SENTINELLES FAIBLES

Reçu le 02/10/2004 – Accepté le 23/07/05

Résumé

La notion des sentinelles a été introduite dans l'étude des problèmes à données incomplètes par J.L. Lions(3).Ces sentinelles sont construites a partir de l'existence de la contrôlabilité exacte du système adjoint. Dans ce travail, on se propose de définir la notion ‘des sentinelles faibles' afin d'étendre l'étude à des systèmes distribués à données incomplètes et faiblement contrôlables. Plus précisément nous avons introduit une nouvelle notion appelée 'sentinelles faibles' pour étudier l'estimation de la source (terme de pollution) du système parabolique faiblement contrôlable, indépendamment de la donnée initiale (terme manquant). Dans cette étude on se place dans un cadre fonctionnel assurant l'existence et l'unicité de l'état du système.

Mots clés: *Sentinelles, contrôlabilité faible, systèmes stribués.*

Abstract

The notion of sentinel is introduced in the study of the problems with incomplete data by J. L Lions (3). The construction of sentinel is based on the existence and uniqueness of the ad joint system solution which is exactly controllability. In this work we purpose to given an author definition of the notion of sentinel (weakly sentinel) for studied the author system with incomplete data which the ad joint system is weakly controllable. Precisely this knew notion of sentinel permeated to estimate the pollution terms in the parabolic system independently of massing terms in data. In this work, we are not interested to proved the existence and uniqueness of the solution of system.

Keywords: *Sentinel, weakly controllability, disturbed system.*

A. AYADI
M. DJEBARNI
T. LAIB

Laboratoire de Modélisation Mathématique et Simulation
Université Mentouri Constantine, Algérie

ملخص

لقد تم إدخال مفهوم الحارس في دراسة المسائل ذات المعطيات غير التامة. إن بناء هدا الحارس يتوقف على وجود وحدانية الحل للمسائل المرافقة التي تكون مراقبتها حقيقية. في هدا العمل نقترح إدخال مفهوم جديد للحارس (المفهوم الضعيف) لدراسة المسائل التي تكون مراقبتها مراقبة ضعيفة. إن هدا المفهوم الجديد للحارس يسمح لنا بتقييم حد التلوث في بعض المسائل التي تكون المعطيات الأولية غير تامة. خلال هدا العمل لا نهتم ببرهنة الوجود و الوحدانية و الوسائل المرافقة

الكلمات المفتاحيـــة: الحارس ، المراقبة الضعيفة، المسائل التوزيعية.

Soit Ω un ouvert de IR^n représentant le domaine géométrique du système (n=1,2,3 pour les applications) et soit $T \succ O$. On suppose que la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est assez régulière.

On considère un système à paramètre distribué décrit par l'équation d'état de système:

$$\begin{cases} y'(t) + Ay(t) = \bar{f} + \lambda f, & t \in \left]0,T\right[\\ y(0) = \bar{y}_0 + \tau y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où A génère un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ sur l'espace d'état $L^2(\Omega)$, λ, τ sont deux paramètres suffisamment petits,

$$\bar{f}, f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2}$$

Et

$$\bar{y}_0, y_0 \in L^2(\Omega) \tag{3}$$

Si l'opérateur A est auto adjoint à résolvante compacte alors (1) admet une solution faible unique fortement continue sur $[0,T]$ et donnée par :

Cette solution se décompose en deux solutions :
La première est donnée par

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

Et la seconde est donnée par

$$\bar{y}(t) = S(t)\bar{y}_0 + \int_0^t S(t-s)\bar{f}(s)ds$$

Si A admet un système orthonormé complet de fonctions propres (φ_{n_j}) associées aux valeurs propres (λ_n), λ_n étant de multiplicité r_n, alors le semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ engendré par A s'exprime, pour tout w de $L^2(\Omega)$, par

$$S(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n} \sum_{j=1}^{r_n} \langle \varphi_{n_j}, w \rangle \varphi_{n_j}$$ (Lions $[2,3]$, El Jai Pritchard $[1]$).

L'adjoint A^* de A engendre un semi groupe $(S^*(t))_{t\geq 0}$ adjoint de $(S(t))_{t\geq 0}$ qui est également fortement continu sur $L^2(\Omega)$.

On suppose que $\bar{f}, \bar{y}_0$ soient données alors que les f, y_0 soient deux fonctions inconnues, l'objectif est d'estimer la fonction f indépendamment de la fonction y_0 en utilisant la notion de la sentinelle faible.

2-SENTINELLE FAIBLE

Soit maintenant une petite région $O \subset \Omega$, considérée comme un observatoire, et soit h_0 une fonction donnée dans $L^2(\hat{Q})$ où $\hat{Q} = O \times]0,T[$

$$h_0 \in L^2(\hat{Q}) \tag{4}$$

On considère la fonctionnelle

$$S(\lambda,\tau) = \int_Q (h_0(t,x) + \varphi(t,x))y(t,x,\lambda,\tau)dxdt \quad \text{où} \quad \varphi_\varepsilon \in L^2(\hat{Q})$$

(5)

Définition1 : On dira que la fonctionnelle S(λ,τ) est une sentinelle faible définie par h_0 si les conditions suivantes ont lieu: pour tout $\varepsilon \succ 0$ il existe $\varphi_\varepsilon \in L^2(\hat{Q})$ telle que :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0} \leq \varepsilon,$$

pour toute donnée initiale y_0 (6)

et

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\hat{Q})} = \inf \|\varphi\|_{L^2(\hat{Q})}$$

pour tout φ vérifiant la condition précédente (7)

Soit $y_m(t,x)$ un état mesuré du système sur l'observatoire O pendant l'intervalle $[0,T]$, on construit la sentinelle mesurée:

$$S_m = \int_{\hat{Q}} (h_0(t,x) + \varphi_\varepsilon(t,x))y_m(t,x)dxdt \tag{8}$$

on a:

$$S(\lambda,\tau) = S(0,0) + \lambda \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0} + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0} \tag{9}$$

où

$$S(0,0) = \int_{\hat{Q}} (h_0(t,x) + \varphi_\varepsilon(t,x))\hat{y}(t,x)dxdt \tag{10}$$

où $\hat{y}(t,x)$) est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{y}(t,x) + A\hat{y}(t,x) = \bar{f}, \quad (t,x) \in Q =]0,T[x\Omega \\ \hat{y}(0,x) = \bar{y}_0 \end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} S = \int_{\hat{Q}} (h_0(t,x) + \varphi_\varepsilon(t,x))y_\lambda(t,x)dxdt \tag{12}$$

où $y_\lambda(t,x)$ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y_\lambda(t,x) + Ay_\lambda(t,x) = f, \quad (t,x) \in Q =]0,T[x\Omega \\ y_\lambda(0,x) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S = \int_{\hat{Q}} (h_0(t,x) + \varphi_\varepsilon(t,x))y_\tau(t,x)dxdt \tag{14}$$

où $y_\tau(t,x)$ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y_\tau(t,x) + Ay_\tau(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q =]0,T[x\Omega \\ y_\tau(0,x) = y_0 \end{cases} \tag{15}$$

Pour construire la sentinelle faible, on doit déterminer φ_ε qui assure les conditions (6) et (7) de la définition1 pour un ε positif donné. Soit q(x, t) la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} q(t,x) + A^* q(t,x) = (h_0 + \varphi_\varepsilon)_{|\hat{Q}}, \quad (t,x) \in Q =]0,T[x\Omega \\ q(T,x) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

pour tout φ_ε dans $L^2(\hat{Q})$. En multipliant l'équation (15) par q(t) et en intégrant par partie, on déduit que

$$\langle q(0), y_\tau(0) \rangle = \int_\Omega q(0,x)y_\tau(0,x)dx = \int_\Omega q(0,x)(x)y_0 dx \tag{17}$$

Pour que les conditions (6) et (7) de la définition 1, soient satisfaites il suffit que pour tout ε≻0, il existe une fonction $\varphi_\varepsilon \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ telle que $q_0(0)$ soit proche de zéro à ε près. Pour cela on décompose le système (16) en deux systèmes:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}q_0(t,x)+A^* q_0(t,x)=h_{0|\hat{Q}}, \quad (t,x)\in Q=]0,T[x\Omega \\ q_0(T,x)=0 \end{cases}$$

(18)

et

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}q_1(t,x)+A^* q_1(t,x)=\varphi_{\varepsilon|\hat{Q}}, \quad (t,x)\in Q=]0,T[x\Omega \\ q_1(T,x)=0 \end{cases} \quad (19)$$

Donc : $q = q_0 + q_1$. Déterminer la sentinelle faible revient à étudier la contrôlabilité faible du système (19).

3-CONTRÔLABILITE FAIBLE

Soit $q_0(0)$ l'état désiré donné par la résolution du système (18), le problème de la contrôlabilité faible consiste à trouver, pour tout ε≻0 un contrôle φ_ε de l'espace de contrôles $U = L^2(\hat{Q})$ permettant d'approcher à ε prés, en un temps fini, l'état $q_1(t)$ du système (19) d'un état initial $q_1(T)$=0, à un état final désiré -$q_0(0)$ sur Ω (Zerrik(4))

Remarque1 : SI le semi groupe S(t) engendré par l'opérateur A* est compact dans L²(Ω), le Système (19) n'est pas exactement Contrôlable (El Jai et , Pritchard [1]).*

Remarque2 :Il y a des systèmes qui sont faiblement contrôlables mais ils ne sont pas exactement contrôlables.

Exemple 1 : Ω étant un ouvert borné de IR^n, de frontière $\partial\Omega$ régulière, considérons le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}z(x,t)=\Delta z(x,t)+u(x,t), \quad (t,x)\in Q=\Omega\times]0,T[\\ z(x,0)=0 \qquad dans \quad \Omega \\ z(\zeta,t)=0 \qquad sur \quad \partial\Omega\times]0,T[\end{cases}$$

Le système ci-dessus est un cas particulier de système (19) ; en effet, il suffit de prendre

$$A^*=\Delta \;\; quand \; z\in D(\Omega)=H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega), \;\; O=\Omega, \;\; u=\varphi\in L^2(\hat{Q})$$

Ce système ne peut pas être exactement contrôlable dans *L²(Ω)* car le semi groupe *S*(t)* engendré par $A^* = \Delta$ est compact, mais il est exactement contrôlable dans $H_0^1(\Omega)$ (El Jai, et Pritchard [1])

Ces deux remarques nous ont conduit à introduire la notion de la sentinelle faible pour estimer le terme de pollution indépendamment du terme manquant.

On suppose que le système (19) n'est pas exactement contrôlable donc le théorème suivant montre l'intérêt de la contrôlabilité faible dans la construction des sentinelles faibles.

Théorème 5 : Si le système (19) est faiblement contrôlable alors pour tout ε positif il existe une fonction $\varphi_\varepsilon \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ qui vérifie les conditions (6) et (7) de la définition 1.

Démonstration : Si le système (2.8) est faiblement contrôlable sur Ω, alors pour $q(0)$ est donné dans L²(Ω) et pour tout ε positif, il existe $\varphi_\varepsilon \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ tel que $\int_\Omega q(0)dx / \int_\Omega y(0)dx \le \varepsilon$, et donc

$$\frac{\partial}{\partial\tau}S(\lambda,\tau) = \int_{\hat{Q}} (h_0(t,x)+\varphi_\varepsilon(t,x))z_\tau(t,x;\lambda,\tau)dxdt$$

$$= \langle q(0), y(0)\rangle \le \left| \|q(0)\|_{L^2(\Omega)} \|y(0)\|_{L^2(\Omega)} \right| \le \varepsilon$$

ce qui prouve (6) et (7).

Dans ce qui suit nous appliquons le résultat précédent pour estimer le terme de pollution du système (1)

4-ESTIMATION DU TERME DE POLLUTION

Théorème6 : Puisque le système (19) est faiblement contrôlable sur Ω alors on a

$$\lambda\int_Q qf \le \int_Q (\varphi_\varepsilon + h_0)|y_m - y| dxdt + \tau\varepsilon$$

où $\hat{y}(t,x)$ est la solution de (11) et $y_m(t,x)$ est l'état observé sur O pendant l'intervalle du temps [0,T].

Démonstration : Soit S(λ,τ) la sentinelle faible définie par $h_0(t,x)$ donc

$$\frac{\partial}{\partial\tau}S(\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0} = \int_{\hat{Q}} (h_0(t,x)+\varphi_\varepsilon(t,x))y_\tau(t,x;\lambda,\tau)dxdt$$

$$= \langle q(T), z_\tau(T)\rangle \le \left| \|q(T)\|_{L^2(\Omega)} \|y(T)\|_{L^2(\Omega)} \right| \le \varepsilon$$

Mais de (2.4) on a :

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\tau}S(\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0} = S(\lambda,\tau) - S(0,0) + \tau\frac{\partial}{\partial\tau}S(\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0}$$

Donc

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\tau}S(\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0} \le |S_m(\lambda,\tau) - S(0,0)| + \tau\varepsilon$$

D'où

$$\lambda\int_Q qf = \lambda\int_Q (h_0(t,x)+\varphi_\varepsilon(t,x))y_\lambda(t,x;\lambda,\tau)dxdt$$

$$\leq \int_Q (\varphi_\varepsilon + h_0)|y_m - y|dxdt + \tau\tau$$

CONCLUSION

Nous avons construit les sentinelles faibles à travers la théorie de la contrôlabilité faible. La nouvelle notion des sentinelles faibles a été appliquée à l'estimation du terme de pollution indépendamment de terme manquant y_0 des systèmes faiblement contrôlables. Je pense que la contrôlabilité régionale développée par (El Jai, et Pritchard [1]) et (Zerrik [4]) permet de généraliser la notion des sentinelles à d'autre systèmes.

REFERENCES

1 : A. El Jai - A. J. Pritchard : Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués. Masson. RMA 3. Paris. 1986.

2 : J. L. Lions : Contrôlabilité exact, stabilisations et perturbations des systèmes distribués. Masson. Vol.1. 1988.

3 : J. L. Lions: Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes.RMA21. Paris. 1992.

4 : E. H. zerrik: Analyse régionale des systèmes distribués. Thèse. Univ. Mohammed V. Maroc. 1993.