned}\tag{4.2}$$

De là, il est aisé de voir que le second membre de (4.2) est une forme linéaire continue de $h \in L^2(Q_T)$, et par conséquent

$$\frac{\partial^2 J_\varepsilon^{-1}\vartheta}{\partial t^2} \in L^2(Q_T),$$

c'est-à-dire que $J_\varepsilon^{-1}\vartheta \in H^{2,0}(Q_T)$ et satisfait aux conditions :

$$J_\varepsilon^{-1}\vartheta(0) = 0 \ , \ J_\varepsilon^{-1}\vartheta(T) = 0 \, .$$

Donc, si on prend dans (4.2) $h = J_\varepsilon^{-1}\vartheta$, et on intègre le premier membre par rapport à t, on obtient :

$$\begin{aligned}-\int_{Q_T} \left(\frac{\partial J_\varepsilon^{-1}\vartheta}{\partial t}\right)^2 = &\sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \int_{Q_T} a_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial^\alpha J_\varepsilon^{-2}\vartheta}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^\beta \vartheta}{\partial x^\beta} \\ &+ \int_{Q_T} \Theta(x) \cdot J_\varepsilon^{-2}\vartheta \cdot \vartheta \\ &+ \sum_{|p|,|q| \le m} \int_{Q_T} b_{pq} \cdot \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\int_0^t J_\varepsilon^{-2}\vartheta(\xi) d\xi\right) \cdot \frac{\partial^q \vartheta}{\partial x^q} \\ &+ \int_{Q_T} \lambda(x)\left(\int_0^t J_\varepsilon^{-2}\vartheta(\xi) d\xi\right)\vartheta \end{aligned}\tag{4.3}$$

On sait que pour tout $v \in L^2(0,T\,; H_0^m(\Omega))$ (inégalité (A.3), appendice A) on a :

$$\int_{Q_T} \left| a_{\alpha\beta} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(J_\varepsilon^{-2}v - v)\right|^2 \le C_{\alpha\beta} \int_{Q_T} \left|S(J_\varepsilon^{-2}v - v)\right|^2, \tag{4.4}$$

pour tout $\alpha, \beta, |\alpha| \le m, |\beta| \le m,$ où $C_{\alpha\beta}$ est une constante indépendante de v ; aussi

$$\int_{Q_T} \left| b_{pq} \frac{\partial^p}{\partial x^p}(J_\varepsilon^{-2}v - v)\right|^2 \le C_{pq} \int_{Q_T} \left|S(J_\varepsilon^{-2}v - v)\right|^2, \tag{4.5}$$

pour tout $p, q, |p| \le m, |q| \le m,$ où C_{pq} est une constante indépendante de v.

Donc, par passage à la limite dans (4.3) et en effectuant des intégrations par parties dans les troisième et quatrième termes du second membre, on aura :

$$\begin{aligned}-\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\int_{Q_T} \left(\frac{\partial J_\varepsilon^{-1}\vartheta}{\partial t}\right)^2 = &\sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \int_{Q_T} a_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial^\alpha \vartheta}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^\beta \vartheta}{\partial x^\beta} + \int_{Q_T} \Theta(x) \cdot \vartheta^2 \\ &-\frac{1}{2} \sum_{|p|,|q| \le m} \int_{Q_T} \frac{\partial b_{pq}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\int_0^t \vartheta(\xi) d\xi\right) \cdot \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left(\int_0^t \vartheta(\xi) d\xi\right) \\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega \lambda(x)\left(\int_0^T \vartheta(\xi) d\xi\right)^2 \\ &+\frac{1}{2} \sum_{|p|,|q| \le m} \int_\Omega b_{pq}(T) \cdot \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\int_0^T \vartheta(\xi) d\xi\right) \cdot \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left(\int_0^T \vartheta(\xi) d\xi\right). \end{aligned}\tag{4.6}$$

On estime le second membre de (4.6) en utilisant les inégalités (1.6), (1.8), (1.9); on obtient alors

$$\begin{aligned}-\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\int_{Q_T} \left(\frac{\partial J_\varepsilon^{-1}\vartheta}{\partial t}\right)^2 \ge &\gamma_1 \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^\alpha \vartheta}{\partial x^\alpha}\right\|_{Q_T}^2 \\ &+\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(\int_0^t \vartheta(\xi) d\xi\right)\right\|_{Q_T}^2 + \frac{\gamma_2}{2} \sum_{|\alpha| \le m} \left\|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(\int_0^T \vartheta(\xi) d\xi\right)\right\|_\Omega^2 \\ &+\int_{Q_T} \left(\Theta(x) - \lambda_1 - \frac{\tilde{\lambda}_2 T^2}{4}\right)\vartheta^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\lambda(x) - \lambda_2\right)\left(\int_0^T \vartheta(\xi) d\xi\right)^2. \end{aligned}$$

Mais par hypothèse on sait que :

$$\Theta(x)-\lambda_1-\frac{\tilde{\lambda}_2 T^2}{4}>0 \text{ et } \lambda(x)-\lambda_2>0\,,\ \forall x\in\Omega\,;$$

d'où on déduit que $\vartheta=0$ et par conséquent $W=0$. ■

Alors du Lemme précédent découle immédiatement le

Théorème 2.

Sous les mêmes hypothèses que le Lemme 1, l'ensemble image $\mathrm{R}(L)$ de l'opérateur L est dense dans F:

$$\overline{\mathrm{R}(L)}=F.$$

Preuve.

Puisque F est un espace de Hilbert, donc d'après le Théorème de Hanh-Banach, la densité de $\mathrm{R}(L)$ dans F équivaut à démontrer que $\mathrm{R}(L)^{\perp}=\{0\}$, c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que si $f\in F$ tel que :

$$(u\,,f)_F=0\ ,\forall u\in D(L)\quad\text{alors}\quad f=0. \tag{4.8}$$

puisque :

$$(\mathrm{L}u\,,f)_F=\int_0^T\left(S^{-1}\mathrm{L}u\,,S^{-1}f\right)_{\Omega}\quad,\forall u\in D(L).$$

Donc, d'après le Lemme 1, la relation (4.8) donne alors $S^{-1}f=0\ \Rightarrow\ f=0$. ■

Notons par : $\quad\Theta_0=\lambda_1+\dfrac{\tilde{\lambda}_2 T^2}{4}.$

Les Théorèmes 1 et 2 se résument au

Théorème 3 (existence et unicité)

Sous les hypothèses (HA), (HB), (HE) et si

1) $\lambda(x)>\lambda_0\,,\forall x\in\Omega\,;$

2) $\Theta(x)>\Theta_0\,,\forall x\in\Omega\,,$

alors pour tout second membre $f\in F$, il existe une unique solution forte du problème (1.1)-(1.5).

Preuve.

L'unicité découle directement du Théorème 1, plus exactement de l'inégalité (3.13). Par contre, l'existence est garantie par le Théorème 2 et le Corollaire 1. ■

V. APPENDICE A

Pour un ouvert borné Ω de R^n, de frontière Γ assez régulière (par exemple C^{2m}), on prend

$$\mathbf{V}=H_0^m(\Omega)\ \to\mathbf{H}=L^2(\Omega)\ \text{ (injection continue);}$$

et considérons dans **V** la forme bilinéaire symétrique définie par

$$a(u,v)=\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega}\frac{m!}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^{\alpha}v}{\partial x^{\alpha}}\ ^{(5)} \tag{A.1}$$

qui vérifie :

a) Il existe $\gamma_0>0$ telle que

$$|a(u,v)|\le\gamma_0\|u\|_{m,\Omega}\|v\|_{m,\Omega}\,,\ \forall u,v\in H_0^m(\Omega), \tag{A.2}$$

où $\quad\gamma_0=\max\limits_{|\alpha|=m}\dfrac{m!}{\alpha!}.$

b) De l'égalité élémentaire

$$(\lambda_1+\lambda_2+......+\lambda_n)^m=\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}...\lambda_n^{\alpha_n}\ ,$$

on déduit que

$$\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\xi^{2\alpha}=|\xi|^{2m}\ ,\forall\xi\in R^n\ ,$$

c'est-à-dire que la forme quadratique $a(u,u)$, associée à la forme bilinéaire $a(u,v)$, est uniformément elliptique et de plus, puisque $a(.,.)$ est à coefficients constants, alors, en vertu de l'inégalité de Garding [13], il existe une constante $C>0$ telle que

$$a(u,u)\ge C\|u\|_{m,\Omega}^2\ ,\forall u\in H_0^m(\Omega). \tag{A.3}$$

Sachant que $V\to H$ donc, de a) et b), l'opérateur A associé à la forme bilinéaire symétrique $a(u,v)$ est auto-adjoint, régulièrement accrétif, et il est donné formellement par

$$A\equiv\sum_{|\alpha|=m}(-1)^m\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{m!}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right)=(-\Delta)^m\,,$$

de domaine de définition $D(A)$ caractérisé par

$u\in D(A)\Leftrightarrow u\in H_0^m(\Omega)\cap H^{2m}(\Omega)$ (résultat de régularité).

Théorème.

L'opérateur A associé à la forme bilinéaire symétrique $a(u,v)$ admet une racine carrée $A^{1/2}=S$ telle que

1) $D(S)=V$,

2) $a(u,v)=(Su,Sv)_{\Omega},\ \forall u,v\in V.$

De plus, cette racine carrée jouit des propriétés suivantes :

Propriété P1 : S est auto-adjoint et que pour tout opérateur $B\in\mathrm{L}(H)$ tel que $AB=BA$ *alors* $SB=BS$.

Propriété P2 : S^{-1} existe, et est borné et de plus, d'après les inégalités (A.2), (A.3), on a

$$C\left\|S^{-1}f\right\|_{m,\Omega}^2\le\|f\|_{\Omega}^2\le\gamma_0\left\|S^{-1}f\right\|_{m,\Omega}^2\ ,\ \forall f\in H.$$

Pour la preuve du théorème et plus de détails voir [19,20] (Ch7. spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space pp.218-271), [21] (Ch6. sur la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoint non bornés) et ainsi que [22-26].

VI. APPENDICE B

Prenons comme dual formel de l'opérateur L l'opérateur noté L^* défini formellement par

(5) Pour un multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$, on note par $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!.......\alpha_n!$.

$$\mathsf{L}^* v \equiv -\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + A(t)\frac{\partial u}{\partial t} - (B(t) - \tilde{A}(t))v - \lambda(x)v = f \quad sur \ Q_T \ ; \tag{B.1}$$

$$v(0,x) = 0 \quad sur \quad \Omega \ ; \tag{B.2}$$

$$v(T,x) = 0 \quad sur \quad \Omega \ ; \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial^2 v(T,x)}{\partial t^2} = 0 \quad sur \quad \Omega \ ; \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} = 0 \ , \ 0 \le j \le m-1 \ , \ sur \ \Sigma \ ^{(6)} \tag{B.5}$$

de domaine de définition $D(L^*)$ donné par

$$D(L^*) = \left\{ \begin{array}{c} v \in E / \dfrac{\partial^3 v}{\partial t^3} \in L^2(Q_T), \dfrac{\partial^{\alpha+k} v}{\partial x^\alpha \partial t^k} \in L^2(Q_T), |\alpha| \le 2m, k = 0,1, \\ v \text{ vérifie } (B\cdot 2) - (B\cdot 5) \end{array} \right\}.$$

De la définition de L^*, on sait que pour tout $u \in D(L)$ et tout $v \in D(L^*)$

$$(\mathsf{L} u, v)_\Omega = (u, \mathsf{L}^* v)_\Omega$$

Proposition.
L'opérateur L, défini ci-dessus, est fermable.

Avant de démontrer cette proposition, montrons d'abord un résultat de densité, qu'on utilisera par la suite.

Lemme.
$D(Q_T)$ est dense dans F.

Preuve.
D'après l'inégalité (A.3), on sait qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\left\| S^{-1} f \right\|_\Omega^2 \le C^{-1} \| f \|_\Omega^2 \quad , \forall f \in L^2(\Omega) ,$$

d'où

$$\| f \|_F^2 = \int_0^T \left\| S^{-1} f \right\|_\Omega^2 \le C^{-1} \| f \|_{Q_T}^2 \quad , \forall f \in L^2(Q_T) , \tag{B.6}$$

c'est-à-dire que $L^2(Q_T)$ s'injecte continûment dans F.

D'autre part, puisque $D(Q_T)$ est dense dans $L^2(Q_T)$ et d'après (B.6), $D(Q_T)$ serait dense dans $L^2(Q_T)$ pour la topologie induite de F; mais par hypothèse, $L^2(Q_T)$ est dense dans F, alors $D(Q_T)$ serait dense aussi dans F.

Démonstration de la proposition
Soit $\{u_n\}$ une suite de $D(L)$ telle que

$$\begin{cases} u_n \to 0 \quad \text{dans } E \\ \text{et} \\ L u_n \to y \quad \text{dans } F \end{cases}$$

Montrons que $y = 0$.

Soit $\varphi \in D(Q_T)$; alors

$$(y, \varphi)_F = \lim_{n \to +\infty} (L u_n, \varphi)_F = \lim_{n \to +\infty} \left(S^{-1} \mathsf{L} u_n, S^{-1} \varphi \right)_{Q_T} \tag{B.7}$$

Mais, puisque pour tout $n \in N$, on a

$$\left(S^{-1} \mathsf{L} u_n, S^{-1} \varphi \right)_{Q_T} = \left(\mathsf{L} u_n, S^{-2} \varphi \right)_{Q_T} \tag{B.8}$$

car S est auto-adjoint.

Notons aussi que, pour $\varphi \in D(Q_T)$, $S^{-2} \varphi \in D(L^*)$, alors le second membre de (B.8) devient

$$\left(\mathsf{L} u_n, S^{-2} \varphi \right)_{Q_T} = \left(u_n, \mathsf{L}^* S^{-2} \varphi \right)_{Q_T}$$

Alors de (B.7), on aura

$$(y, \varphi)_F = \lim_{n \to +\infty} \left(u_n, \mathsf{L}^* S^{-2} \varphi \right)_{Q_T} = 0 \ , \ \forall \varphi \in D(Q_T) \ ;$$

Ainsi, et en vertu du lemme précédent, $y = 0$ (c'est-à-dire que L est fermable) .

Remerciements
Les auteurs remercient le referee pour ses multiples remarques qui ont aidé à améliorer la rédaction de ce travail.

REFERENCES

[1]- Dainyak V.V. and Korzyuk V.I., "A Dirichlet-type problem for a third order linear differential equation", *Diff. Equa.*, Vol.23, N°5, (1987), pp.598-602.

[2]- Tsyvis N.V. and Yurchuk N.I., "A three-point boundary problem for third-order differential operational equations", *Diff. Equa.*, Vol.23, N°5, (1987), pp.606-609.

[3]- Gavrilova N.V. and Yurchuk N.I.: "Cauchy problem for Euler-Poisson-Darboux differential operational equations", *Diff. Equa.*, Vol.17, N°5, (1981), pp.516-520.

[4]- Yurchuk N.I., "Boundary-value problems for equations whose principal part contains operators of the form $d^{2m+1} dt^{2m+1} + A$", *Diff. Equa.*, Vol.10, N°4, (1974), pp.589-592.

[5]- Yurchuk N.I., "Boundary-value problems for equations involving operators of the form $d^{2m} dt^{2m} + A$", *Diff. Equa.*, Vol.10, N°5, (1974), pp.735-737.

[6]- Yurchuk N.I., "A priori estimates of solutions of Boundary-value problems for certain differential equations", *Diff. Equa.*, Vol.12, N°4, (1976), pp.512-518.

[7]- Yurchuk N.I., "Boundary-value problems for differential equations with operation-valued coefficients depending on a parameter", *Diff. Equa.*, Vol.12, N°9, (1976), pp.1157-1168.

[8]- Yurchuk N.I., "Solvability of boundary-value problems for certain differential equations", *Diff. Equa.*, Vol.13, N°4, (1977), pp.423-429.

[9]- Yurchuk N.I., "Boundary-value problems for differential equations with operator-valued coefficients depending on a parameter", *Diff. Equa.*, Vol.14, N°5, (1978), pp.609-617.

[10]- Yurchuk N.I., "The energy inequality method in the investigation of certain degenerate linear operational differential equations", *Diff. Equa.*, Vol.14, N°12, (1978), pp.1558-1567.

[11]- Yurchuk N.I., "Mixed problems for parabolic equations of variable order", *Soviet. Math. Dokl.*, Vol.26, N°1, (1982), pp.39-41.

[12]- Yurchuk N.I., "Mixed problems for linearized Korteweg–de-Vries equations degenerating in time into parabolic

(6) on note par : $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée relative à la normale ν à la surface latérale Σ du cylindre Q_T .

equations", *Soviet. Math. Dokl.*, Vol.33, N°2, (1986), pp.435-437.

[13]- Agmon S., "Lectures on elliptic boundary- value problems", D.Van-Nostrand Company (1965).

[14]- Petrovskey I.G., "Uber das Cauchyshe problem fûr ein system linearren partialler differential glienchungen in gebeit der nichtanalytischen funktioen", *Bull. D'état. Moscow* 1A N°7, (1938), pp.1-17.

[15]- Leray J., "Hyperbolic differential equations", Princeton (1952).

[16]- Gårding L., "Cauchy's problem for hyperbolic equations", Univ. of Chicago (1958).

[17]- Courant and Hilbert, "Methods of mathematical physics", ChVI. Vol. II.

[18]- Brezis H., Opérateurs maximaux monotones", Noth-Holland (1973).

[19]- Tanabe H., "Equation of evolution" (Ch2, pp.19-88) Monographs and studies in Mathematics 6 Pitman Pub. Lin. Transl (1975).

[20]- Lusternik L. and Sobolev V., "Elements of functional analysis", Hindustan. Pub. corporation (India) (1974).

[21]- Trenoguine V., "Analyse fonctionnelle", Ed. Mir. (1981).

[22]- Lions J.L., "Espaces d'interpolation et domaines des puissances fractionnaires d'opérateurs", *J. Math. Soc. Japan*, Vol.14, N°2, (1962), pp.233-241.

[23]- Kato T., "Fractional powers of dissipative operators", *J. Math. Soc. Japan*, Vol.13, N°3, (1961), pp.246-274.

[24]- Kato T., "Fractional powers of dissipative operators, II", *J. Math. Soc. Japan*, Vol.14, N°2, (1962), pp.242-248.

[25]- Krasnoselskii M.A., "Integral operators in spaces of summable functions", Nauka. Moscow, (1966), English transl. Noordhoff, (1975).

[26]- Krein S.G., "Linear differential equation in Banach space", Moscow-Nauka (1967), A. M. S 1972. □