Sciences & Technologie **A** – **N°20**, Décembre (2003), pp. 45-50.

# CALCUL DE PREVISION DE SATISFACTION DANS LE CAS GAUSSIEN

*Reçu le 15/06/2002 – Accepté le 05/10/2003*

**Résumé**

Le présent article propose les notions d'indice et de prévision de satisfaction relatifs à un test d'hypothèse pour certains protocoles d'essais cliniques en deux étapes dans le modèle Gaussien.

***Mots clés**: Essais cliniques, Indices de satisfaction, Méthodes prédictives.*

**Abstract**

The notions of satisfaction index and of prevision index adapted to some 2 steps protocols for clinical trials are presented in the gaussian model.

***Keywords**: Clinical Trials, Satisfaction index, Predictive methods.*

**H. MERABET**
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques
Appliquées et Modélisation
Faculté des Sciences, Université Mentouri
25000 Constantine, Algérie

**ملخص**

هذا البحث يقترح مفاهيم تنبيه و توقيع الرضا في مجال التحليل الإحصائي الخاص بالتجارب الطبية على مرحلتين المطبق على النموذج "القوسي".

***الكلمات المفتاحية:** التجارب الطبية، إشارة الرضا، الطرق التوقعية.*

## 1- PROBLEMATIQUE: INDICE ET PREVISION DE SATISFACTION

### 1.1- Le modèle

En [1], nous avons introduit, par référence à des contextes expérimentaux, la notion *d'indice de satisfaction* relatif à un test d'hypothèse, dans un cadre où un tel test peut être construit à l'aide d'une fonction de test raisonnable.

Précisons ce cadre.

Soit un modèle $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ et soit à tester l'hypothèse nulle $\Theta_0$ contre l'hypothèse alternative $\Theta_1$, définie à l'aide d'une application $\psi$ de $\Theta$ dans $\Re$ : on suppose qu'il existe un point $t_0$ tel que

$$\theta \in \Theta_0 \Leftrightarrow \psi(\theta) \leq t_0$$

Supposons par ailleurs qu'on dispose d'une application réelle $\xi$, définie sur l'ensemble des observations, telle que la loi de $\xi$ pour la valeur $\theta$ du paramètre ne dépende que de $\psi(\theta)$, et soit *stochastiquement croissante* avec $\psi(\theta)$ : plus $\psi(\theta)$ est élevé, plus $\xi$ a tendance à prendre de grandes valeurs, c'est-à-dire que

$$\psi(\theta_1) < \psi(\theta_2) \Rightarrow \forall t \quad P_{\theta_1}[\xi \leq t] \geq P_{\theta_2}[\xi \leq t]$$

Un test, au seuil $\alpha$, de $\Theta_0$ contre $\Theta_1 (= \{\theta,\ \psi(\theta) > t_0\})$ est alors naturellement défini en rejetant l'hypothèse si le résultat expérimental, soit $\underline{y}$, vérifie $\xi(\underline{y}) > g(\alpha)$, où $g(\alpha)$ est le $(1-\alpha)$ fractile de la loi de $\xi$ quand $\psi(\theta_0) = t_0$.

En effet, la région critique de ce test, $C$, est alors l'ensemble des observations $\underline{y}$ qui vérifient $\xi(\underline{y}) > g(\alpha)$, et on a bien, en raison de la croissance stochastique des lois de $\xi$, et pour tout $\theta_0$ vérifiant $\psi(\theta_0) = t_0$,

$$\forall \theta \in \Theta_0\ P_\theta(C) \leq P_{\theta_0}(C) \leq \alpha$$

De plus, si $\theta_1 \in \Theta_1$ et $\theta_2 \in \Theta_1$ avec $\psi(\theta_1) < \psi(\theta_2)$, il vient $P_{\theta_1}(C) \leq P_{\theta_2}(C)$, c'est-à-dire que la fonction puissance du test croît avec $\psi(\theta)$.

### 1.2- Indice de satisfaction

Cette notion trouve son origine dans des situations où le statisticien qui procède à un test "souhaite" détecter un effet significatif, c'est-à-dire rejeter l'hypothèse. Corrélativement, ce statisticien est d'autant plus satisfait que, en fonction du résultat expérimental, cet effet paraît plus significatif. C'est ce que les utilisateurs mettent souvent en évidence en donnant, à l'issue de la procédure de test, non seulement une conclusion "en tout ou rien" (significatif ou non significatif) mais aussi la plus petite valeur du seuil pour laquelle le résultat $\underline{y}$ obtenu serait considéré comme significatif; ceci est classiquement appelé la $p$ valeur, et est dans notre cas

$$p = P_{\theta_0}\,[\xi > \xi(\underline{y})].$$

Un indice de satisfaction, pour le test de seuil $\alpha$ considéré, se définit donc naturellement comme une application de l'ensemble des résultats dans $\Re_+$ qui

- prend la valeur 0 si on ne rejette pas l'hypothèse, c'est-à-dire si $\xi(\underline{y}) \le g(\alpha)$,

- est, si $\xi(\underline{y}) > g(\alpha)$, une fonction décroissante de $P_{\theta_0}\left[\xi > \xi(\underline{y})\right]$, qu'on notera $L(P_{\theta_0}[\xi > \xi(\underline{y})])$ ; autrement dit $S_\alpha(\underline{y}) = L(1 - F_{\theta_0}(\xi(\underline{y}))) = F_{\theta_0}(\xi(\underline{y}))$ où $F_{\theta_0}$ est la fonction de répartition de $\xi$ à la frontière, c'est-à-dire pour tout $\theta_0$ tel que $\psi(\theta_0) = t_0$.

L'indice de satisfaction ainsi défini sera noté $S_{L,\alpha}$.

Un indice particulièrement fruste est la fonction indicatrice de la région critique mais il ne rend pas compte de l'intérêt pour le "$p$" évoqué ci-dessus.

Nous nous attachons ici à l'étude de deux familles d'indices :

a) Indices de type 1 définis par

$L(p) = (1 - p)^l$ où $l \ge 0$

(dans le cas où $l = 1$, $1\text{-}S_\alpha(\underline{y})$ est donc le "$p$" ; dans le cas où $l = 0$, on retrouve la fonction indicatrice de la région critique).

On notera ces indices $S_{1,l,\alpha}$ ; ils sont bornés par 1.

b) Indices de type 2 définis par

$$L(p) = \left(\frac{1}{p}\right)^l \quad \text{où } l > 0$$

On notera ces indices $S_{2,l,\alpha}$ ; ils ne sont pas bornés.

### 1.3- La prévision de satisfaction

Cette notion s'introduit quand, comme c'est souvent le cas pour des essais cliniques, on doit mener une expérimentation en 2 temps :

- un premier résultat, $\underline{x}$, sert à déterminer si on poursuit ou non l'expérimentation,

- si on poursuit effectivement l'expérimentation, le second résultat, $\underline{y}$, sert seul à fonder un test au seuil $\alpha$, préalablement choisi (voire imposé dans les protocoles cliniques). La poursuite n'intervient donc que si on considère, au vu du premier résultat, qu'il y a "suffisamment de chances" que le second résultat apparaisse satisfaisant.

Suivant [2], nous adoptons ici, pour la décision de poursuite, un comportement de type bayésien. Le choix d'une probabilité a priori sur $\Theta$ permet alors de donner un sens à la loi du second résultat, $\underline{y}$, conditionnellement au premier, $\underline{x}$. Cette loi ne fait plus intervenir le paramètre $\theta$, relativement auquel on a intégré: c'est ce qu'on appelle classiquement, en statistique bayésienne, la loi prédictive de $\underline{y}$ conditionnellement à $\underline{x}$.

La *prévision de satisfaction* est alors définie comme l'espérance mathématique, pour cette loi prédictive conditionnelle, de l'indice de satisfaction relatif au test que l'on pourrait opérer en seconde phase. On la note $I_\alpha(\underline{x})$.

C'est au praticien qu'il appartient de décider en-dessous de quelle valeur de l'indice de satisfaction il renonce à la poursuite de l'expérience.

Dans Grouin [2,3] est en fait utilisée à cette fin, la probabilité prédictive conditionnelle du rejet de l'hypothèse nulle du test de la seconde étape, autrement dit, la probabilité prédictive conditionnelle de la conclusion "le résultat $\underline{y}$ est significatif". Il s'agit donc, en notre sens, de l'indice de prévision associé à l'indice de satisfaction rudimentaire qu'est $S_{1,0,\alpha}$ la fonction indicatrice de la région critique.

Si on note $P_{\underline{x}}$ la loi prédictive conditionnelle du second résultat sachant le premier vaut $\underline{x}$, il vient

$$I_\alpha(\underline{x}) = \int S_{L,\alpha}(\underline{y}) \quad P_{\underline{x}}(d\underline{y})$$
$$= \int_{\{\underline{y}, g(\underline{y}) > g(\alpha)\}} L\left(1 - F_{\theta_0}\left[\xi(\underline{y})\right]\right) P_{\underline{x}}(d\underline{y})$$

Nous nous intéressons dans la suite à calculer, dans un modèle gaussien, les prévisions de satisfaction $I(\underline{x})$ associées aux indices $S_{1,l,\alpha}$ et $S_{2,l,\alpha}$ définis ci-dessus.

## 2- LA PREVISION DE SATISFACTION DANS LE MODELE GAUSSIEN

### 2.1- Introduction du modèle

On effectue des observations indépendantes et de même loi normale $N(\theta, \sigma^2)$. Dans toute la suite, $\Phi$ (resp. $\varphi$) désigne la fonction de répartition (resp. la densité) de la loi $N(0,1)$.

Le premier résultat, $\underline{x}$, est une suite $(x_1, \ldots, x_k)$ de $k$ observations et le second résultat, $\underline{y}$, est une suite $(y_1, \ldots, y_n)$. Pour des raisons d'exhaustivité évidentes, on va fonder tous les calculs sur $x = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ et $y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j$, de lois respectives $N(\theta, \sigma_1^2)$ et $N(\theta, \sigma_2^2)$, où $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{k}$ et $\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

On suppose ici $\sigma^2$ connu (et donc également $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$). $\theta$ est inconnu et on choisit pour loi a priori pour

$\theta$ la conjuguée naturelle (voir [4]), c'est-à-dire ici la loi normale $\mu = N(\delta, \tau^2)$. On désire tester une hypothèse nulle de type $\theta \le \theta_0$.

La loi du résultat $y$ est évidemment stochastiquement croissante en $\theta$.

### 2.2- Le test et les indices

On utilise ici un test usuel, dont la région critique est $\left]q_0,+\infty\right[$, où $q_0 = \theta_0 + \sigma_2 u_\alpha^+$, $u_\alpha^+$ désignant le $\alpha$ quantile supérieur de $N(0,1)$ : $\Phi(u_\alpha^+) = 1-\alpha$.

La prévision de satisfaction est donnée par

$$I_{L,\alpha} = \int_{q_0}^{+\infty} L\left(1-\Phi\left(\frac{y-\theta_0}{\sigma_2}\right)\right) f_x(y)dy \qquad (1)$$

où $f_x(y)$ est la densité de la loi prédictive conditionnelle de $y$ sachant $x$.

### 2.3- Calcul de la loi prédictive conditionnelle

Les notations $X$ et $Y$ désignent les variables aléatoires dont les observations respectives sont $x$ et $y$.

On utilisera les symboles suivants :

- $E_\theta$ désigne l'espérance mathématique dans le modèle d'échantillonnage, à $\theta$ fixé,
- $E_\mu$ désigne l'espérance, relativement à l'a priori, et s'applique donc aux fonctions de $\theta$,
- $E$ désigne l'espérance relative à la loi prédictive.

On a les mêmes conventions d'indices pour la variance ($V$) et la covariance ($C$).

Rappelons les caractéristiques de la loi prédictive :

$E(X) = E_\mu(E_\theta X) = \delta = E(Y)$,

$V(X) = E_\mu(V_\theta(X)) + V_\mu(E_\theta(X)) = \sigma_1^2 + \tau^2$,

$V(Y) = \sigma_2^2 + \tau^2$,

$C(X,Y) = E_\mu(E_\theta(X)\, E_\theta(Y)) - \delta^2 = \delta^2 + \tau^2 - \delta^2 = \tau^2$.

La loi du triplet ($\theta$, $X$, $Y$) est une loi normale tridimensionnelle. Il en résulte que la loi prédictive, c'est-à-dire la loi marginale du couple ($X$,$Y$), est une loi normale bidimensionnelle.

On déduit alors la loi conditionnelle de $Y$ sachant $x$, à l'aide des formules générales suivantes sur la loi normale bidimensionnelle (voir [5]), pour lesquelles on adopte les symboles $E_x$ et $V_x$ pour désigner l'espérance et la variance de la loi prédictive sachant que $X = x$ :

$$E_x(Y) = E(Y) + \frac{C(X,Y)}{V(X)}x - \frac{C(X,Y)}{V(X)}E(X)$$

$$V_x(Y) = V(Y)\left(1-\frac{C^2(X,Y)}{V(X)V(Y)}\right).$$

On obtient donc, dans le modèle gaussien considéré ci-dessus :

$$E_x(Y) = \frac{\tau^2 x + \sigma_1^2\delta}{\sigma_1^2+\tau^2}$$

$$V_x(Y) = \sigma_2^2 + \frac{\tau^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\tau^2}$$

Dans (1), $f_x$ est la densité de la loi normale avec les caractéristiques ci-dessus, mais, comme on ne dispose pas de forme explicite da la fonction $\Phi$ à l'aide de fonctions élémentaires, on ne peut pas donner une forme analytique pour $I_\alpha(x)$. On va donc indiquer comment procéder à son évaluation numérique.

## 3- CALCUL NUMERIQUE DE LA PREVISION DE SATISFACTION

### 3.1- Expression formelle

On rappelle que, étant donnée $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$, $\tau^2$, $\delta$, $\alpha$ et $x$, on veut calculer

$$I_{L,\alpha}(x) = \int_{q_0}^{+\infty} L\left(1-\Phi\left(\frac{y-\theta_0}{\sigma_2}\right)\right)\varphi\left(\frac{y-m}{s}\right)\frac{dy}{s} \qquad (2)$$

où
$$m = \frac{\tau^2 x + \sigma_1^2\delta}{\sigma_1^2+\tau^2}$$

$$s^2 = \sigma_2^2 + \frac{\tau^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\tau^2}$$

$$q_0 = \theta_0 + \sigma_2 u_\alpha^+$$

Par changement de variable, on obtient

$$I_{L,\alpha}(x) = \int_{-bx'+d\theta_0+tu_\alpha^+}^{\infty} L\left(1-\Phi\left(\frac{z-(-bx'+d\theta_0)}{\sigma'_2\, d}\right)\right)\varphi(z)dz \qquad (3)$$

où $x' = \frac{x-\delta}{\tau}$, $\theta_0 = \frac{\theta_0-\delta}{\tau}$, $\sigma'_1 = \frac{\sigma_1}{\tau}$, $\sigma'_2 = \frac{\sigma_2}{\tau}$,

$$b = \left[(1+\sigma_1'^2)(\sigma_1'^2+\sigma_2'^2+\sigma_1'^2\sigma_2'^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$d = (1+\sigma_1'^2)b.$$

On constate que $I_{L,\alpha}(x)$ ne dépend que des deux nombres réels : $a = -bx'+d\theta_0$ et $t = \sigma'_2\, d$ que nous appellerons *paramètres essentiels*. De plus, dans les expressions de $b$, $d$ et $t$, n'interviennent que les rapports de variances $\frac{\sigma_1}{\tau}$ et $\frac{\sigma_2}{\tau}$.

La prévision de satisfaction ainsi définie est finie dans le cas des indices de type 1, $S_{1,L,\alpha}$, quel que soit $l > 0$, car la satisfaction est dans ce cas bornée par 1, (et donc il en est de même de la prévision associée, $I_{1,l,\alpha}$) où

$$I_{1,l,\alpha} = \int_{a+tu_\alpha^+}^{+\infty} \Phi\left(\frac{z-a}{t}\right)\varphi(z)dz.$$

Par contre, dans le cas des indices de type 2, non bornés, se pose le problème de la convergence de l'intégrale

$$I_{2,l,\alpha} = \int_{a+tu_\alpha^+}^{+\infty} \left[1-\Phi\left(\frac{z-a}{t}\right)\right]^{-l}\varphi(z)dz.$$

On sait que la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite vérifie, au voisinage de $+\infty$

$$1-\Phi(u) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Donc, dans $I_{2,l,\alpha}$, l'intégrande $h$ vérifie :

$$h(z) = \left[1-\Phi\left(\frac{z-a}{t}\right)\right]^{-l}\varphi(z) \sim$$

$$2\pi^{\frac{l-1}{2}}\frac{(z-a)^l}{t^l}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(z^2 - l\left(\frac{z-a}{t}\right)^2\right)\right].$$

On distingue alors deux cas :

a) $l \neq t^2$. Alors en posant $u = z + \frac{al}{t^2 - l}$, il vient

$$h(z) \sim \frac{(2\pi)^{\frac{l-1}{2}}}{t^l} \exp\left(-\frac{la^2}{t^2-l}\right) u^l \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-l}{t^2}u^2\right)$$

et l'intégrale est divergente si $l > t^2$ et convergente si $l < t^2$.

b) $l = t^2$. Alors

$$h(z) \sim \frac{(2\pi)^{\frac{t^2-1}{2}}}{t^{t^2}} e^{\frac{a^2}{2}} z^{t^2} e^{-az}$$

et l'intégrale est divergente si $a \leq 0$ et convergente si $a > 0$.

Si, $a \neq 0$, $h(z) \sim \frac{(2\pi)^{\frac{(t^2-1)}{2}}}{t^{t^2}} z^{t^2} \exp(-az)$ et l'intégrale est divergente si $a < 0$ et convergente si $a > 0$.

Si, $a = 0$, $h(z) \sim \frac{(2\pi)^{\frac{(t^2-1)}{2}}}{t^{t^2}} z^{t^2}$ et l'intégrale est divergente.

Etudions quel est le poids de ces contraintes, faisant intervenir les paramètres essentiels $a$ et $t$, pour assurer l'existence d'une prévision de satisfaction finie.

On remarque que

$$t = \sigma'_2 d = \frac{\sigma^2 \sqrt{1+\sigma_1^2}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}} < 1 \ ;$$

La condition $1 < t^2$ impose donc que la fonction $L$, si elle est du type puissance, converge lentement vers $\infty$ quand $p$ tend vers 0 ; en particulier le cas $l = 1$ (c'est-à-dire $S_{2,1,\alpha} = \frac{1}{1 - F_{\theta_0}(\xi(\underline{y}))}$) conduit ici à une prévision de satisfaction infinie quel que soit le résultat expérimental, donc inutilisable.

Dans le cas où $l = t^2$ (condition qui ne fait intervenir que les variances connues, mais ne dépend pas des observations et de la loi a priori), la condition $a > 0$, signifie que $x' < \frac{d}{b}\theta_0 = (1+\sigma'_1)^2\,\theta_0$ ; la prévision de satisfaction est donc finie pour $x'$ strictement inférieur à un certain seuil, et infinie au-delà.

### 3.2- Méthode de Monte-Carlo

Pour procéder au calcul de $I_{L,\alpha}(x)$ par une méthode de Monte-Carlo, on le réécrit sous la forme

$$I_{L,\alpha}(x) = \left[1 - \Phi(a + tu_\alpha^+)\right] \int_R L\left(1 - \Phi\left(\frac{z-a}{t}\right)\right) \frac{\varphi(z)}{1 - \Phi(a + tu_\alpha^+)} 1_{\left[a+tu_\alpha^+, \infty\right[}\, dz$$

où

$$\frac{\varphi}{1 - \Phi(a + tu_\alpha^+)} 1_{\left[a+tu_\alpha^+, \infty\right[}$$

est la densité de la probabilité $Q$, déduite de la loi normale centrée réduite par conditionnement par l'événement $\left[a + tu_\alpha^+, \infty\right[$.

La méthode de Monte-Carlo consiste alors à approcher $I_{L,\alpha}(x)$ par $(1 - \Phi(a + tu_\alpha^+)) \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L\left(1 - \Phi\left(\frac{Z_i - a}{t}\right)\right)$ où les $Z_i$ sont $N$ réalisations de la probabilité $Q$. Le tirage des $Z_i$ se déroule de la manière suivante :

$U_i$ est tiré selon la loi uniforme sur [0,1],

$V_i = \Phi(a + tu_\alpha^+) + (1 - \Phi(a + tu_\alpha^+))U_i$, c'est-à-dire que $V_i$ suit la loi uniforme sur $[\ \Phi(a + tu_\alpha^+), 1]$,

$Z_i = \Phi^{-1}(V_i)$, c'est-à-dire que $Z_i$ suit la loi $Q$.

### 3.3- Présentation des résultats

On trouvera en annexe des courbes représentatives de $I_{L,\alpha}$. Chaque graphique fournit plusieurs courbes associées à différentes valeurs de la fonction $\theta_0$, en fonction de l'observation $x$ portée en abscisse.

Dans chaque graphique, on a pris $\delta = 0$ et $\tau = 1$, ce qui ne diminue en rien la généralité puisque les paramètres essentiels ne dépendent de $x$ et $\theta_0$ que via $x' = \frac{x - \delta}{\tau}$ et $\theta'_0 = \frac{\theta_0 - \delta}{\tau}$.

D'un graphique à l'autre varie donc le seuil $\alpha$, les variances $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$ et la fonction $L$.

On a adopté pour $\alpha$ les valeurs 0,01 et 0,05.

Pour $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$, on a considéré des situations où, dans le premier comme dans le second échantillon, les observations sont de même variance unitaire $\sigma^2$, mais où les effectifs peuvent varier. On a pris :

- d'une part $\sigma^2 = 1$ et $\sigma^2 = 4$, (autrement dit le rapport des écarts-types des observations à l'écart-type de l'a priori est 1 ou 2),
- d'autre part $k = 10$ et $n = 10$ ou 20 (autrement dit le rapport des effectifs de la deuxième phase éventuelle à la première phase explorative est 1 ou 2).

On a considéré une fonction $L$ de type 1, $L(p) = 1 - p$. On calcule donc $I_{1,1,\alpha}$ et pour chaque $\alpha$ quatre situations pour lesquelles on donne ci-dessous (voir tableau 1) les valeurs $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$.

| $n$ | $\sigma^2 = 1$ | $\sigma^2 = 4$ |
|---|---|---|
| 10 | $\sigma_1^2 = 0{,}1$ ; $\sigma_2^2 = 0{,}1$ | $\sigma_1^2 = 0{,}4$ ; $\sigma_2^2 = 0{,}4$ |
| 20 | $\sigma_1^2 = 0{,}1$ ; $\sigma_2^2 = 0{,}05$ | $\sigma_1^2 = 0{,}4$ ; $\sigma_2^2 = 0{,}2$ |

**Tableau 1**

Les graphiques (1-8) représentent la prévision de satisfaction $I_{1,1,\alpha}$. On a indiqué à chaque fois les paramètres essentiels qui sont : la valeur de $t$ et la forme bilinéaire qui est l'expression de $a$ en fonction de $x$ et $\theta_0$. On a aussi pour chacune des 4 situations données dans le tableau 1, et pour $\theta_0 = 0$ et $\alpha = 0{,}05$ porté sur le même graphique les courbes de prévision de satisfaction relatives aux indices $S_{1,1,\alpha}$ $S_{1,0,\alpha}$ ; on rappelle que ce dernier n'est autre que la probabilité prédictive de la région critique, déjà utilisée en [2]. Ces courbes sont représentées sur les graphiques (9-12).

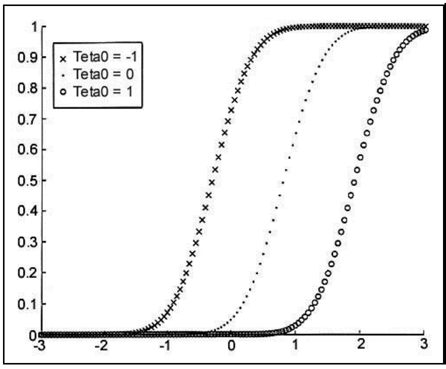


**Figure 1:** Données:
$\alpha = 0{,}01$ ; $\delta = 0$ ; $\tau = 1$
$\sigma^2 = 1$, $k = 10$, $n = 10$
(donc $\sigma_1^2 = 0{,}1$, $\sigma_2^2 = 0{,}1$)
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}723$; $a = -2{,}081x + 2{,}289\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,05 pour $x$.

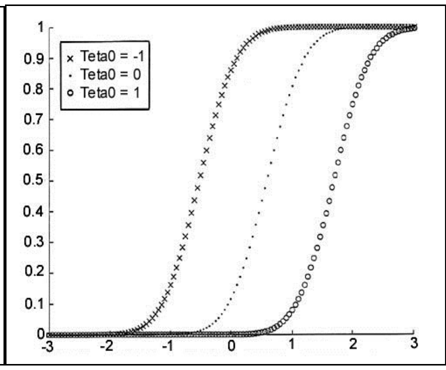


**Figure 2:** Données:
$\alpha = 0{,}05$ ; $\delta = 0$ ; $\tau = 1$
$\sigma^2 = 1$, $k = 10$, $n = 10$
(donc $\sigma_1^2 = 0{,}1$, $\sigma_2^2 = 0{,}1$)
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}723$ ; $a = -2{,}081x + 2{,}289\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,05 pour $x$.

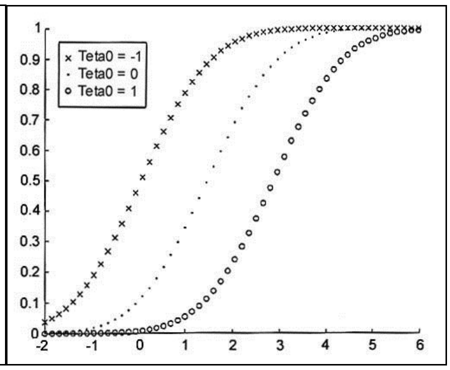


**Figure 3:** Données:
$\alpha = 0{,}05$ ; $\delta = 0$ ; $\tau = 1$
$\sigma^2 = 4$, $k = 10$, $n = 10$
(donc $\sigma_1^2 = 0{,}4$, $\sigma_2^2 = 0{,}4$)
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}763$ ; $a = -0{,}8626x + 1{,}208\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,15 pour $x$.

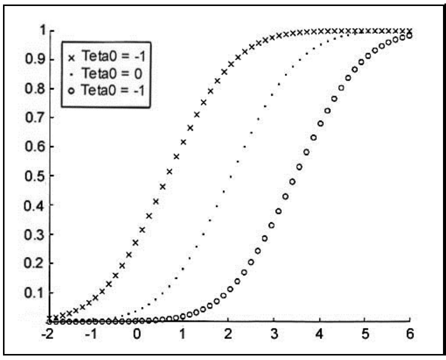


**Figure 4:** Données:
$\alpha = 0{,}01$ ; $\delta = 0$ ; $\tau = 1$
$\sigma^2 = 4$, $k = 10$, $n = 10$
(donc $\sigma_1^2 = 0{,}4$, $\sigma_2^2 = 0{,}4$)
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}763$ . $a = -0{,}8626x + 1{,}208\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,15 pour $x$.

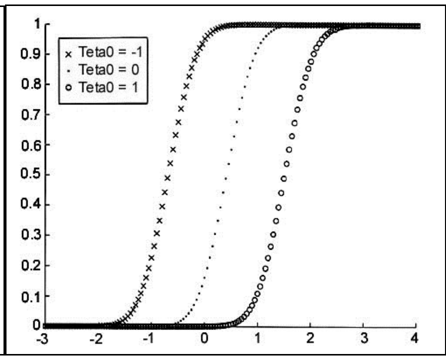


**Figure 5:** Données:
$\alpha = 0{,}05$ ; $\delta = 0$ ; $\tau = 1$
$\sigma^2 = 1$, $k = 10$, $n = 20$
(donc $\sigma_1^2 = 0{,}1$, $\sigma_2^2 = 0{,}05$)
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}595$ ; $a = -2{,}422x + 2{,}664\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,05 pour $x$.

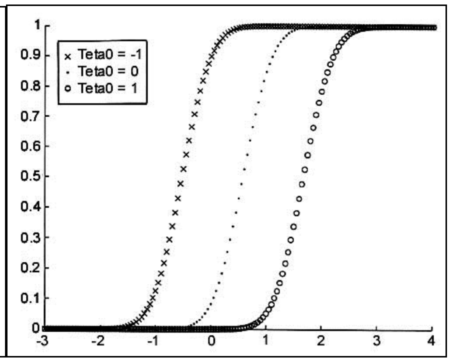


**Figure 6:** Données:
$\alpha = 0{,}01$ ; $\delta = 0$ ; $\tau = 1$
$\sigma^2 = 1$, $k = 10$, $n = 20$
(donc $\sigma_1^2 = 0{,}1$, $\sigma_2^2 = 0{,}05$)
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}595$ ; $a = -2{,}422x + 2{,}664\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,05 pour $x$.

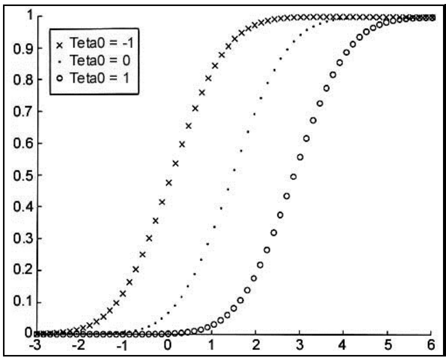


**Figure 7:** Données:
$\alpha = 0{,}01$ ; $\delta = 0$ ; $\tau = 1$
$\sigma^2 = 4$, $k = 10$, $n = 20$
(donc $\sigma_1^2 = 0{,}4$, $\sigma_2^2 = 0{,}2$)
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}641$ ; $a = -1{,}025x + 1{,}435\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,15 pour $x$.

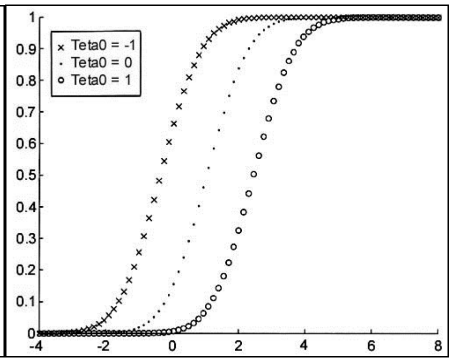


**Figure 8:** Données:
$\alpha = 0{,}05$ ; $\delta = 0$ ; $\tau = 1$
$\sigma^2 = 4$, $k = 10$, $n = 20$
(donc $\sigma_1^2 = 0{,}4$, $\sigma_2^2 = 0{,}2$)
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}641$ ; $a = -1{,}025x + 1{,}435\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,15 pour $x$.

**Figure 1 à 8:**

Représentation de la prévision de satisfaction relative à $S_{1,1,\alpha}$.

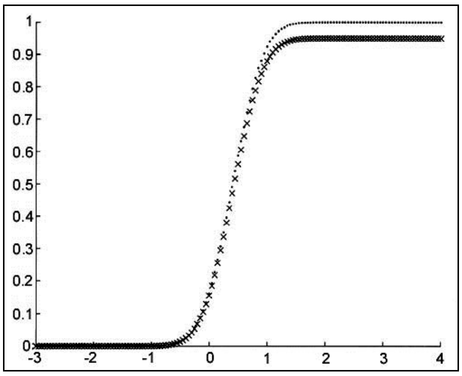

**Figure 9** :
Données:
$\alpha = 0{,}05$
$\sigma_1^2 = 0{,}1$,
$\sigma_2^2 = 0{,}05$
Graphique avec un pas de 0,05 pour $x$.

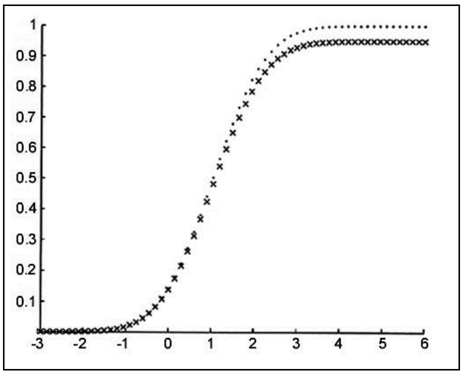

**Figure 10** :
Données:
$\alpha = 0{,}05$
$\sigma_1^2 = 0{,}4$,
$\sigma_2^2 = 0{,}4$
Graphique avec un pas de 0,15 pour $x$.

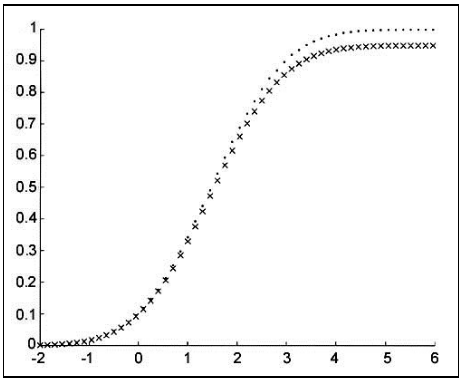

**Figure 11** :
Données:
$\alpha = 0{,}05$
$\sigma_1^2 = 0{,}4$,
$\sigma_2^2 = 0{,}4$
Graphique avec un pas de 0,15 pour $x$.

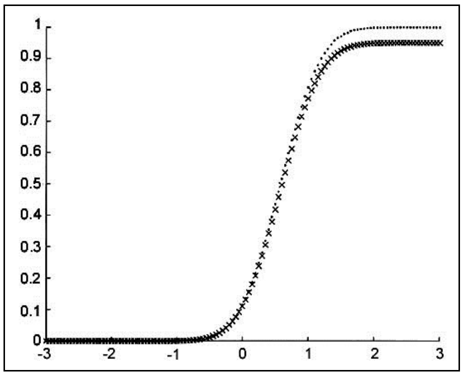

**Figure 12** :
Données:
$\alpha = 0{,}05$
$\sigma_1^2 = 0{,}1$,
$\sigma_2^2 = 0{,}1$
Graphique avec un pas de 0,05 pour $x$.

**Figures 9 à 12:** Représentation de la prévision de satisfaction relative à relative à $S_{1,1,\alpha}$ (•) et $S_{1,0,\alpha}$ (×).

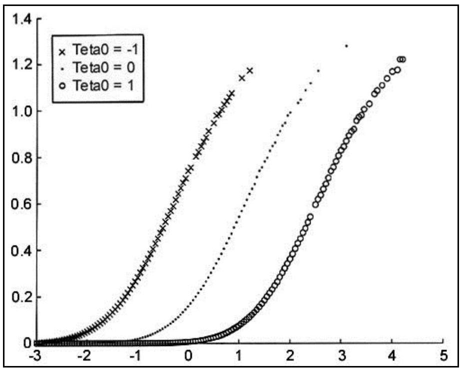


**Figure 13** :
Données:
$N = 500$, $l = 1/60$
$\alpha = 0{,}05$
$\sigma_1^2 = 0{,}4$, $\sigma_2^2 = 0{,}2$
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}641$
$a$=-1,025$x$+1,435$\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,05 pour $x$.

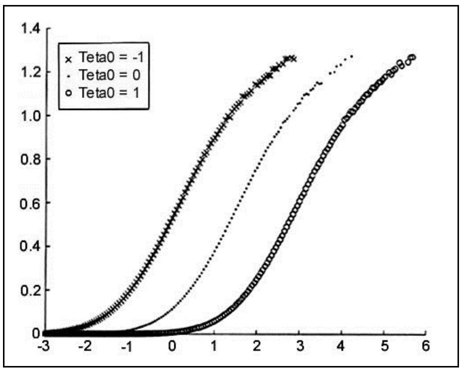


**Figure 14** :
Données:
$N = 300$, $l = 1/60$
$\alpha = 0{,}05$
$\sigma_1^2 = 0{,}1$, $\sigma_2^2 = 0{,}1$
Paramètres essentiels:
$t = 0{,}723$
$a$=-2,081$x$+2,289$\theta_0$
Graphique avec un pas de 0,05 pour $x$.

**Figures 13 et 14:** Représentation de la prévision de satisfaction relative à $\mathbf{Log}(S_{2,l,\alpha})$.

Enfin, avec les mêmes hypothèses que celles envisagées pour la fonction

$$L(p) = 1 - p,$$

on considère une fonction $L$ du type 2 :

$$L(p) = \left(\frac{1}{p}\right)^l,$$

et on peut voir les courbes de la prévision de satisfaction dans les graphiques 13-14 où il n'y a régularisation des courbes que pour un grand nombre de simulations, et pour $l$ assez petit.

## REFERENCES

**[1]-** Merabet H., Raoult J.P., "Les indices de satisfaction, outils classiques et bayésiens pour la prédiction statistique", *ASU,* XXVIIéme Journées de Statistique, Jouy-en-Josas, (1995).
**[2]-** Grouin J.M., "Procédures bayésiennes prédictives pour les essais expérimentaux", Thèse, (1994).
**[3]-** Lecoutre B., Derzko G., Grouin J. M., "Bayesian prédictive approach for inférence about proportions", *Statistics in Medicine*, 14, (1995), pp. 1057-1063.
**[4]-** Robert *C.,* "L'analyse statistique bayésienne", *Economica*, Paris, (1992).
**[5]-** Fourgeaud C., Fuchs *A.,* "Statistique", Dunod, Paris, (1967).

□