Sciences & Technologie A – N°24, Décembre. (2006), pp. 15-20

SUR LA COURBURE DES VARIETES RIEMANNIENNES PRODUITS

Reçu le 20/01/2005 – Accepté le 22/10/2006

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse aux tenseurs de courbure Riemannienne, de courbure Riemannienne-Christoffel et de Ricci d'une variété Riemannienne produit. Nous montrons d'une façon générale que chacun de ces tenseurs est une somme des tenseurs de chaque variété de la base. Un calcul formel sur le produit des variétés nous permet dénoncer un certain nombre de résultats concernant la symétrie locale, l'aplatissement et la courbure sectionnelle et on montre que le théorème 4 (pg.7) relatif à la courbure sectionnelle d'une variété produit proposé dans [5] n'est pas toujours vérifié.

Mots clés: *variété Riemannienne, relèvement, variété Riemannienne produit, courbure, courbure sectionnelle.*

Abstract

We are interested to tensors of Riemannian curvature, Riemannian-Christoffel curvature and Ricci of a product Riemannian manifold. In general, we show that each of these tensors is a tensors sum of each base manifold. A formal calculation on the product of manifolds provides us a set of results concerning the local symmetry, the flatness and the sectional curvature. We show that theorem 4 (pg.7) relative to the sectional curvature of a manifold product proposed in [5] is not always verified.

Keywords: *Riemannian manifold, curvature, product Riemannian manifold, the sectional curvature.*

R.NASRI
M. DJAA
laboratoire de géométrie.
Centre universitaire de Saida,
Algérie.

M.S.C.2000: 53C50-53C42.

ملخص

نهتم في هذا العمل بمؤترات التقوس ريمان و تقوس ريمان-كريستوتل و ريتشي لجداء متنوعات ريمان . نبرهن في الحالة العامة أن كل مؤتريكتب على شكل مجموع لمؤترات المتنوعات الأساسية للجداء. بحساب شكلي على جداء المتنوعات يمكننا طرح عدة نتائج تخص التناظر الموضعي ، التسطح و التقوس المقطعي و نبين أن المبرهنة 4 (ص 7) المتعلقة بالتقوس الموضعي للمتنوعة الجداء المفترضة في [5] ليست دائما محققة.

الكلمات المفتاحيـــة : تقوس ريمان، تقوس، التقوس المقطعي

Le produit tordu $M \times_f N$ de deux variétés Riemannienne (M, g_M) et (M, g_N) est la variété produit $M \times N$ munie de la métrique $g = g_M + f^2 g_N$, où f est une fonction positive sur M, appelée fonction de distorsion .

Il est bien connu que la notion du produit tordu joue un rôle important dans le domaine de la géométrie différentielle et celui de la physique ([4]), par exemple le meilleur modèle relativiste de l'espace temps de Schawarchild, décrivant l'espace de sortie autour d'une étoile massive ou d'un trou noire est donné comme produit tordu de variétés adaptées ([4]).

Dans ce travail, on s'intéresse aux tenseurs de courbure, de courbure Riemannienne-Christoffel et de Ricci d'une variété Riemannienne produit, on utilise pour cela la notion de relèvement pour établir la relation entre ces tenseurs et ceux des variétés M et N. L'objet principal de cet article consiste à montrer que chacun de ces tenseurs peut être écrit comme une somme des tenseurs de chaque variété de la base et de déterminer ensuite les propriétés géométriques du produit. Notre étude révèle que les résultats que nous obtenons sont plus techniques que ceux obtenus par M.Atçeken et S.Keles dans ([5]). Nous montrons en revanche que leur théorème 4, (pg 7) concernant la courbure sectionnelle produit n'est pas toujours vrai. En effet, on établi que si M est une variété

Riemannienne de courbure sectionnelle constante non nulle, alors le produit M×M a une courbure sectionnelle non constante. La sphère de IR^3 fournit aussi un exemple de variété qui ne peut satisfaire le théorème 4 de ([5]).

1. Notions de Relèvements

M et N sont deux variétés de dimension m et n respectivement, pour rapprocher le calcul sur $M \times N$ à celui de ces facteurs, nous avons besoin d'introduire la notion de relèvement à partir de M et N.

Le relèvement horizontal et vertical suivant M et N sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} R_h : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M \times N) \\ f &\mapsto f^h = f \circ \pi \\ R_v : C^\infty(N) &\longrightarrow C^\infty(M \times N) \\ f &\mapsto f^v = f \circ \sigma \end{aligned}$$

(1)

où π et σ sont les projections canoniques de $M \times N$ dans M et N respectivement.

Si $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ et $g_1, g_2 \in C^\infty(N)$, on a les propriétés suivantes de compatibilité du relèvement avec les lois naturelles de l'algèbre C^∞ :

$$(f_1 + f_2)^h = f_1^h + f_2^h \ , \quad (\lambda f_1)^h = \lambda f_1^h \ ,$$
$$(f_1 \cdot f_2)^h = f_1^h f_2^h$$
$$(g_1 + g_2)^v = g_1^v + g_2^v \ , \quad (\lambda g_1)^v = \lambda g_1^v \ ,$$
$$(g_1 \cdot g_2)^v = g_1^v g_2^v$$

De plus, si on considère deux champs de vecteurs sur $M \times N$ coïncidant sur f^h et g^v, il est facile alors de vérifier qu'ils coïncident partout.

Le relèvement horizontal suivant M et le relèvement vertical suivant N, d'un vecteur tangent sont respectivement exprimés par :

$$\begin{aligned} R_h : T_x M &\longrightarrow T_{(x,y)} M \times N \\ v &\mapsto v^h = (v, 0) \\ R_v : T_y N &\longrightarrow T_{(x,y)} M \times N \\ w &\mapsto w^v = (0, w) \end{aligned}$$

(2)

où $(x, y) \in M \times N$.

Remarque 1.1 :

v^h (resp. w^v) est l'unique vecteur dans $T_{(x,y)}(M \times N)$ tel que:

$d_{(x,y)}\pi(v^h) = v$ et $d_{(x,y)}\sigma(v^h) = 0$

(resp. w^v) $d_{(x,y)}\pi(w^v) = 0$ et $d_{(x,y)}\sigma(w^v) = w$).

Ceci nous permet de définir les relèvements horizontal R_h et vertical R_v d'un champ de vecteurs par :

$$\begin{aligned} R_h : H(M) &\longrightarrow H(M \times N) \\ X &\mapsto X^h = R_h(X) \\ &\text{tel que: } X^h_{(x,y)} = (X_x)^h \\ R_v : H(N) &\longrightarrow H(M \times N) \\ Y &\mapsto Y^v = R_v(Y) \\ &\text{tel que: } Y^v_{(x,y)} = (Y_y)^v \end{aligned} \tag{3}$$

où $(x, y) \in M \times N$

Remarque 1.2 :

X^h (resp. Y^v) est l'unique champ de vecteurs dans $H(M \times N)$ tel que

$d\pi \circ X^h = X \circ \pi$ et $d\pi \circ Y^v = 0$ (resp. $d\sigma \circ X^h = 0$ et $d\sigma \circ Y^v = Y \circ \sigma$)

On note : $H_M = \{X^h \,/\, X \in H(M)\}$

$$H_N = \{Y^v \,/\, Y \in H(N)\}$$

En Remarquant que si $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ et $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n})$ sont des bases locales des champs de vecteurs relativement aux cartes (U, ϕ) et (V, ψ), alors

$$\left((\frac{\partial}{\partial x_1})^h, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x_m})^h, (\frac{\partial}{\partial y_1})^v, \cdots, (\frac{\partial}{\partial y_n})^v \right)$$

est la base locale des champs de vecteurs sur $M \times N$, relativement à la carte $(U \times V, \phi \times \psi) \in atl(M \times N)$, on déduit que deux formes différentielles ω et $\overline{\omega}$ sur $M \times N$ coïncident si et seulement si elles coïncident sur les relèvements horizontales et verticales des champs de vecteurs respectivement de M et N.

D'une façon générale, on a :

Proposition 1.3 : Si ω, $\overline{\omega}$ sont deux champs tenseurs de type $(0, r)$ (resp. $(1, r)$) tels que :

$$\omega(X_1, \cdots, X_r) = \overline{\omega}(X_1, \cdots, X_r)$$

pour tout $X_i \in H_M \cup H_N$, $i \in \{1, \cdots, r\}$ alors $\omega = \overline{\omega}$.

D'autre part, pour tout $X_i \in H(M)$, $Y_i \in H(N)$, $f \in C^\infty(M)$ et $g \in C^\infty(N)$ on a directement :

$$X_1^h(f^h) = (X_1(f))^h \quad , \quad X_1^h(g^v) = 0$$
$$Y_1^v(f^h) = 0 \quad , \quad Y_1^v(g^v) = (Y_1(g))^v$$
$$\left[X_1^h, X_2^h\right] = \left[X_1, X_2\right]^h \ , \quad \left[Y_1^v, Y_2^v\right] = \left[Y_1, Y_2\right]^v \ ,$$
$$\left[X_1^h, Y_2^v\right] = 0$$
$$\left(fX_1\right)^h = f^h X_1^h \qquad , \qquad \left(gY_1\right)^v = g^v Y_1^v$$

On a aussi les résultats de représentation des champs de vecteurs sur une variété produit :

1) Tout champ de vecteurs $\widetilde{Y}$ sur $M \times N$ s'écrit d'une manière unique sous la forme
$\widetilde{Y}_{(x,y)} = \left(\widetilde{Y}_y\right)^h_{(x,y)} + \left(\widetilde{Y}_x\right)^v_{(x,y)}$ où $(x,y) \in M \times N$,
$\widetilde{Y}_x \in H(N)$ et $\widetilde{Y}_y \in H(M)$ tels que :
$\widetilde{Y}_y(x) = d_{(x,y)}\pi(\widetilde{Y}_{(x,y)})$, $\widetilde{Y}_x(y) = d_{(x,y)}\sigma(\widetilde{Y}_{(x,y)})$

2) $H(M)$ et $H(N)$ sont des sous-algèbres de Lie de $H(M \times N)$ tels que
$H(M) \oplus H(N) \underset{\neq}{\subset} H(M \times N)$.

Proposition 1.4 :
Si ω est un champ tenseurs de type $(0,r)$ (resp. $(1,r)$) sur M, alors il existe un unique champ de tenseurs ω^h sur $M \times N$ de type $(0,r)$ (resp. $(1,r)$) tel que :

$$\omega^h(X_1^h, \cdots, X_r^h) = \left(\omega(X_1, \cdots, X_r)\right)^h$$

et $$\omega^h(Z_1, \cdots, Z_r) = 0$$

pour tout $X_1, \cdots, X_r \in H(M)$ et $Z_1, \cdots, Z_r \in H(M) \cup H(N)$ où il existe au moins $i \in \{1, \cdots, r\}$ tel que $Z_i \in H(N)$.

Preuve : Pour l'existence on prend $\omega^h = \pi^*\omega$.
L'unicité de ω^h découle de la proposition (2.3).
Ce résultat reste vrai pour le relèvement vertical des champs de tenseurs de type $(0,r)$ et $(1,r)$ sur N.

Corollaire 1.5 :
Si ω et $\widetilde{\omega}$ sont deux champs de tenseurs de type $(0,r)$ (resp. $(1,r)$) sur M et N respectivement, alors il existe un unique champ de tenseurs $\varpi = \omega \oplus \widetilde{\omega}$ de type $(0,r)$ (resp. $(1,r)$) sur $M \times N$.

Proposition 1.6 :

Soient ∇ *et* $\widetilde{\nabla}$ deux connexions linéaires sur $M \times N$.
Si pour tout $X, Y \in H_M \cup H_N$ on a $\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y$, alors $\nabla = \widetilde{\nabla}$.

Preuve :Si $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ et $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n})$ sont des bases locales des champs de vecteurs relativement aux cartes $(U,\phi) \in atl(M)$ et $(V,\psi) \in atl(N)$, alors si

$X = X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})^h + X^{j+m}(\frac{\partial}{\partial y_j})^v$ et

$Y = Y^i(\frac{\partial}{\partial x_i})^h + Y^{j+m}(\frac{\partial}{\partial y_j})^v$, on a :

$$\nabla_X Y =$$
$$X^i\left[Y^s \nabla_{(\frac{\partial}{\partial x_i})^h}(\frac{\partial}{\partial x_s})^h + (\frac{\partial}{\partial x_i})^h(Y^s)(\frac{\partial}{\partial x_s})^h\right] +$$
$$X^i\left[Y^{t+m} \nabla_{(\frac{\partial}{\partial x_i})^h}(\frac{\partial}{\partial y_t})^v + (\frac{\partial}{\partial x_i})^h(Y^{t+m})(\frac{\partial}{\partial y_s})^v\right] +$$
$$X^{j+m}\left[Y^s \nabla_{(\frac{\partial}{\partial y_j})^v}(\frac{\partial}{\partial x_s})^h + (\frac{\partial}{\partial y_j})^v(Y^s)(\frac{\partial}{\partial x_s})^h\right] +$$
$$X^{j+m}\left[Y^{t+m} \nabla_{(\frac{\partial}{\partial y_j})^v}(\frac{\partial}{\partial y_t})^v + (\frac{\partial}{\partial y_j})^v(Y^{t+m})(\frac{\partial}{\partial y_t})^v\right]$$
$$= \widetilde{\nabla}_X Y$$

Il découle immédiatement de la proposition (2.4) que si $(M, \overset{M}{\nabla})$ et $(N, \overset{N}{\nabla})$ sont deux connexions linéaires respectivement sur M et N, alors il existe une unique connexion produit ∇ sur $M \times N$ telle que

$$\nabla_{X_1^h} X_2^h = (\overset{M}{\nabla}_{X_1} X_2)^h \quad , \quad \nabla_{Y_1^v} Y_2^v = (\overset{N}{\nabla}_{Y_1} Y_2)^v$$
$$\nabla_{X_1^h} Y_2^v = 0 \qquad , \qquad \nabla_{Y_1^v} X_2^h = 0$$

pour tout $X_1, X_2 \in H(M)$ et $Y_1, Y_2 \in H(N)$.

Proposition 1.7 :
Si T, T_M, T_N (resp. R, R_M, R_N) désignent respectivement les tenseurs de torsion (resp. de courbure) sur $M \times N$ M et N, alors

$$T = T_M^h + T_N^v \quad , \quad R = R_M^h + R_N^v \tag{4}$$

Preuve :
Si $X_1, X_2, X_3 \in H(M)$ et $Y_1, Y_2, Y_3 \in H(N)$., alors

$$T(X_1^h, X_2^h) = \nabla_{X_1^h} X_2^h - \nabla_{X_2^h} X_1^h - [X_1^h, X_2^h] =$$

$$(\overset{M}{\nabla}_{X_1} X_2)^h - (\overset{M}{\nabla}_{X_2} X_1)^h - [X_1, X_2]^h =$$

$$\left(\overset{M}{\nabla}_{X_1} X_2 - \overset{M}{\nabla}_{X_2} X_1 - [X_1, X_2]\right)^h =$$

$$(T_M(X_1, X_2))^h =$$

$$T_M^h(X_1^h, X_2^h) + T_N^v(X_1^h, X_2^h) \,. T(Y_1^v, Y_2^v) =$$
$$\nabla_{Y_1^v} Y_2^v - \nabla_{Y_2^v} Y_1^v - [Y_1^v, Y_2^v] =$$
$$T_M^h(Y_1^v, Y_2^v) + T_N^v(Y_1^v, Y_2^v)$$
$$T(X_1^h, Y_2^v) = T_M^h(X_1^h, Y_2^v) + T_N^v(X_1^h, Y_2^v) = 0$$

Du corollaire (2.5) on déduit que $T = T_M^h + T_N^v$, de la même façon on a $R = R_M^h + R_N^v$.

Par conséquent, on obtient les résultats :
- $M \times N$ est sans torsion si et seulement si M et N sont sans torsion.
- $M \times N$ est sans courbure si et seulement si M et N sont sans courbure.

2. Métrique diagonale produit

Si (M, g_M) et (N, g_N) sont deux variétés Riemanniennes de dimension m et n, respectivement, alors $g^D = g_M^h \oplus g_N^v$ est une métrique diagonale sur $M \times N$ telle que :

$$g^D(X^h, Y^h) = g_M(X, Y)^h \quad ,$$
$$g^D(X^v, Y^v) = g_N(X, Y)^v \quad ,$$
$$g^D(X^h, Y^v) = 0$$

$(M \times N, g^D)$ est dite variété Riemannienne produit.

Les propriétés géométriques d'une variété produit sont caractérisées par les tenseurs de type $(0, r)$ (resp. $(1, r)$) de la façon suivante :

Cas (0,2), il s'agit de la métrique g^D associé à la Connexion de Levi-Civita ∇ est exprimée à l'aide de la formule de Koszul ([6]), par :

$$g^D(\nabla_{X_1^h} Y_1^h, Z_1^h) =$$
$$\frac{1}{2}\left\{X_1^h(g^D(Y_1^h, Z_1^h)) + Y_1^h(g^D(X_1^h, Z_1^h)) - Z_1^h(g^D(X_1^h, Y_1^h))\right\}$$
(5)
$$+ g^D(Z_1^h, [X_1^h, Y_1^h]) + g^D(Y_1^h, [Z_1^h, X_1^h]) - g^D(X_1^h, [Y_1^h, Z_1^h])$$
$$= g^D((\overset{M}{\nabla}_{X_1} Y_1)^h, Z_1^h)$$

$$g^D(\nabla_{X_2^v} Y_2^v, Z_2^v) = g^D((\overset{N}{\nabla}_{X_2} Y_2)^v, Z_2^v) .$$

Du fait que g^D est de torsion libre, $[X_1^h, X_2^v] = 0$, et en utilisant la proposition 2.4, on en déduit :

$$g^D(\nabla_{X_1^h} Y_1^h, Z_2^v) = g^D(\nabla_{X_1^h} Y_2^v, Z_1^h) = g^D(\nabla_{X_1^h} Y_2^v, Z_2^v) =$$
$$g^D(\nabla_{X_2^v} Y_2^v, Z_1^h) = 0$$
$$\nabla_{X_1^h} Y_1^h = (\overset{M}{\nabla}_{X_1} Y_1)^h \ , \qquad \nabla_{X_2^v} Y_2^v = (\overset{N}{\nabla}_{X_2} Y_2)^v \ ,$$
$$\nabla_{X_1^h} X_2^v = \nabla_{X_2^v} X_1^h = 0$$

pour tout $X_1, Y_1, Z_1 \in H(M)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in H(N)$.

Cas (1,2), c'est le tenseur de Ricci de $(M \times N, g^D)$, noté Ric.

Proposition 2.1 :
Si $X, Y \in H(M)$ et , $U, V \in H(N)$, alors on a :

$$Ric(X^h, Y^h) = (Ric_M(X, Y))^h$$
$$Ric(U^v, V^v) = (Ric_N(U, V))^v$$
$$Ric(X^h, U^v) = 0$$

Preuve :
Soit $\{E_1, \cdots, E_n\}$ (resp. $\{E_{m+1}, \cdots, E_{m+n}\}$) une base orthonormale locale des champs de vecteurs relativement à une carte (u, ϕ) sur M (resp. (v, φ) sur N), $\forall p \in u \times v$ on a:

$$Ric(X^h, Y^h)_p = \sum_{i=1}^{n} g^D(R(E_i^h, X^h)Y^h, E_i^h)_p +$$
$$\sum_{i=m+1}^{m+n} g^D(R(E_i^v, X^h)Y^h, E_i^v)_p$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g_M(R_M(E_i, X)Y, E_i)_p^h$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} g_M (R_M (E_i, X)Y, E_i) \right)_p^h = \left(Ric_M (X,Y) \right)_p^h$$

On obtient de la même façon les autres résultats.
En vertu des propositions précédentes et de la définition de la dérivée covariante ∇R du tenseur de courbure on a :

Proposition 2.2 :
Si $X,Y,Z,H \in H(M)$ et , $U,V,W,L \in H(N)$, alors on a

$$(\nabla R)(H^h, X^h, Y^h, Z^h) = \left((\overset{M}{\nabla} R_M)(H,X,Y,Z) \right)^h$$

$$(\nabla R)(L^v, U^v, V^v, W^v) = \left((\overset{N}{\nabla} R_N)(L,U,V,W) \right)^v$$

(6)

$$(\nabla R)(H^h, U^v, V^v, W^v) = (\nabla R)(H^h, X^h, U^v, Z^h) = 0$$

Corollaire 2.3 :
Soient $(M \times N, g^D)$ la variété Riemannienne produit avec $\sigma(p,q)$ sa courbure scalaire et $\{e_1^h, \cdots, e_n^h, e_{n+1}^v, \cdots, e_{n+m}^v\}$ une base orthonormale de $T_{(p,q)}(M \times N)$ où $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de $T_p M$ et $\{e_{n+1}, \cdots, e_{n+m}\}$ une base orthonormale de $T_q N$, alors $\sigma(p,q) = \sigma_M(p) + \sigma_N(q)$.

Cas (0,4):
il s'agit du tenseur K de courbure Riemannienne-Christoffel de $(M \times N, g^D)$. Si $X,Y,Z,H \in H(M)$ et , $U,V,W,L \in H(N)$, à partir des résultats précédents on établi directement les identités suivantes:

$$K(X^h, Y^h, Z^h, H^h) = \left(K_M(X,Y,Z,H) \right)^h$$
$$K(U^v, V^v, W^v, L^v) = \left(K_N(U,V,W,L) \right)^v$$
$$K(X^h, Y^h, Z^h, L^v) = K(U^v, V^v, W^v, X^h) = 0$$

Les résultats principaux de cet article sont les suivant :

Théorème 2.4 :
Soit $(M \times N, g^D)$ la variété Riemannienne produit, alors

1- $(M \times N, g^D)$ est localement symétrique si et seulement si (M, g_M) et (N, g_N) sont localement symétriques.

2- $(M \times N, g^D)$ est plate si et seulement si (M, g_M) et (N, g_N) sont plates.

3- $(M \times N, g^D)$ est plate de Ricci si et seulement si (M, g_M) et (N, g_N) sont plates de Ricci.

Ce premier résultat est déjà obtenu par Atçeken dans ([5]), néanmoins les expressions locales que nous trouvons sont naturellement plus techniques elles utilisent les champs de tenseurs de type $(1,2)$ et $(1,r)$; En particulier, si deux variétés sont à courbures sectionenelles constantes leur produit peut posséder une courbure sectionnelle non constante contrairement à ce qui a été affirmé par Atçeken ([5]).

Théorème 2.5 :

Soit $(M \times N, g^D)$ une variété Riemannienne produit des variétés Riemanniennes (M, g_M) et (N, g_N). Si $(M \times N, g^D)$ a une courbure sectionnelle constante k , alors (M, g_M) et (N, g_N) ont des courbures sectionnelles constantes égales à k .

Preuve :
Si $(M \times N, g^D)$ a une courbure sectionnelle constante, alors $K(X,Y,Z,X) = 0$ pour tout champ de vecteurs orthonormaux X,Y,Z dans $M \times N$ ([3]).
Si $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ et $\{X_2, Y_2, Z_2\}$ sont des champs de vecteurs orthonormaux dans $M \; et \; N$ respectivement, alors $\{X_1^h, Y_1^h, Z_1^h\}$ et $\{X_2^v, Y_2^v, Z_2^v\}$ sont des champs de vecteurs orthonormaux dans $M \times N$, on a d'une part

$$\left(K_M(X_1, Y_1, Z_1, X_1) \right)^h = K(X_1^h, Y_1^h, Z_1^h, X_1^h) = 0$$
$$\left(K_N(X_2, Y_2, Z_2, X_2) \right)^v = K(X_2^v, Y_2^v, Z_2^v, X_2^v) = 0$$

d'autre part si $\{X_1, Y_1\}$ (resp. $\{X_2, Y_2\}$ sont des champs de vecteurs linéairement indépendants dans $M \; (resp. \; N)$, alors $\{X_1^h, Y_1^h\}$ (resp. $\{X_2^v, Y_2^v\}$ sont des champs de vecteurs linéairement indépendants dans $M \times N$, de plus

$$k = \frac{g^D(R(X_1^h, Y_1^h)Y_1^h, X_1^h)}{g^D(X_1^h, X_1^h) g^D(Y_1^h, Y_1^h) - g^D(X_1^h, Y_1^h)^2}$$
$$= \left(\frac{g_M(R(X_1, Y_1)Y_1, X_1)}{g_M(X_1, X_1) g_M(Y_1, Y_1) - g_M(X_1, Y_1)^2} \right)^h$$

$$= \frac{g^D(R(X_2^v,Y_2^v)Y_2^v,X_2^v)}{g^D(X_2^v,X_2^v)g^D(Y_2^v,Y_2^v)-g^D(X_2^v,Y_2^v)^2}$$

$$= \left(\frac{g_N(R(X_2,Y_2)Y_2,X_2)}{g_N(X_2,X_2)g_N(Y_2,Y_2)-g_N(X_2,Y_2)^2}\right)^v$$

d'où

$$\frac{g_M(R(X_1,Y_1)Y_1,X_1)}{g_M(X_1,X_1)g_M(Y_1,Y_1)-g_M(X_1,Y_1)^2} = k = \frac{g_N(R(X_2,Y_2)Y_2,X_2)}{g_N(X_2,X_2)g_N(Y_2,Y_2)-g_N(X_2,Y_2)^2}$$

Remarque 2.6 :

Si (M,g_M) et (N,g_N) sont deux variétés de courbures sectionnelles constantes k_1 *et* k_2 $(k_1 \neq k_2)$, alors la courbure sectionnelle de la variété produit $M \times N$ n'est pas constante.

De cela on déduit que la réciproque du théorème 4 proposé dans ([5]) n'est pas toujours vraie.

Théorème 3.7 :

Soit (M,g_M) une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante non nulle k, alors la variété Riemannienne $(M\times M, g^D)$ n'a pas de courbure sectionnelle constante.

Preuve :

Soit $\{X,Y\}$ deux vecteurs linéairement indépendants dans M. Considérons $A = X^h + Y^v$, $B = Y^h - X^v$, donc A et B sont linéairement indépendants dans $M\times M$,

$$g^D(A,B) = (g_M(X,Y))^h - (g_M(X,Y))^v$$
$$g^D(A,A) = (g_M(X,X))^h + (g_M(Y,Y))^v$$
$$g^D(B,B) = (g_M(X,X))^v + (g_M(Y,Y))^h$$

mais $g^D(A,B)_{(x,x)} = 0$, alors la courbure sectionnelle $K(A,B)$ est donnée par

$$K(A,B) = \frac{g^D(R(A,B)B,A)}{g^D(A,A)g^D(B,B) - g^D(A,B)^2}$$

$\forall x \in M$:

$$K_{(x,x)}(A,B) = \frac{2g_M(R_M(X_x,Y_x)Y_x,X_x)}{\left(g_M(X_x,X_x)+g_M(Y_x,Y_x)\right)^2}$$

$$= \frac{2g_M(R_M(X_x,Y_x)Y_x,X_x)}{g_M(X_x,X_x)g_M(Y_x,Y_x)-g_M(X_x,Y_x)^2} . \frac{g_M(X_x,X_x)g_M(Y_x,Y_x)-g_M(X_x,Y_x)^2}{\left(g_M(X_x,X_x)+g_M(Y_x,Y_x)\right)^2}$$

$$= 2k.\frac{g_M(X_x,X_x)g_M(Y_x,Y_x)-g_M(X_x,Y_x)^2}{\left(g_M(X_x,X_x)+g_M(Y_x,Y_x)\right)^2}$$

Si X_x, Y_x sont orthonormaux, alors pour tout $\alpha \in IR$, on a

$$K_{(x,x)}(X^h+\alpha Y^v, \alpha Y^h - X^v) = 2k.\frac{g_M(X_x,X_x)g_M(\alpha Y_x,\alpha Y_x)-g_M(X_x,\alpha Y_x)^2}{\left(g_M(X_x,X_x)+g_M(\alpha Y_x,\alpha Y_x)\right)^2}$$

$$= 2k\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$$

donc $K_{(x,x)}$ est non constante

Contre exemple : Cas de la sphère S^3

On prend les champs de vecteurs $X_{(x,y,z)} = (-y,x,0)$, $Y_{(x,y,z)} = (-z,0,x)$, où IR^3 est muni de la structure hilbertienne naturelle $< u,v >_{IR^3} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$

On a : $< X,Y >= yz$, $\|X\|^2 = x^2+y^2$, $\|Y\|^2 = x^2+z^2$ et $x^2+y^2+z^2 = 1$

d'où

$$K_{(p,p)}(X^h+Y^v, Y^h - X^v) = 2\frac{(x^2+y^2)(x^2+z^2)-y^2z^2}{(2x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Références:

|1| O'Neill B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1983.

|2| Chen B.Y., Geometry of submanifolds, Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

|3|Chen.B.Y., Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific, 1984.

|4|B.Y. Chen, Geometry of warped products as Riemanniann submanifolds and related problems, Soochow J.Math. 28 (2002), 125-156.

|5| Atceken, M., and Keles, S., On the product Riemannian manifold. Differential Geometry-Dynamical systems. Vol.5, No.1, 2003, pp.1-8.

|6| S.Gudmundssun: An introduction to Riemannian Geometry, Lund university, 2000.