Sciences & Technologie A – N°20, Décembre (2003), pp. 33-38.

SUR LA L-PSEUDO- SOLUTION D'UN PROBLEME MAL POSE

Reçu le 27/02/2002 – Accepté le 18/05/2003

Résumé

Dans ce travail, nous considérons une équation à opérateur $Ax = u$ où A est linéaire, défini sur un espace de Hilbert, à inverse non continu et à second membre u n'appartenant pas à l'image. Evidemment, la solution au sens classique n'existe pas et l'écriture $A^{-1}u$ n'a pas de sens.

Pour résoudre ce problème que posent de nombreux domaines des sciences expérimentales, le second membre u étant souvent le résultat de mesures, nous proposons une procédure récurrente qui converge presque sûrement et en moyenne quadratique vers la L-pseudo-solution, et pour laquelle nous construisons un domaine de confiance.

***Mot clés**: Equation à opérateur, problème mal posé, quasi-solution, L-pseudo-solution, inégalités exponentielles, domaine de confiance, convergence presque sûre, convergence en moyenne quadratique.*

Abstract

In this work, we consider a linear equation $Ax = u$ with an operator A defined in a Hilbert space with a non-continuous inverse and whose second member u does not belong to the image. Obviously, a classical solution does not exist and $A^{-1}u$ does not make any sense.

To solve this problem encountered in many experimental fields of science, where the second member u is the result of measurements, we propose a recurrent procedure which converges almost surely and in the quadratic mean to the L-pseudo-solution and for which we build up a confident field.

***Key words**: Operator equation, Ill-posed problem, quasi-solution, L-pseudo-solution, exponential equalities, confident field, almost surely convergence, mean square convergence,*

Classification: AMS 65J10 ; 47A50.

A. DAHMANI
F. BOUHMILA
A. AIT SAIDI
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université A. Mira
06000 Béjaia, Algérie

ملخص

في هذه المقالة, نعتبر معادلة ذات مؤشر $Ax = u$ حيث A خطي معرف في فضاء Hilbert وذو مؤشر عكسي غير مستمر و الطرف الثاني للمعادلة لا ينتمي إلى الصورة. بالطبع الحل بالمفهوم الكلاسيكي لا يوجد و الكتابة A^{-1} تفقد معناها.

لحل هذه المشكلة التي تطرحها العلوم التجريبية أين نعتبر الطرف الثاني غالبا كنتيجة تجربة, نقترح مسار متراجع متقارب من L-شبه حل معادلة ذات مؤشر للذي ننشئ ميدان الثقة.

***الكلمات المفتاحية:** معادلة ذات مؤشر, مشكلة سيئة الطرح, L-شبه حل, متراجحات أسية, ميدان الثقة, تقارب شبه تام, تقارب المعدل التربيعي.*

1- POSITION DU PROBLEME

Soient E, F et G trois espaces de Hilbert, A un opérateur linéaire borné de E dans F à image ImA non fermée dans F et à noyau ker$A$ réduit à $\{0\}$ dans E. Soit L un opérateur linéaire bijectif et borné de E dans G.

Notons l'opérateur $B=AL^{-1}$. Sans nuire à la généralité, nous supposons que $\|B\| \leq 1$.

Considérons l'équation à opérateur

$$Ax = u \tag{1.1}$$

où $u \in F$ et x est l'inconnue recherchée dans E.

Pour situer ce problème dans le cadre des mathématiques appliquées, nous supposons que le second membre de l'équation (1.1) est le résultat de mesures et n'est donc connu qu'approximativement [2,3] et que A^{-1} n'est pas borné sur ImA, ce qui est le cas lorsque A est un opérateur compact. Ce type de problème est appelé problème essentiellement mal posé [7].

Ainsi, en effectuant une série de n expériences indépendantes, on obtient un échantillon $\{u_1, u_2,..., u_n\}$ de taille n.

Pour simuler le processus d'apparition d'erreurs, posons

$$u_n = u_{ex} + \xi_i \ , i = 1,2,\ldots,n \tag{1.2}$$

avec u_{ex} représentant une valeur de référence inconnue et appartenant à ImA et (ξ_i) une suite d'éléments aléatoires indépendants, de même loi de probabilité et vérifiant la condition de Cramer:

$$E\|\xi_i\|^m \leq \frac{m!}{2} E\|\xi_1\|^2 H^{m-2}, \ m \in N, m \geq 2, \tag{1.3}$$

H étant une constante positive et E l'espérance mathématique.

Ceci étant, il est naturel de considérer la moyenne empirique $\bar{u}$ comme valeur approchée du second membre de l'équation (1.1) et le problème revient à considérer l'équation

$$Ax = \bar{u} \tag{1.4}$$

Dans ce travail, nous proposons une méthode stochastique de recherche de solution approchée et stable au problème (1.4).

2. PRELIMINAIRES

Quasi-solution [4]

Soit M une partie non vide de E. On appelle quasi-solution sur M de l'équation (1.4), lorsque elle existe, tout élément x_* de M vérifiant

$$\left\|Ax_* - \bar{u}\right\| = \inf_{x\in M}\left\|Ax - \bar{u}\right\|. \tag{2.1}$$

Nous noterons l'ensemble des quasi-solutions sur M par $Q_{\bar{u}}$, c'est à dire

$$Q_{\bar{u}} = \left\langle x_* \in E : \left\|Ax_* - \bar{u}\right\| = \inf_{x\in M}\left\|Ax - \bar{u}\right\|\right\rangle. \tag{2.2}$$

Remarque

Si M est compact, la quasi-solution existe pour tout $u \in E$ [7]. Si en outre $\bar{u} \in AM$, il existe une unique quasi-solution et elle coïncide avec la solution exacte de l'équation (1.4).

Proposition

Si l'ensemble M est convexe, alors l'ensemble $Q_{\bar{u}}$ des quasi-solutions est convexe.

Démonstration

La fonctionnelle $x \in M \mapsto \left\|Ax - u\right\|$ étant convexe, son ensemble des minimisants est convexe.

L-Pseudo-solution [1,5]

On appelle L-pseudo-solution de l'équation (1,4) toute quasi-solution dont l'image par L dans G est de norme minimale. Autrement dit si $\bar{x}_*$ est une L-pseudo-solution, alors

$$\left\|L\bar{x}_*\right\| = \inf_{x_*\in Q_{\bar{u}}}\left\|Lx_*\right\|. \tag{2.3}$$

Théorème 1

Soit P le projecteur orthogonal sur $\overline{\operatorname{Im} A}$; si $P\bar{u} \in \operatorname{Im} A$, alors

$$Q_{\bar{u}} = \left\{x_* \in E : Ax_* = P\bar{u}\right\} \tag{2.4}$$

et la L-pseudo-solution sur une partie convexe M de E de l'équation (1.4) existe et est unique.

Démonstration

Comme $\bar{u} - P\bar{u}$ est orthogonal à $Ax - P\bar{u}$, nous avons

$$\left\|Ax - \bar{u}\right\|^2 = \left\|Ax - P\bar{u}\right\|^2 + \left\|\bar{u} - P\bar{u}\right\|^2. \tag{2.5}$$

Si x_* est une quasi-solution, alors elle vérifie la relation (2.1).

En appliquant (2.5) aux deux membres de (2.1), on obtient

$$Ax_* = P\bar{u}. \tag{2.6}$$

Inversement, si la relation (2.6) est vérifiée, alors

$$\left\|Ax_* - \bar{u}\right\|^2 = \left\|P\bar{u} - \bar{u}\right\|^2 = \inf_{x\in M}\left[\left\|Ax - P\bar{u}\right\|^2 + \left\|\bar{u} - P\bar{u}\right\|^2\right] = \inf_{x\in M}\left\|Ax - \bar{u}\right\|^2. \tag{2.7}$$

Par conséquent, x_* est une quasi-solution.

Montrons, maintenant, l'existence de la L-pseudo-solution.

Comme $Q_{\bar{u}}$ n'est pas vide, l'ensemble $\left\{\left\|Lx_*\right\|, x_* \in Q_{\bar{u}}\right\}$ n'est pas vide et est minoré dans R. Soit α sa borne inférieure.

La propriété caractéristique de la borne inférieure dans R donne

$$\forall n \in N^*,\ \exists x_{*n} \in Q_{\bar{u}} : \alpha \le \left\|Lx_{*n}\right\| < \alpha + \frac{1}{n}. \tag{2.8}$$

Remarquons que la suite $\left(\left\|Lx_{*n}\right\|\right)_n$ converge vers α.

L'identité du parallélogramme appliquée aux éléments $Lx_{*(n+p)}$ et Lx_{*n} puis à $Ax_{*(n+p)} - \bar{u}$ et $Ax_{*n} - \bar{u}$ donne pour tout entier naturel P

$$\left\|\frac{Lx_{*(n+p)} - Lx_{*n}}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left\|Lx_{*(n+p)}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|Lx_{*n}\right\|^2 - \left\|\frac{Lx_{*(n+p)} + Lx_{*n}}{2}\right\|^2 \tag{2.9}$$

et

$$\left\|A\left(\frac{x_{*(n+p)} - x_{*n}}{2}\right)\right\|^2 = \frac{1}{2}\left\|Ax_{*(n+p)} - \bar{u}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|Ax_{*n} - \bar{u}\right\|^2 - \left\|A\left(\frac{x_{*(n+p)} + x_{*n}}{2}\right) - \bar{u}\right\|^2. \tag{2.10}$$

Soit

$$\mu_A = \inf_{x\in M}\left\|Ax - \bar{u}\right\|. \tag{2.11}$$

Comme la suite $\left(x_{*n}\right)_n$ appartient à $Q_{\bar{u}}$, de (2.9) et (2.10) découlent les relations suivantes

$$\left\|\frac{Lx_{*(n+p)} - Lx_{*n}}{2}\right\|^2 \le \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}$$

et

$$\left\|A\left(\frac{x_{*(n+p)} - x_{*n}}{2}\right)\right\|^2 = \mu_A^2 - \left\|A\left(\frac{x_{*(n+p)} + x_{*n}}{2}\right) - \bar{u}\right\|^2 = 0. \tag{2.12}$$

Ce qui veut dire que la suite $\left(Lx_{*n}\right)_n$ (respectivement $\left(Ax_{*n}\right)_n$) est de Cauchy dans l'espace de Hilbert G

(respectivement dans F).

Soit

$$L\bar{x}_* = \lim_{n\to\infty} Lx_{*n}.$$

Comme

$$\left\|Ax_{*n} - \bar{u}\right\| = \inf_{x\in M}\left\|Ax - u\right\|,$$

par passage à la limite, puisque A est continu, nous avons

$$\left\|A\bar{x}_* - \bar{u}\right\| = \inf_{x\in M}\left\|Ax - \bar{u}\right\|.$$

Ce qui veut dire que $\bar{x}_*$ est une quasi-solution de l'équation $Ax = \bar{u}$.

D'autre part, par passage à la limite dans (2.8) on obtient

$$\left\|L\bar{x}_*\right\| = \alpha = \inf_{x_*\in Q_{\bar{u}}}\left\|Lx_*\right\|.$$

Donc $\bar{x}_*$ est une L-pseudo-solution.

L'unicité de la L-pseudo-solution résulte aussi de l'identité du parallélogramme et la convexité de l'ensemble $Q_{\bar{u}}$.

Pour la suite de ce travail, nous proposons la procédure récurrente suivante

$$Lx_{n+1} = Lx_n - B^*Ax_n + B^*\bar{u} + a_nB^*\xi_n \tag{2.13}$$

où B^* est l'opérateur adjoint de B et $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs, telle que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2.14}$$

Lemme 1

Si $P\bar{u} \in \operatorname{Im} A$ et si on pose $Lz_{n+1} = Lx_{n+1} - L\bar{x}_*$, alors la procédure (2.13) peut être réécrite sous la forme:

$$Lz_{n+1} = D^{n+1}Lz_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}D^kB^*\xi_{n-k} \tag{2.15}$$

où

$$D = I - B^*AL^{-1}. \tag{2.16}$$

Démonstration

En retranchant $L\bar{x}_*$ aux deux membres de l'égalité (2.13), tout en tenant compte de l'appartenance de $P\bar{u}$ à $\operatorname{Im} A$ et du théorème 1, on obtient

$$Lz_{n+1} = DLz_n + a_nB^*\xi_n. \tag{2.17}$$

En itérant cette relation, on obtient (2.15).

Lemme 2

Pour tout z dans G, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\left\|D^nz\right\| = 0. \tag{2.18}$$

Démonstration

Remarquons d'abord que l'opérateur D est borné dans G et montrons que

$$\left\|D\right\| < 1. \tag{2.19}$$

Pour ceci, raisonnons par l'absurde.

Soit $\alpha \geq 1$ tel que

$$\left\|D\right\| = \sup_{\|z\|=1}\left\|\left(I - B^*AL^{-1}\right)z\right\| = \alpha. \tag{2.20}$$

En utilisant la propriété caractéristique de la borne supérieure et en développant les calculs, on obtient $\left\|B\right\|^2 = 2$. Ce qui contredit l'hypothèse $\left\|B\right\| \leq 1$. Donc $\left\|D\right\| < 1$.

D'autre part, l'inégalité

$$\left\|D^n\right\| \leq \left\|D\right\|^n \tag{2.21}$$

donne

$$\lim_{n\to\infty}\left\|D^n\right\| = 0 \tag{2.22}$$

et comme $\forall n \in N$, D^n est un opérateur continu, alors

$$\forall z \in G,\ \left\|D^nz\right\| \leq \left\|D^n\right\|\left\|z\right\|. \tag{2.23}$$

Le passage à la limite donne le résultat.

Lemme 3

Si $(a_n)_n$ est une suite de nombres réels positifs convergente de limite 0, alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\left\|D\right\|^k = 0.$$

Démonstration

En vertu de la convergence de la suite $(a_n)_n$ et de la progression géométrique $\left(\left\|D\right\|^n\right)_n$ vers zéro et de la décomposition suivante

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\left\|D\right\|^k = \left\|D\right\|^n\sum_{k=0}^{N}\frac{a_k}{\left\|D\right\|^k} + \left\|D\right\|^n\sum_{k=N+1}^{n}\frac{a_k}{\left\|D\right\|^k},$$

nous obtenons le résultat.

Conséquence

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}^2\left\|D\right\|^{2k} = 0. \tag{2.24}$$

Lemme 4.

Il existe une suite de variables aléatoires $(\eta_k)_{k\in N}$ telles que

1) $E\eta_k = 0$

2) $E\left\|a_{n-k}D^kB^*\xi_{n-k}\right\|^m \leq E\eta_k^m$

3) $E\eta_k^m \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-2} E\left\|a_{n-k}D^kB^*\xi_{n-k}\right\|^m, \quad m \in N,\ m \geq 2$

(2.25)

Démonstration

Soit ζ une variable aléatoire discrète indépendante de ξ_n telle que:

$$\begin{aligned} P\{\zeta = z_1\} &= p \\ P\{\zeta = -z_2\} &= 1 - p \end{aligned} \tag{2.26}$$

où z_1 et z_2 sont deux valeurs positives.

Par ailleurs, nous supposons que la variable aléatoire ζ est telle que:

$$E\zeta = 0,\ E\zeta^2 = 1,\ E\zeta^3 = 1. \tag{2.27}$$

Il suffit alors de prendre

$$\eta_k = \zeta \left\| a_{n-k} D^k B^* \xi_{n-k} \right\|. \tag{2.28}$$

Corollaire.

$$E\cosh\left(t \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k B^* \xi_{n-k} \right\| \right) \le E\cosh\left(t \sum_{k=0}^{n} \eta_k \right). \tag{2.29}$$

Cette inégalité découle immédiatement du développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique.

3. INEGALITES EXPONENTIELLES

Dans ce paragraphe, nous établissons des inégalités exponentielles du type Bernstein-Fréchet qui vont nous permettre de construire un domaine de confiance pour la L-pseudo-solution de l'équation (1.4).

Théorème 2

Pour tout ε positif, on a

.

$$P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \ge \exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{16E\left\|\xi_1\right\|^2 \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}^2 \left\| D^k \right\|^2} \right) \tag{3.1}$$

Démonstration

D'après le lemme 1, on a

$$P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \le P\left\{ \left\| D^{n+1} z_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k B^* \xi_{n-k} \right\| > \varepsilon \right\}. \tag{3.2}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés des probabilités, on obtient

$$P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \le P\left\{ \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k B^* \xi_{n-k} \right\| > \varepsilon - \left\| D^{n+1} z_0 \right\| \right\}. \tag{3.3}$$

D'après le lemme 2, pour n assez grand, nous avons

$$\left\| D^{n+1} z_0 \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Par conséquent, pour n assez grand, on a

$$P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \le P\left\{ \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k B^* \xi_{n-k} \right\| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \tag{3.5}$$

L'inégalité de Chernoff donne

$$P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \le$$

$$2\exp\left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) E\cosh\left(t \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k B^* \xi_{n-k} \right\| \right) \tag{3.6}$$

Il résulte de l'indépendance des variables aléatoires η_k, $k = 0, \ldots, n$ et des relations (2.29) et (3.6)

$$P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \le \exp\left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \prod_{k=1}^{n} E\exp(t\eta_k). \tag{3.7}$$

En tenant compte de $E\eta_k = 0$ et du développement limité en 0 de la fonction exponentielle, on trouve

$$E\exp(t\eta_k) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{t^m E\eta_k^m}{m!}. \tag{3.8}$$

Par ailleurs

$$E\exp(t\eta_k) \le 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m-2} E\left\| a_{n-k} D^k B^* \xi_{n-k} \right\|^m. \tag{3.9}$$

En vertu des relations (1.3) et du lemme 4, on obtient

$$E\exp(t\eta_k) \le 1 + \frac{a_{n-k}^2 t^2 \left\| D^k \right\|^2 E\left\|\xi_1\right\|^2}{2} \times$$

$$\times \sum_{m=2}^{\infty} t^{m-2} a_{n-k}^{m-2} \left\| D^k \right\|^{m-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m-2} H^{m-2}. \tag{3.10}$$

En choisissant dans l'inégalité précédente

$$t \le \frac{1}{a_{n-k} \left\| D^k \right\| \left(1+\sqrt{5} \right) H} \tag{3.11}$$

on obtient

$$E\exp(t\eta_k) \le \exp\left(a_{n-k}^2 t^2 \left\| D^k \right\|^2 E\left\|\xi_1\right\|^2 \right). \tag{3.12}$$

Alors l'expression (3.7) s'écrit

$$P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \le \exp\left(\frac{-t\varepsilon}{2} + t^2 E\left\|\xi_1\right\|^2 \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}^2 \left\| D^k \right\|^2 \right). \tag{3.13}$$

Le second membre de l'inégalité précédente est minimal pour

$$t^* = \frac{\varepsilon}{4E\left\|\xi_1\right\|^2 \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}^2 \left\| D^k \right\|^2}. \tag{3.14}$$

En remplaçant dans (3.13) t par t^*, on obtient

$$P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \le \exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{16E\left\|\xi_1\right\|^2 \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}^2 \left\| D^k \right\|^2} \right). \tag{3.15}$$

Remarque

En vertu de l'inégalité (3.15), nous avons

$$P\left\{ \left\| x_{n+1} - \bar{x}_* \right\| > \varepsilon \right\} \le P\left\{ \left\| Lx_{n+1} - L\bar{x}_* \right\| > \varepsilon \left\| L^{-1} \right\|^{-1} \right\}$$

$$\le \exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{16E\left\|\xi_1\right\|^2 \left\| L^{-1} \right\|^2 \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}^2 \left\| D^k \right\|^2} \right) \tag{3.16}$$

Or, d'après (2.24), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{16E\|\xi_1\|^2\|L^{-1}\|^2\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}^2\|D^k\|^2}\right)=0 \qquad (3.17)$$

Donc, pour un seuil donné γ, il existe un entier naturel n_γ pour lequel nous avons

$$n\geq n_\gamma \Rightarrow \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{16E\|\xi_1\|^2\|L^{-1}\|^2\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}^2\|D^k\|^2}\right)\leq\gamma\ . \qquad (3.18)$$

Par conséquent,

$$P\left\{\left\|x_{n_\gamma+1}-\bar{x}*\right\|\leq\varepsilon\right\}\geq 1-\gamma \qquad (3.19)$$

ce qui veut dire que la L-pseudo-solution appartient à la boule fermée de centre $x_{n_\gamma+1}$ et de rayon ε avec une probabilité supérieure ou égale à 1- γ.

4. CONVERGENCES

Dans cette partie, nous étudions les deux modes essentiels de convergence de la procédure (2.13) vers $L\bar{x}*$.

Théorème 3

La procédure (2.13) converge presque sûrement et en moyenne quadratique vers $L\bar{x}*$.

Démonstration

La convergence presque sûrement découle du théorème 2. En effet, nous avons

$$P\left\{\left\|Lx_{n+1}-L\bar{x}*\right\|>\varepsilon\right\}\leq\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{16E\|\xi_1\|^2\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}^2\|D^k\|^2}\right). \qquad (4.1)$$

En appliquant la règle de Cauchy sur les séries à termes réels positifs à

$$u_n=\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{16E\|\xi_1\|^2\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}^2\|D^k\|^2}\right).$$

nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty}P\left\{\left\|Lx_n-L\bar{x}*\right\|>\varepsilon\right\}<+\infty, \qquad (4.2)$$

d'où le résultat.

Pour montrer la convergence en moyenne quadratique, on utilise la structure hilbertienne de G. Nous avons

$$\left\|D^{n+1}z_0+\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}D^kB^*\xi_{n-k}\right\|^2$$

$$=\left\|D^{n+1}z_0\right\|^2+2\left\langle D^{n+1}z_0, D^{n+1}z_0+\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}D^kB^*\xi_{n-j}\right\rangle+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\left\|a_{n-k}D^kB^*\xi_{n-k}\right\|^2+2\sum_{i\neq j}^{n}\left\langle a_{n-i}D^iB^*\xi_{n-i}, a_{n-j}D^jB^*\xi_{n-j}\right\rangle. \qquad (4.3)$$

En prenant l'espérance mathématique des deux membres de l'égalité précédente, tout en tenant compte de sa linéarité, vérifions que chaque terme du second membre tend vers 0.

En effet, le premier terme étant non aléatoire, d'après le lemme 2

$$\lim_{n\to+\infty}E\left\|D^{n+1}z_0\right\|^2=\lim_{n\to+\infty}\left\|D^{n+1}z_0\right\|^2=0. \qquad (4.4)$$

L'opérateur D^kB^* étant linéaire et $E\xi_k=0$,

$$E\left\langle D^{n+1}z_0, D^{n+1}z_0+\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}D^kB^*\xi_{n-k}\right\rangle=\left\|D^{n+1}z_0\right\|^2, \qquad (4.5)$$

qui tend vers zéro de part le lemme 2.

En utilisant l'inégalité de Cramer (1.3) pour m = 2 et (2.24), on obtient la convergence vers zéro du troisième terme du second membre de (4.3).

En vertu de l'inégalité de Hölder, le dernier terme vérifie

$$E\left\langle a_{n-i}D^iB^*\xi_{n-i}, a_{n-j}D^jB^*\xi_{n-j}\right\rangle$$

$$\leq\left(E\left\|a_{n-i}D^iB^*\xi_{n-i}\right\|^2\right)^{1/2}\left(E\left\|a_{n-j}D^jB^*\xi_{n-j}\right\|^2\right)^{1/2}. \qquad (4.6)$$

Comme

$$\left(E\left\|a_{n-i}D^iB^*\xi_{n-i}\right\|^2\right)^{1/2}\leq a_{n-i}\left\|D^i\right\|\left(E\left\|\xi_1^2\right\|^2\right)^{1/2}, \qquad (4.7)$$

en utilisant le lemme 3, on

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(E\left\|a_{n-i}D^iB^*\xi_{n-i}\right\|^2\right)^{1/2}=0. \qquad (4.8)$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\neq j}^{n}E\left\langle a_{n-i}D^iB^*\xi_{n-i}, a_{n-j}D^jB^*\xi_{n-j}\right\rangle=0. \qquad (4.9)$$

La convergence de l'espérance mathématique de chaque terme de (4.3) vers zéro et la relation (2.15) entraîne la convergence en moyenne quadratique de la procédure (2.13) vers $L\bar{x}*$.

Application

Soient L^2 ([-1,+1]) l'espace des (classes de) fonctions de carré intégrable et ℓ² l'espace des suites numériques $(c_n)_{n\in N}$ vérifiant la condition $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n^2<+\infty$.

Considérons l'équation de Fredholm de 1ère espèce

$$\int_{-1}^{+1}K(t,s)x(s)ds=u(t) \qquad (4.10)$$

où $K(.,.)$ est une fonction numérique continue dans le pavé $[-1,+1]^2$ telle que $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}|K(t,s)|^2dsdt\leq 1$ et $x(.)$ une fonction inconnue recherchée dans $L^2([-1,+1])$.

En posant

$$Ax(t)=\int_{-1}^{+1}K(t,s)x(s)ds\ ,$$

il est clair que A est un opérateur compact ; donc Im$A \neq$ $L^2([-1,+1])$ et A^{-1} n'est pas continu sur ImA [6,8].

D'autre part, on considère l'isomorphisme L

$$L:\quad L^2([-1,+1])\to \ell^2$$
$$x\mapsto (\alpha_0,\alpha_p,\beta_p)_{p\in N^*}$$

où α_0, α_p et β_p sont les coefficients de Fourier de la fonction x définis par

$$\alpha_p=\int_{-1}^{+1}x(t)\cos p\pi t dt,\qquad p\in N$$

$$\beta_p=\int_{-1}^{+1}x(t)\sin p\pi t dt,\qquad p\in N^*.$$

Supposons que le second membre de l'équation (4.10) est le résultat de n mesures, la ième s'écrivant

$$u_i(\mathrm{t})=\mathrm{u}_{ex}(t)+\xi_i(t),$$

avec u_{ex} représentant la valeur exacte, inconnue, du second membre de l'équation (4.10) et $\xi_i(t)$ un bruit blanc gaussien tel que

$$E\xi_i(t)=0\quad,\quad E\xi_i^2(t)=\sigma^2$$

et pour lequel la condition de Cramer (1.3) est vérifiée.

Ceci étant posé, l'équation (4.10) devient

$$Ax=\bar{u}\,. \tag{4.11}$$

où $\bar{u}$ est la moyenne arithmétique des n mesures observées.

Remarquons que si u n'est pas continue sur [-1,+1], l'équation (4.11) n'a pas de solution au sens classique car Ax est une fonction continue sur [-1,+1].

Cet exemple illustre parfaitement notre démarche.

Dans la procédure (2.13), notons que

$$AA^*x_n(t)=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}K(t,y)K(s,y)dy\right)x_n(s)ds,$$

et qu'il est suffisant de prendre $a_n=\frac{1}{n}$ et $x_1(t)$.

Remarque

Dans la pratique, pour simuler le processus d'apparition d'erreurs pendant les mesures, on utilise des programmes d'informatique de création d'échantillons artificiels.

REFERENCES

[1]- Arcangeli R., "Pseudo-solution de l'équation $Ax = y$", *Comptes Ren. Acad. Sci.*, V.263, N°8 (1966).

[2]- Bondarev B.V., Dahmani A., "Stochastic approximation in ill-posed problems with random errors", *Avtomat. i Telemekh*., N°5, (1990), pp.54-63; translation in Automat. Remote Control 51, N°5, part 1 (1990), pp. 615-623.

[3]- Fedotov M., "Problèmes linéaires mal posés avec des erreurs aléatoires dans les données", Naouka (1982) (en russe).

[4]- Ivanov V.K., "Sur les problèmes mal posés linéaires", Rapports de l'Académie des Sciences de l'URSS, T. 145, N°2, (1962), pp. 270-272 (en russe).

[5]- Morozov V.A., "Sur les pseudo-solutions", JVM et MPH, T.9, N°6, (1969), pp.1381-1392.

[6]- Rudin W., "Analyse fonctionnelle", Ediscience international (1995).

[7]- Tikhonov A., Arsenine V., "Méthodes de résolution de problèmes mal posés", Ed. Mir (1976).

[8]- Trenoguine V.A., "Analyse fonctionnelle", Ed. Mir (1985). ☐