Sciences & Technologie **A** – **N°20**, Décembre (2003), pp. 29-32.

EQUATION DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU POUR UNE PARTICULE DE SPIN 0 DANS UN POTENTIEL AHARONOV-BOHM COULOMBIEN A TROIS DIMENSIONS

Reçu le 28/07/2002 - Accepté le 18/12/2002

Résumé

Dans cet article, nous discutons le mouvement d'une particule de spin 0 décrite par l'équation Duffin Kemmer Petiau (DKP) et se déplaçant sous l'effet combiné de trois potentiels à trois dimensions : les potentiels Aharonov-Bohm et de Coulomb (ABC) sont analysés. En considérant d'abord le potentiel de Aharonov-Bohm (AB) seul et ensuite le potentiel de Coulomb (C), les spectres d'énergie ainsi que les fonctions d'onde ont été déterminés.

Mots clés*: potentiels de Aharonov Bohm et de Coulomb, spin 0, équation de Duffin Kemmer Petiau.*

Abstract

In this article, we study a spin 0 particle described by the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) equation and which is moving under a combination of three potentials in three dimensions: Aharonov-Bohm and Coulomb (ABC) are analyzed. First of all, we consider the Aharonov-Bohm potential (AB) alone and after the Coulomb potential (C), the energies spectrum and wave functions was determined.

Keywords*: Aharonov-Bohm and Coulomb potentials, spin 0, Duffin-Kemmer-Petiau equation.*

A. BOUMALI
Faculté des Sciences
Département de physique
Université Badji Mokhtar
BP 12 El hadjar, 23000
Annaba, Algérie

ملخص

نناقش ضمن هذا المقال حركة جسيم ذو اللف المعدوم كما تعرفه معادلة دوفين-كريمار-بيسيو والذي يتحرك تحت التأثير التوافقي لثالثة أنواع من الكمون الثلاثي البعد، كما تمت دراسة كمون آهانوف-باهم وكولون. وتم كذلك تحديد أطياف الطاقة ودالات الموجة باعتبار كمون آهانوف-باهم وحده ثم كمون كولون.

الكلمات المفتاحية: *كمون آهانوف-باهم وكولون، اللف المعدوم، معادلة دوفين-كريمار-بيسيو.*

Nous proposons dans ce travail de solutionner l'équation Duffin Kemmer Petiau (DKP), équation d'onde relativiste de premier ordre similaire à l'équation de Dirac, pour une particule de spin 0 se déplaçant sous l'effet combiné de trois potentiels Aharonov Bohm Coulomb, le potentiel de Coulomb étant le plus connu puisqu'il se rapporte aux problèmes de champs centraux [5]. Récemment, le mouvement d'une particule de spin 1/2 dans un potentiel Aharonov Bohm Coulomb à deux et trois dimensions a été étudié [4]. Dans le présent travail, nous reprenons l'étude mais cette fois-ci pour des particules de spin 0 se déplaçant dans un potentiel de Aharonov Bohm (AB) [1, 2, 4] et de Coulomb à trois dimensions en utilisant l'équation Duffin Kemmer Petiau (DKP) équivalente à l'équation de Klein Gordon (KG) [5,6]. Physiquement, le système Aharonov Bohm Coulomb peut être généré respectivement par un flux Φ et par des sources extérieures. Nous allons étudier ce problème, d'abord en considérant le potentiel AB seul, puis nous lui ajouterons le potentiel de Coulomb. Dans les deux cas, les coordonnées sphériques (r,θ,φ) ont été utilisées.

ASPECT THEORIQUE DE L'EQUATION DKP

L'équation DKP est la suivante [5] :

$$\left(i\beta^{\kappa}\partial_{\kappa} - \mu c^2\right)\psi = 0 \tag{1}$$

Dans le cas des bosons scalaires où vectoriels de masse μ, l'équation DKP relativiste libre s'écrit comme suit :

$$\left(c\beta\mathrm{p} + \mu c^2\right)\psi = i\hbar\beta^0 \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2}$$

où β^{κ} variables internes, avec $(\kappa = 0,1,2,3)$. Ici les matrices satisfont aux relations suivantes [5,6] :

$$\beta^{\kappa}\beta^{\nu}\beta^{\lambda} + \beta^{\lambda}\beta^{\nu}\beta^{\kappa} = g^{\kappa\nu}\beta^{\lambda} + g^{\nu\lambda}\beta^{\kappa} \tag{3}$$

où $g^{\kappa\nu}$ est le tenseur métrique de l'espace temps de Minkowski. Rappelons que les matrices β^{κ} ont deux représentations irréductibles non triviales: une de dimension 5 correspondant aux particules de spin 0; l'autre de dimension 10 correspondant aux particules de spin 1. Dans notre cas, nous nous limitons aux particules de spin 0 placées dans un potentiel Aharonov Bohm Coulomb. Les matrices β^{κ} ont la forme suivante [4] :

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} v & \tilde{0} \\ \bar{0}_T & 0 \end{pmatrix}; \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{0} & \rho^i \\ -\rho_T^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } i = 1,2,3 \tag{4}$$

où $\tilde{0}, \hat{0}$ et 0 sont des matrices nulles de dimensions 2×3, 2×2 et 3×3 et

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

L'état dynamique de système ψ est un spineur de dimension 5 qui s'écrit

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_{\text{upper}} \\ \mathrm{i}\,\psi_{\text{lower}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dont

$$\psi_{upper} \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi_{lower} \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Pour une particule de spin 0 qui interagit avec un potentiel Aharonov Bohm Coulomb à trois dimensions, l'équation (1) se généralise comme suit

$$\left(c\beta\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{AB} \right) + \mu c^2 \right)\psi = \beta^0 (E - qV)\psi \tag{8}$$

où **AB** et V avec $V = \frac{qk}{r}$ sont respectivement le potentiel Aharonov Bohm et le potentiel Coulombien supposé attractif. En utilisant les définitions des matrices β, l'équation (8) se réduit à un système d'équation comme suit

$$\begin{cases} \mu c^2\phi - M(iA_1) - N(iA_2) - K(iA_3) = (E - qV)\varphi \\ \mu c^2\varphi = (E - qV)\varphi \\ M\phi + \mu c^2 (iA_1) = 0 \\ N\phi + \mu c^2 (iA_2) = 0 \\ K\phi + \mu c^2 (iA_3) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

avec M, N et K définies par les relations suivantes

$$M = c\left(p_x - \frac{q}{c} AB_x \right)$$
$$N = c\left(p_y - \frac{q}{c} AB_y \right) \tag{10}$$
$$K = c\left(p_z - \frac{q}{c} AB_z \right)$$

Un calcul simple donne une équation différentielle pour la composante ϕ comme suit

$$\left(c^2 \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{AB} \right)^2 - \left((E - qV)^2 - (\mu c^2)^2 \right) \right)\phi = 0 \tag{11}$$

SOLUTION DE L'EQUATION DKP

Particule de spin 0 dans un potentiel Aharonov Bohm

Annulant le potentiel Coulombien V et posant dans l'eq. (11) $p' = p - \frac{q}{c} AB$, on a donc

$$\left(c^2 (\mathbf{p}')^2 - \left(E^2 - \mu^2 c^4 \right) \right)\phi = 0 \tag{12}$$

La particule se trouve dans un champ de vecteur potentiel d'un solénoïde long et infini de flux magnétique $\Phi = m_0 \Phi_0$, avec $\Phi_0 = \frac{hc}{q}$. Nous utilisons ici les coordonnées sphériques en supposant que l'axe (OZ) est l'axe du solénoïde. Le potentiel vecteur s'écrit

$$\begin{cases} A_r = 0 \\ A_\theta = 0 \\ A_\varphi = \dfrac{\Phi}{2\pi r \sin\theta} \end{cases} \tag{13}$$

Dans cette jauge, l'équation (12) a la forme

$$\left(-\hbar^2 c^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} \right) + c^2 \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} - \left(E^2 - \mu^2 c^4 \right) \right)\phi = 0 \tag{14}$$

avec $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{AB} \right)$. La composante de **L** suivant (OZ) a la forme

$$L_z = -i\hbar\left(\frac{d}{d\varphi} - im_0 \right) \tag{15}$$

Les relations de commutations standard du moment cinétique angulaire de la particule obéissent à la relation bien connue

$$\left[L_i, L_j \right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k$$

Cette dernière reste valable dans la région doublement connexe (symétrie sphérique) $\theta \neq 0, \pi$ où la particule ne peut toucher ou pénétrer la zone où règne un champ magnétique. Dans le cas où les conditions aux bords $\theta = 0, \pi$ s'imposent, c'est à dire

$$\psi(r, \theta, \varphi)_{\theta = 0,\pi} = 0 \tag{16}$$

la particule est confinée dans la région où le champ est nul. Les relations de commutation changent et prennent la forme suivante [1,3]

$$\begin{cases} L_z \chi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = \lambda\hbar \chi_{l\lambda}(\theta, \varphi) \\ L^2 \chi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 \chi_{l\lambda}(\theta, \varphi) \end{cases} \tag{17}$$

avec $\lambda = m - m_0$ et $l = |\lambda| + k$. Les fonctions $\chi_{l\lambda}(\theta, \varphi)$ sont les fonctions d'onde normalisées des opérateurs L_z et L^2 : la symétrie sphérique est brisée et l'espace d'Hilbert total S des états dynamiques est subdivisé en deux sous espaces S_+ et S_-. Chaque sous espace est décrit par une fonction d'onde normalisée $\chi_{l_1\lambda_1}(\theta, \varphi)$, $\chi_{l_2\lambda_2}(\theta, \varphi)$ et la particule contourne la zone du champ sans la pénétrer [1]. Cette situation est due à la condition sur la fonction d'onde décrite dans l'équation (16) qui interdit à la particule de traverser la zone du champ. D'après l'équation (17), les valeurs propres de L^2 et L_z ont une dépendance avec le flux Φ [1,3] qui est négligeable dans le cas où l'on ne respecte pas la condition (16). Donc, l'influence du potentiel Aharonov Bohm ne sera pas d'une importance quelconque. Chun [1] a globalisé ces relations et a remplacé les relations standards par

$$\mathbf{L} \wedge \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L} + iq\hbar\mathbf{r}(\mathbf{rB}) \tag{18}$$

où le module du champ magnétique obéit à la relation suivante

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{\pi r^2}\delta\left(\cos^2\theta - 1\right)\mathbf{u}_z \tag{19}$$

Adoptant l'approche de Chun [1], l'équation (14) s'écrit alors

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{d}{d\varphi} - im_0\right)^2\right)\right]\phi = -\frac{E^2 - \mu^2c^4}{\hbar^2c^2}\phi \tag{20}$$

Cette équation a une solution radiale et angulaire, et on écrit

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Omega(\varphi) \tag{21}$$

Pour la partie radiale, l'équation est alors

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{E^2 - \mu^2c^4}{\hbar^2c^2}\right)R(r) = 0 \tag{22}$$

Posant que

$$\xi = \kappa r$$
$$\kappa^2 = \frac{E^2 - \mu^2c^4}{\hbar^2c^2} \tag{23}$$

L'équation (22) devient

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d}{d\xi} + 1 - \frac{l(l+1)}{\xi^2}\right)R(\xi) = 0 \tag{24}$$

L'équation (24) a comme solution une fonction de Bessel qui s'écrit

$$R(r) = N\, j_l(\kappa r) \tag{25}$$

où $j_l(\xi) = (-1)^l\left(\frac{d}{d\xi}\right)^l\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)$. Les fonctions $j_l(\xi)$ sont les fonctions de Bessel sphériques et N est la constante de normalisation. Pour la solution angulaire $\chi_{l\lambda}(\theta,\varphi)$, les fonctions d'onde normalisées ont la forme suivante [1,3]

$$\chi_{l\lambda}(\theta,\varphi) = c_{l\lambda}P_l^{-|\lambda|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{26}$$

où $P_l^{|\lambda|}(\cos\theta)$ est le polynôme de Legendre. La constante de normalisation s'écrit

$$c_{l\lambda} = e^{\left(\frac{i\pi}{2}\lambda + \frac{i\pi}{2}|\lambda|\right)}\left\{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\Gamma(l+|\lambda|+1)}{\Gamma(l-|\lambda|+1)}\right\}^{1/2} \tag{27}$$

Si l'on considère le cas où λ est positif où négatif [1,3], on aura alors deux solutions différentes correspondant aux deux sous espaces S_+ et S_- de l'espace d'Hilbert total S. En conséquence, on obtient deux solutions radiales (25) différentes suivant les deux constantes l et λ. Suivant cette distinction, on a donc

* Pour le sous espace S_+ où $\lambda_1 = m - m_0 \geq 0$ et $l_1 = \lambda_1 + k$, la composante ϕ est

$$\phi_{l_1\lambda_1}(r,\theta,\varphi) = Nc_{l_1\lambda_1}P_{l_1}^{-|\lambda_1|}(\cos\theta)e^{im\varphi}j_{l_1}(\kappa r) \tag{28}$$

Le spineur total est alors

$$\psi_{l_1\lambda_1}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{E}{\mu c^2} \\ -\frac{i}{\mu c}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{AB}\right) \end{pmatrix}\phi_{l_1\lambda_1}(r,\theta,\varphi) \tag{29}$$

* Pour le sous espace S_- où $\lambda_2 = m - m_0 \leq 0$ et $l_2 = -\lambda_2 + k$, la composante ϕ est

$$\phi_{l_2\lambda_2}(r,\theta,\varphi) = Nc_{l_2\lambda_2}P_{l_2}^{-|\lambda_2|}(\cos\theta)e^{im\varphi}j_{l_2}(\kappa r) \tag{30}$$

Le spineur total est alors

$$\psi_{l_2\lambda_2}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{E}{\mu c^2} \\ -\frac{i}{\mu c}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{AB}\right) \end{pmatrix}\phi_{l_2\lambda_2}(r,\theta,\varphi) \tag{31}$$

Pour les deux cas, l'énergie total sera alors

$$E = \pm\sqrt{(\hbar c\kappa)^2 + \mu^2c^4} \tag{32}$$

Cette dernière a la forme de l'énergie d'une particule relativiste se mouvant librement, et la constante κ est alors $\kappa = \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2$, en la comparant avec la relation connue $E^2 = c^2p^2 + \mu^2c^4$.

Particule de spin 0 dans un potentiel Aharonov Bohm Coulombien

D'après l'équation (11), l'équation de la partie radiale est

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1) - \left(\frac{qk}{\hbar c}\right)^2}{r^2} + \frac{E^2 - \mu^2c^4}{\hbar^2c^2} - \frac{2qE}{\hbar^2c^2}\frac{1}{r}\right)R(r) = 0 \tag{33}$$

où la composante ϕ a la forme de l'équation (21). Introduisant les variables suivantes

$$\begin{cases} \rho = \xi r \\ \xi^2 = \dfrac{4\left(\mu^2c^4 - E^2\right)}{\hbar^2c^2} \\ \gamma = \dfrac{qk}{\hbar c} \\ \varsigma = \dfrac{2E\gamma}{\hbar c\xi} \end{cases} \tag{34}$$

L'équation (33) devient donc

$$\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{l(l+1) - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} - \frac{\varsigma}{\rho}\right)R(r) = 0 \tag{35}$$

Soit la nouvelle variable $R(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s u(\rho)$; l'équation différentielle (35) devient alors

$$\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2}+\left(-1+\frac{2(s+1)}{\rho}\right)\frac{du(\rho)}{d\rho}-\left(\frac{s+\varsigma}{\rho}\right)u(\rho)=0 \quad (36)$$

Multipliant cette équation par ρ; on a alors l'équation finale

$$\rho\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2}+\frac{du(\rho)}{d\rho}(2(s+1)-\rho)-(s+\varsigma)u(\rho)=0 \quad (37)$$

La constante s vérifiée la relation

$$s(s-1)=l(l+1)-\gamma^2 \quad (38)$$

donc

$$s=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2} \quad (39)$$

La solution de l'équation (40) est

$$u(\rho)=NF(s+\varsigma;2(s+1);\rho) \quad (40)$$

où $F(s+\varsigma;2(s+1);\rho)$ est la fonction hypergéométrique [7]. Afin que la partie $R(\rho)$ ait une limite finie lorsque $\rho\to\infty$, il faut que la fonction $u(\rho)$ soit une série à termes finis et on écrit dans ce cas que

$$s+\varsigma=-n \quad (41)$$

avec n entier non négatif. La constante s sera choisie d'après la condition

$$s=\frac{1}{2}-\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2} \quad (42)$$

On obtient donc le spectre d'énergie quantifié suivant

$$E_{nm}=\frac{\mu c^2}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\left(n+\frac{1}{2}-\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2}\right)^2}}} \quad (43)$$

Si on considère les relations de commutations standard où l sont indépendants du flux magnétique, l'équation (43) donne une expression de l'énergie du potentiel Coulombien seul. L'équation (43) se réécrit d'une autre façon comme suit

$$E_{nm}=\frac{\mu c^2}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\left(n+\frac{1}{2}-\sqrt{\left((|m-m_0|+k)+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2}\right)^2}}} \quad (44)$$

La solution de la partie radiale est alors

$$R_n(r)=Ne^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s F(-n;2(s+1);\rho) \quad (45)$$

Pour la solution angulaire on a, comme dans le cas du potentiel Aharonov Bohm, le résultat suivant

* Pour le sous espace S_+ où $\lambda_1=m-m_0\geq 0$ et $l_1=\lambda_1+k$, la composante ϕ est donc

$$\phi_{nl_1\lambda_1}(r,\theta,\varphi)= Nc_{l_1\lambda_1}P_{l_1}^{-|\lambda_1|}(\cos\theta)\rho^s e^{-\frac{\rho}{2}}F(-n;2(s+1);\rho)e^{im\varphi} \quad (46)$$

Le spineur total est alors

$$\psi_{nl_1\lambda_1}(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}1\\ \frac{E}{\mu c^2}\\ -\frac{i}{\mu c}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{AB}\right)\end{pmatrix}\phi_{nl_1\lambda_1}(r,\theta,\varphi) \quad (47)$$

* pour le sous espace S_- où $\lambda_2=m-m_0\leq 0$ et $l_2=-\lambda_2+k$, la composante ϕ est donc

$$\phi_{nl_2\lambda_2}(r,\theta,\varphi)= Nc_{l_2\lambda_2}\rho^s e^{-\frac{\rho}{2}}F(-n;2(s+1);\rho)P_{l_2}^{-|\lambda_2|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \quad (48)$$

Le spineur total est alors

$$\psi_{nl_2\lambda_2}(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}1\\ \frac{E}{\mu c^2}\\ -\frac{i}{\mu c}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{AB}\right)\end{pmatrix}\phi_{nl_2\lambda_2}(r,\theta,\varphi) \quad (49)$$

Pour les deux cas, l'énergie total est décrite par l'équation (44).

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons étudié l'équation DKP pour une particule de spin 0 dans un potentiel Aharonov Bohm Coulombien à trois dimensions. Le spineur de l'état dynamique a été bien déterminé. L'analyse des spectres d'énergie ainsi que sa dépendance avec l'intensité du flux magnétique induit par le potentiel AB ont donné les résultats suivants :

- Dans le cas du potentiel AB, les énergies sont celles d'une particule relativiste libre.
- Dans le cas combiné (Aharonov Bohm Coulomb), les énergies sont quantifiées et dépendent des paramètres du potentiel Aharonov Bohm et du potentiel Coulombien C.

REFERENCES

[1]- Chun-Fang Li, *Annals of Physics*, 252, 329-335 (1996).
[2]- Y. Aharonov et D. Bohm, *Phys. Rev.*, 115 (1959).
[3]- M. Kretzschmar, *Z. Phys.* 185 (1965).
[4]- Qiong-gui Lin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33 5049-5057 (2000).
[5]- Y. Nedjadi et R.C. Barret, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 4301-4318 (1994).
[6]- J.T. Lunardi, B.M. Pimental, R. G. Teixeira et J.S. Valverde, *hep-th* /9911254.
[7]- A.S. Davydov, "Quantum Mechanics", *Pergamon Press* (1976). ☐