Sciences & Technologie **A – N°24** Décembre (2006), pp. 25-30

REGRESSION NON PARAMETRIQUE DANS UN MODELE GAUSSIEN

Reçu le 14/11/04 – Accepté le 12/09/2005

Résumé

L'objet de ce travail est de construire des estimateurs de régression non paramétrique asymptotiquement optimaux, sous l'hypothèse que les lois sous-jacentes sont gaussiennes. Les résultats que nous obtenons présentent l'intérêt d'être directement applicables en analyse exploratoire des données.

***Mots clés**: Estimation de la densité, estimation de la régression, estimation à noyau, bandes de confiance.*

Abstract

In this work, a method of constructing nonparametric asymptotically optimal estimators is presented. Assuming Gaussian underlying distributions, straightforward applications in exploratory data analysis may be deduced from our results.

***Keywords**: Density estimation, regression estimation, kernel estimation, confidence bounds.*

N. NEMOUCHI
Z. MOHDEB
Département de Mathématique,
Université Mentouri Constantine,
Algérie

Classification AMS : 62G20,62G35,62505

ملخص

يهدف هذا العمل إلى إنشاء مقدرات تقهقر غير وسيطية مقاربة قصوى، وذلك بفرض كون القوانين المتجاورة قوصية. تمثل النتائج المتحصل عليها أهمية كونها مطبقة مباشرة في التحليل الاستكشافي للمعطيات.

***الكلمات المفتاحية:** تقدير الكثافة، تقدير التقهقر، تقدير بالنواة، شريط الثقة*

Soient (X_1,Y_1), (X_2,Y_2),… des couples aléatoires à valeurs dans R^2 et de même loi que (X,Y). On suppose X et Y sont de loi jointe normale centrée d'écarts types respectifs $\sigma_X > 0$ et $\sigma_Y > 0$ et de coefficient de corrélation $\rho \in (-1,1)$ inconnus.

Nous adoptons les notations et hypothèses suivantes :

- $I = [a,b]$ et $J = [a',b']$ dénotent deux intervalles fixés de R tels que
$$-\infty < a' < a < b < b' < +\infty .$$
- On note par $|I| = b - a$ la mesure de Lebesgue de I .
- K une fonction noyau mesurable vérifiant:
  - $(K.1)$ K est une fonction à variation bornée sur R ;
  - $(K.2)$ $\int_R K(t)\,dt = 1;$
  - $(K.3)$ $[t^2K] = \int_R t^2 K(t)\,dt < \infty;$
  - $(K.4)$ $[K^2] = \int_R K^2(t)\,dt < \infty;$
  - $(K.5)$ $K(u) = 0$ pour $u \notin \left[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right]$ pour un certain $\alpha \in]0,\infty[$.

Nous poserons, $\forall u \in R,\ log_{\theta,K}\left(\theta \vee u\left\{\int_R K^2(t)\,dt\right\}\right)$, où $\theta > 1$ est une constante qui sera précisée plus loin.

Dans ce modèle, pour tout $x \in J$, la fonction de régression de $E(Y \mid X = x)$ et la variance conditionnelle de Y sachant $X = x$ sont bien définies et données par :

$$r(x) = E(Y \mid X = x) = \int_R y \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} x,$$

$$v^2(x) = Var(Y \mid X = x) = \int_R [y - E(Y \mid X = x)]^2 \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy = (1-\rho^2)\sigma_Y^2 .$$

Dans ces expressions,

- $f_X(x)$ désigne la densité marginale de loi $N(0,\sigma_X^2)$ associée à la variable aléatoire *X*,
- $f_{X,Y}(x,y)$ désigne la densité jointe de (X,Y).

Les estimateurs non paramétriques à noyaux de $f_X(x)$, $r(x)$ et $v^2(x)$ dus à Akaike (1954), Rosenblatt (1956), Parzen (1962), Nadaraya (1964) et Watson (1964) sont définis comme suit. Soit $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de nombres positifs.

1) L'estimateur à noyau de la densité $f_X(x)$ est donné par :

$$f_X(x;h_n) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\tfrac{x-X_i}{h_n}\right).$$

$$r_n(x;h_n) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)} & si \quad \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \neq 0, \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i & si \quad \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) = 0. \end{cases}$$

$$v_n^2(x;h_n) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} [Y_i - r_n(x;h_n)]^2 K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)} & si \quad \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \neq 0, \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 & si \quad \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\hat{E}\ r_n(x;h_n) = \begin{cases} \dfrac{E\left\{Y K\left(\frac{x-X}{h_n}\right)\right\}}{E\left\{K\left(\frac{x-X}{h_n}\right)\right\}} & si \quad E\left\{K\left(\frac{x-X}{h_n}\right)\right\} \neq 0, \\ E(Y) & si \quad E\left\{K\left(\frac{x-X}{h_n}\right)\right\} = 0. \end{cases}$$

2) L'estimateur à noyau de la régression $r(x)$ est donné par :

3) L'estimateur à noyau de la variance conditionnelle $v^2(x)$est donné par :

Pour l'étude asymptotique de ces estimateurs, nous introduisons les facteurs de centrage suivants :

$$E\ f_X(x;h_n) = \frac{1}{h_n} E\ K\left(\tfrac{x-X}{h_n}\right),$$

Remarque

Si $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\hat{E}\ r_n(x;h_n) - E\ r_n(x;h_n)\right\} = 0.$$

Au cours des dernières décennies, la théorie de l'estimation non paramétrique de la densité et de la régression a fait l'objet de nombreux travaux, (voir Prakasa Rao (1983), Devroye et Györfi (1985), Silverman (1986), Devroye (1978), Nadaraya (1989), Roussas (1990), Härdle (1990), Scott (1992), Bosq et Lecoutre (1987), Wand et Jones (1985) et les références citées dans ces publications).

La convergence de ces estimateurs dépend crucialement du comportement asymptotique de h_n quand $n \to \infty$. Sous des conditions appropriées portant sur la loi de Y et satisfaites dans le cas gaussien considéré ici, Nadaraya (1989) a établi que les hypothèses $h_n \to 0$ et $nh_n \to \infty$ sont nécessaires et suffisantes pour que tout $x \in I$, fixé:

$$r_n(x;h_n) \xrightarrow{P} r(x) \ quand\ n \to \infty,$$

où $\xrightarrow{P}$ désigne la convergence en probabilité,

$$\hat{E}\ r_n(x;h_n) - E\ r_n(x;h_n) = O\left(\frac{1}{nh_n}\right) \ quand\ n \to \infty,$$

$$\hat{E}\ r_n(x;h_n) - r(x) \to 0 \ quand\ n \to \infty.$$

Ces mêmes conditions sur h_n sont aussi nécessaires et suffisantes pour que tout $x \in I$, fixé

$$f_{X,n}(x;h_n) \xrightarrow{P} f_X(x) \ quand\ n \to \infty,$$

$$E\left[f_{X,n}(x;h_n)\right] \to f_X(x) \ quand\ n \to \infty.$$

On se référera aux travaux de Parzen (1962), Devroye et Györfi (1985), Silverman (1986), Izenman (1991), Scott (1992), Devroye et Lugosi (2001) pour un exposé de ces résultats.

Deheuvels et Mason (2004) ont obtenu une évaluation de la vitesse de convergence en probabilité de l'estimateur à noyau de la densité sur l'intervalle compact $I = [a,b]$, en montrant que:

si $h_n \to 0$ et $\dfrac{nh_n}{\log n} \to \infty$, alors :

$$\sqrt{\frac{nh_n}{2\log\left(\frac{1}{h_n}\right)}}\ \sup_{x\in I}\left|\frac{f_{X,n}(x;h_n) - E\left(f_{X,n}(x;h_n)\right)}{\sqrt{2\left[K^2\right]^2 f_X(x)}}\right| \xrightarrow{P} 1$$

quand $n \to \infty$.

La vitesse exacte de la convergence en probabilité de $r_n(x;h_n)$ est due à Deheuvels et Mason (2004) (voir également Einmahl et Mason (2000), Härdle, Jansen et Serfling (1988)). Deheuvels et Mason (2004) ont établi des bandes de confiance simultanées asymptotiques uniformes et non uniformes pour les fonctionnelles de la distribution, basées sur les estimateurs à noyau, de type Nadaraya-Watson pour la fonction de régression et le noyau de type Akaike-Parsen-Rosenblatt pour la densité.

Remarque 1.2

Dans les travaux que nous avons cités les variables aléatoires X, Y suivent des lois quelconques, ayant une densité jointe satisfaisant des conditions de régularité minimales (cf. Deheuvels et Mason (2004)). Dans ce travail, nous supposons que le paramètre de lissage est une fonction de x, on le note par $h_n(x)$. A partir du calcul de $h_n(x)$, $x \in I$, optimisant les critères d'erreurs, le but de notre travail consiste à construire leur estimateur $\hat{h}_n(x)$ en fonction des estimateurs empiriques $\hat{\sigma}_X > 0$, $\hat{\sigma}_Y > 0$, $\hat{\rho}$, tels que

$$\frac{\hat{h}_n(x)}{h_n(x)} \xrightarrow{P} 1 \text{ quand } n \to \infty,$$

$\hat{h}_n(x)$ ainsi choisi, est tel que les conditions imposées par Deheuvels et Mason (2004) soient vérifiées, nous déduisons des bandes de confiance asymptotiques pour $f_X(x)$ (respectivement de $r(x)$ en fonction de $f_{X,n}(x;\hat{h}_n(x))$ (respectivement en fonction de $r_n(x;\hat{h}_n(x))$.

Dans la Section 2, nous présentons nos résultats. Les démonstrations sont données dans la Section 3.

1. RESULTATS

1.1. Evaluation de l'erreur quadratique moyenne de $f_{X,n}(x;h_n)$

D'après Wand et Jones (1995), l'erreur quadratique moyenne de $f_{X,n}(x;h_n)$ est donnée par :

$$E\left[f_{X,n}(x;h_n) - f_X(x)\right]^2$$
$$= Var\ f_{X,n}(x;h_n) + \left[E\ f_{X,n}(x;h_n) - f_X(x)\right]^2.$$

Cette quantité atteint son minimum en :

$$h_{n,1} = n^{-\frac{1}{5}}\left(\frac{f_X(x)\left[K^2\right]}{\left(f''_X(x)\left[t^2K\right]\right)^2}\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$= n^{-\frac{1}{5}}\sigma_X\left(\frac{\sqrt{2\pi}\left[K^2\right]exp\ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)^2}{\left[t^2K\right]^2\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2}-1\right)^2}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Comme σ_X^2 est inconnu, nous le remplaçons par son estimateur empirique

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)^2.$$

Nous obtenons alors

$$\hat{h}_{n,1}(x) = n^{-\frac{1}{5}}\hat{\sigma}_X\left(\frac{\sqrt{2\pi}\left[K^2\right]exp\ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\hat{\sigma}_X}\right)^2}{\left[t^2K\right]^2\left(\frac{x^2}{\hat{\sigma}_X^2}-1\right)^2}\right)^{\frac{1}{5}}. \qquad (2.1)$$

Posons

$$\Theta_{n,1}(x) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X}{\left[K^2\right]}}\left(\frac{\sqrt{(2\pi)^3}\left[K^2\right]^{\frac{1}{2}}exp\ \frac{3}{2}\left(\frac{x}{\hat{\sigma}_X}\right)^2}{\left[t^2K\right]\left|\frac{x^2}{\hat{\sigma}_X^2}-1\right|}\right)^{\frac{1}{5}}. \quad (2.2)$$

Nous constatons que $\hat{h}_{n,1}(x), \Theta_{n,1}(x)$ vérifient les conditions (B_1), (B_2), (Θ_1) de Deheuvels et Mason (2004), c'est-à-dire:

(B_1)

$$P\left(\inf_{x\in I} h_{n,1}(x) - \varepsilon n^{-\frac{1}{5}} \le \inf_{x\in I}\hat{h}_{n,1}(x) \le \sup_{x\in I}\hat{h}_{n;1}(x) \le \sup_{x\in I} h_{n,1}(x) + \varepsilon n^{-\frac{1}{5}}\right) \xrightarrow{P} 1$$

quand $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$;

(B_2)

$$P\left(\sup_{x\in I}\left|\frac{\hat{h}_{n,1}(x)}{h_n} - \frac{h_{n,1}(x)}{h_n}\right| \ge \varepsilon\right) \to 0$$

quand $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$;

(Θ_1)

$$P\left(\sup_{x\in I}\left|\frac{\Theta_{n,1}(x)}{\Theta_1(x)} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

quand $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$, où

$$\Theta_1(x) = \sqrt{\frac{\sigma_X}{\left[K^2\right]}}\left(\frac{\sqrt{(2\pi)^3}\left[K^2\right]^{\frac{1}{2}}exp\ \frac{3}{2}\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)^2}{\left[t^2K\right]\left|\frac{x^2}{\sigma_X^2}-1\right|}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

1.2. Evaluation de l'erreur quadratique moyenne intégrée de $f_{X,n}(x;h_n)$

D'après Wand et Jones (1995), l'erreur quadratique moyenne intégrée de $f_{X,n}(x;h_n)$ est donnée par :

$$\int_R E\left[f_{X,n}(x;h_n) - f_X(x)\right]^2 dx$$
$$= \frac{1}{n}\left[t^2K\right] + \int_R\left\{f''_X(x)\left[t^2K\right]\right\}^2 dx + o\left(h_n^2\right).$$

Cette quantité atteint son minimum en

$$h_{n,2} = n^{-\frac{1}{5}}\left(\frac{\left[K^2\right]}{\left[t^2K\right]^2\int_R\left[f''_X(x)\right]^2dx}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Posons

$$\hat{h}_{n,2} = n^{-\frac{1}{5}}\hat{\sigma}_X\left(\frac{8\sqrt{\pi}\left[K^2\right]}{3\left[t^2K\right]^2}\right)^{\frac{1}{5}} \qquad (2.3)$$

et

$$\Theta_{n,2}(x) = \left(\frac{\left[K^2\right]}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_X}exp\ \frac{-1}{2}\left(\frac{x}{\hat{\sigma}_X}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

Nous remarquons que $\hat{h}_{n,2}(x)$ vérifie la condition du Corollaire 2.2 de Deheuvels et Mason (2004) c'est-à-dire:

$$P\left(h_{n,2} - \varepsilon n^{-\frac{1}{5}} \le \hat{h}_{n,2} \le h_{n,2} + \varepsilon n^{-\frac{1}{5}}\right) \to 1,$$

quand $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

De plus, nous avons :

$$P\left(\sup_{x\in I}\left|\frac{\Theta_{n,2}(x)}{\Theta_2(x)} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0,$$

quand $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$,
avec

$$\Theta_2(x) = \frac{1}{\sqrt{f_X(x)[K^2]}}.$$

1.3. Evaluation de l'erreur quadratique moyenne de $r_n(x;h_n)$

D'une manière analogue, d'après Wand et Jones (1995), l'erreur quadratique moyenne de $r_n(x;h_n)$ est donnée par :

$$E[r_n(x;h_n) - r(x)]^2 = Var(r_n(x;h_n)) + [Er_n(x;h_n) - r(x)]^2$$

Cette quantité atteint son minimum en

$$h_{n,3} = n^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{\frac{\nu^2(x)}{f_X(x)}[K^2]}{\left(r''(x) + 2r'(x)\frac{f_X'(x)}{f_X(x)}[t^2K] \right)^2} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= n^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{\sqrt{2\pi}[K^2](1-\rho^2)\sigma_X^7 \exp \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)^2}{4[t^2K]^2 \rho^2 x^2} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Comme σ_X^2 et ρ sont inconnus, nous les remplaçons par leurs estimateurs empiriques $\hat{\sigma}_X^2$ et

$$\hat{\rho} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\left(Y_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j\right)}{\hat{\sigma}_X \, \hat{\sigma}_Y},$$

où

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j\right)^2.$$

Nous obtenons alors

$$\hat{h}_{n,3}(x) = n^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{\sqrt{2\pi}[K^2](1-\hat{\rho}^2)\hat{\sigma}_X^7 \exp \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\hat{\sigma}_X}\right)^2}{4[t^2K]^2 \hat{\rho}^2 x^2} \right)^{\frac{1}{5}} \qquad (2.5)$$

Posons

$$\Theta_{n,3}(x) = \left(\frac{(1-\hat{\rho}^2)|\hat{\rho}x|^{-1} \exp -\left(\frac{x}{\hat{\sigma}_X}\right)^2}{4\pi \hat{\sigma}_Y^5 \hat{\sigma}_X^{\frac{3}{2}} [K^2]^2 [t^2K]} \right)^{\frac{1}{5}}. \qquad (2.6)$$

De manière analogue, nous montrons que $\hat{h}_{n,3}(x)$, $\Theta_{n,3}(x)$ vérifient les conditions (B_1), (B_2), (Θ_1) de Deheuvels et Mason (2004) avec :

$$\Theta_3(x) = \left(\frac{(1-\rho^2)|\rho x|^{-1} \exp -\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)^2}{4\pi\sigma_Y^5 \sigma_X^{\frac{3}{2}} [K^2]^2 [t^2K]} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Remarque 1

Notons que, pour $h_n = n^{-\frac{1}{5}}$, les conditions H1, H2, H3 de Deheuvels et Mason (2004) sont vérifiées, c'est-à-dire :

(H1) $h_n \to 0$, quand $n \to \infty$;

(H2) $\frac{nh_n}{\log n} \to \infty$, quand $n \to \infty$;

(H3) il existe $p \geq \frac{5}{2}$ tel que $n^{1-\frac{2}{p}} h_n \log n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Théorème 1

Soient $\hat{h}_{n,1}(x)$, $\Theta_{n,1}(x)$ donnés par les formules (2.1) et (2.2), alors nous avons :

$$\left(\frac{n^{\frac{4}{5}}\hat{\sigma}_X}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{n^{-\frac{1}{5}}\hat{\sigma}_X}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \pm \Theta_{n,1}(x)\left[f_{X;n}(x;\hat{h}_{n,1}(x)) - f_X(x)\right] \xrightarrow{P} 1$$

quand $n \to \infty$.

Remarquons que, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, d'après le Théorème 1, nous avons :

$$\forall x \in I,$$
$$\lim_{n\to\infty} P\left(f_X(x) \in \left[f_{X,n}(x;\hat{h}_{n,1}(x)) - (1+\varepsilon)\Delta_{n,1}(x), \right.\right.$$
$$\left.\left. f_{X,n}(x;\hat{h}_{n,1}(x)) + (1+\varepsilon)\Delta_{n,1}(x) \right] \right) = 1 \qquad (2.7)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} P\left(f_X(x) \in \left\lfloor f_{X,n}(x;\hat{h}_{n,1}(x)) - (1-\varepsilon)\Delta_{n,1}(x), \right.\right.$$
$$\left.\left. f_{X,n}(x;\hat{h}_{n,1}(x)) + (1-\varepsilon)\Delta_{n,1}(x) \right\rfloor \right) = 0 \ , \qquad (2.8)$$

où

$$\Delta_{n,1}(x) = \left(\frac{2 \log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{n^{-\frac{1}{5}}\hat{\sigma}_X} \right)}{n^{\frac{4}{5}}\hat{\sigma}_X} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Theta_{n,1}(x)}.$$

Les relations (2.7) et (2.8) sont vérifiées pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons alors dire que les intervalles :

$$\left[f_{X,n}\left(x;\hat{h}_{n,1}(x)\right) - \Delta_{n,1}(x),\ f_{X,n}\left(x;\hat{h}_{n,1}(x)\right) + \Delta_{n,1}(x) \right]$$

constituent des bandes de confiance optimales simultanées asymptotiques, pour $f_X(x), \forall x \in I$.

Théorème 2

Soient $\hat{h}_{n,2}(x),\ \Theta_{n,2}(x)$ donnés par les formules (2.3) et (2.4), alors nous avons :

$$\left(\frac{n\hat{h}_{n,2}(x)}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{\hat{h}_{n,2}(x)} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \pm \Theta_{n,2}(x)\left[f_{X,n}\left(x;\hat{h}_{n,2}(x)\right) - f_X(x) \right] \xrightarrow{P} 1$$

quand $n \to \infty$.

Remarque 2

Ce résultat ne changera pas même si la loi jointe de X et Y n'est pas centrée, car h_n optimal minimisant l'erreur quadratique moyenne intégrée de $f_{X,n}(x;h_n)$ est toujours égal à $h_{n,2}$.

Théorème 3

Soient $\hat{h}_{n,3}(x),\ \Theta_{n,3}(x)$ donnés par les formules (2.5) et (2.6), alors nous avons

$$\left(\frac{n^{\frac{4}{5}}\hat{\sigma}_X}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{n^{-\frac{1}{5}}\hat{\sigma}_X} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \pm \Theta_{n,3}(x)\left[r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right) - r(x) \right] \xrightarrow{P} 1$$

quand $n \to \infty$.

Notons que, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ quand $n \to \infty$, d'après le Théorème 3, nous avons :

$$\forall x \in I,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(r(x) \in \left[r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right) - (1+\varepsilon)\Delta_{n,2}(x), \right.\right.$$

$$\left.\left. \left. r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right) + (1+\varepsilon)\Delta_{n,2}(x) \right] \right) = 1 \qquad (2.9)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} P\left(r(x) \in \left[r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right) - (1-\varepsilon)\Delta_{n,2}(x), \right.\right.$$

$$\left.\left. \left. r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right) + (1-\varepsilon)\Delta_{n,2}(x) \right] \right) = 0 , \qquad (2.10)$$

où

$$\Delta_{n,2}(x) = \left(\frac{2 \log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{n^{-\frac{1}{5}}\hat{\sigma}_X} \right)}{n^{\frac{4}{5}}\hat{\sigma}_X} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Theta_{n,3}(x)}.$$

Les relations (2.9) et (2.10) sont vérifiées pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons alors dire que les intervalles :

$$\left[r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right) - \Delta_{n,2}(x),\ r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right) + \Delta_{n,2}(x) \right]$$

constituent des bandes de confiance optimales simultanées asymptotiques, pour $r(x), \forall x \in I$.

2. DEMONSTRATIONS

2.1. Démonstration du Théorème 1

D'après le Théorème 1.2 de Deheuvels et Mason (2004), nous avons :

$$\left(\frac{nh_n}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{h_n} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \pm \Theta_{n,1}(x)\left[Ef_{X,n}\left(x;\hat{h}_{n,1}(x)\right) - f_{X,n}\left(x;\hat{h}_{n,1}(x)\right) \right] \xrightarrow{P} 1$$

quand $n \to \infty$, où $h_n = n^{-\frac{1}{5}}$.

Par ailleurs, pour ce choix de h_n, nous avons :

$$\left(\frac{nh_n}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{h_n} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \Theta_{n,1}(x)\left| Ef_{X,n}(x;h_n) - f_X(x) \right| \xrightarrow{P} 0$$

(voir, Nadaraya (1989)).

De plus, nous avons $\hat{\sigma}_X \xrightarrow{P} \sigma_X \in \left]0, \infty\right[$.

Donc $\hat{h}_{n,1}(x)$ défini par :

$$\hat{h}_{n,1}(x) = h_n\hat{\sigma}_X \left(\frac{\sqrt{2\pi}\left[K^2\right] exp\, \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\hat{\sigma}_X} \right)^2}{\left[t^2K\right]^2 \left(\frac{x^2}{\hat{\sigma}_X^2} - 1 \right)^2} \right)^{\frac{1}{5}}$$

vérifie :

$$\left(\frac{nh_n\hat{\sigma}_X}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{n^{-\frac{1}{5}}\hat{\sigma}_X}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \pm\Theta_{n,1}(x)\ \left[f_{X,n}\left(x;\hat{h}_{n,1}(x)\right)-f_X(x)\right] \xrightarrow{P} 1$$

quand $n\to\infty$ c'est-à-dire

$$\left(\frac{n^{\frac{4}{5}}\hat{\sigma}_X}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{n^{-\frac{1}{5}}\hat{\sigma}_X}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \pm\Theta_{n,1}(x)\ \left[f_{X,n}\left(x;\hat{h}_{n,1}(x)\right)-f_X(x)\right] \xrightarrow{P} 1,$$

quand $n\to\infty$.

2.2. Démonstration du Théorème 2

Ce théorème est une déduction du Corollaire 2.2 de Deheuvels et Mason (2004).

2.3. Démonstration du Théorème 3

Elle est similaire à la démonstration du Théorème 2.1. D'après le Théorème 1.1 de Deheuvels et Mason (2004), nous avons :

$$\left(\frac{nh_n}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{h_n}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \pm\Theta_{n,3}(x)\left[\hat{E}\,r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right)-r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right)\right] \xrightarrow{P} 1$$

quand $n\to\infty$, où $h_n=n^{-\frac{1}{5}}$ vérifie :

$$\left(\frac{nh_n}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{h_n}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \Theta_{n,3}(x)\left|\hat{E}\ r_n(x;h_n)-r(x)\right| \xrightarrow{P} 0$$

(voir, Nadaraya (1989)).

De plus, nous avons $\hat{\sigma}_X \xrightarrow{P} \sigma_X \in \left]0,\ \infty\right[$,et

$$\hat{h}_{n,3}(x)=h_n\hat{\sigma}_X\,\frac{\Phi_n(x)}{\Psi_n(x)},$$

où

$$\Phi_n(x)=\left[\sqrt{2\pi}\left[K^2\right]\ \left(1-\hat{\rho}^2\right)\exp\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\hat{\sigma}_X}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}}$$

et

$$\Psi_n(x)=\left(\frac{4\left[t^2K\right]^2\hat{\rho}^2\ x^2}{\hat{\sigma}_X}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Donc $\hat{h}_{n,3}(x)$ vérifie

$$\left(\frac{nh_n\hat{\sigma}_X}{2\log_{\theta,K}\left(\frac{|I|}{h_n\hat{\sigma}_X}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in I} \pm\Theta_{n,3}(x)\ \left[r_n\left(x;\hat{h}_{n,3}(x)\right)-r(x)\right] \xrightarrow{P} 1$$

quand $n\to\infty$.

REFERENCES

[1]- Akaike, H. (1954). An approximation of the density function. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **6**, 127-132.

[2]- Bosq, D. et Lecoutre, J. P. (1987). *Théorie de l'Estimation Fonctionnelle*. Economica, Paris.

[3]- Deheuvels, P. and Mason, D. M. (2004). General asymptotic confidence bands based on kernel-type function estimators. *Stat. Infer. Soc. Processes*, **7**, 225-277.

[4]- Devroye, L. (1978). The uniform convergence of the Nadaraya-Watson regression function Estimate. *Can. J. Statist.*, **6,** 179-191.

[5]- Devroye, L. and Györfi, L. (1985). *Nonparametric Density Estimation: The L_1 view*. Wiley, New York.

[6]- Devroye, L. and Lugosi, G. (2001). *Combinatorial methods in density estimation*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.

[7]- Einmahl, U. and Mason, D. M. (2000). An empirical process approach to the uniform consistency of kernel-type function estimators. *J. Theoretical Prob*., **13**, 1-37.

[8]- Härdle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press, Cambridge.

[9]- Härdle, W., Jansen, P. and Serfling, R. (1988). Strong uniform consistency rates for estimators of conditional functionals. *Ann. Statist.*, **16**, 1428-1449.

[10]- Izenman, A. J. (1991). Recents developments in nonparametric density estimation. *J. Amer. Statist. Assoc*., **86**, no. 413, 205-224.

[11]- Nadaraya, E. A. (1964). On estimating regression. *Theor. Prob. Appl.*, **9**, 141-142.

[12]- Nadaraya, E. A. (1989). *Nonparametric Estimation of Probability Densities and Regression Curves*. Kluwer, Dordrecht.

[13]- Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist*. **33**, 1065-1076.

[14]- Prakasa Rao, B. L. S. (1983). *Nonparametric Functional Estimation*. Academic Press, New York.

[15]- Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.*, **27**, 832-837.

[16]- Roussas, G. (1990). Nonparametric Functional Estimation and Related Topics. NATO ASI series **355.** *Kluwer, Dordrecht.*

[17]- Scott, D. W. (1992*). Multivariate Density Estimation-Theory, Practice and Visualization.* Wiley, New York.

[18]- Silverman, B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis.* Chapman and Hall, London.

[19]- Wand, M. P. and Jones, M. C. (1995). *Kernel Smoothing*. Chapman and Hall, London.

[20]- Watson, G. S. (1964). Smooth Regression Analysis. *Sankhya A*, **26**, 359-372.