Sciences & Technologie **A** – **N°26**, Décembre. (2007), pp. 39-48

Etude Théorique et Numérique d'une Méthode de Point Intérieur pour la Résolution du Problème d'Inégalités Variationnelles

Reçu le 18/07/2005 – Accepté le 10/11/2007

H. GRAR
A.K. KERAGHEL

Département de mathématiques,
Université Abbas Ferhat, Sétif
Algérie

Résumé

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle alternative de type point intérieur pour résoudre le problème d'inégalités variationnelles noté (VIP). Ce dernier connu par son importance grandissante aussi bien sur le plan théorique que pratique, est malheureusement traité par des méthodes non pratiques (hypothèses trop restrictives, calcul pénalisant des projections). L'idée de progresser à l'intérieur du domaine des contraintes est à fait attrayante, car une fois mise au point elle élimine tous les handicapes algorithmiques ou presque. Cette idée est aussi motivée par le succès remarquable des techniques de point intérieur au niveau de la programmation mathématique en général. Nous avons pu mettre en œuvre plusieurs versions de l'algorithme issues d'une étude théorique approfondie dûe à Censor et al. [1998] et comprenant nos propres aménagements. Au cours de l'implémentation numérique, on a fait intervenir des problèmes mathématiques très importants. Les résultats obtenus sont très encourageants. Ils sont présentés dans un cadre comparatif signifiant.

Mots clés: Problème d'inégalités variationnelles, Opérateurs paramonotones, Distance de Bregman, Méthodes de point intérieur.

Abstract

In this paper, we present a method of interior point type to solve the variational inequalities problem (VIP). The later known for its significant importance in theoretical field as like practical one, is unfortunately treated via non practical methods (very large restrictive hypothesis, calculation with limited projections). Progressing in the interior constraints domain idea is very attractive since once established it eliminates nearly all algorithmic handicaps. This idea is also motivated by the remarkably success of the the interior point technics at the mathematical programming level. We were able to establish several versions of algorithm derived from theoretical study proposed by Censor and al. and containing our provided modifications. The algorithm was applied for some important mathematical problems and the obtained results are very promising. They are presented in a significant and comparative framework.

Keywords: Variational inequalities problem, Paramonotone operators, Bregman distance, Interior point method

ملخص

إن مسـالة المتـراجعات التغيـرية (م م ت) تكتسـي أهميـة كبيـرة يمكن إدراكـها من خـلال مختلف المسائل التطبيقيـة و الرياضيـة التي تشملها. إلا إن كل الطـرق المقترحة لمعالجتـها ذات طابـع نظري محض وتتطلب شروط قويـة غير قابلـة للتوظيف و خاصة عمليات الإسقاط على مجموعة القيـود.

و عليـه فكرة التنقل داخل مجموعـة القيـود من شانـها التخفيف كثيـترا من ثقل هده العمليـات نظريـا و عدديـا.

ومن هنـا يأتـي اهتمامنا بطريقة لنقـاط الداخليـة المقترحة من طرف .Censor et al سنة 1998 والتي توظف دوال و مسافـة Bregman .

فبعد دراسـة نوعيـة معمقـة لـهده الأعمـال استطعنـا أن نـحدد بـدقة نقـاط القـوة و الضعف لهده الطريقـة بحيث بينـا أن هناك تخفيض في شروط التقـارب قد يـؤدي إلى معالجة عدديـة ناجحـة آدا ما عرفنـا كيف أن نتجـاوز النقـاط السـوداء الأساسيـة في الطريقـة وهـي إيجـاد احد فوق المستوييـن المعنييـن بعمليـة الإسقـاط.

عدديـا استطعنـا ضبـط الطريقـة لحل مسائـل الرياضيـة هامـة لا يـزال بعضهـا محـل بحـث و دراسـة. و قد عرضنا النتائـج في إطـار مقارنـة مع طرق أخـرى الشـيء الـذي سمح لنـا بوضـع هده الطـريقـة في الـصدارة من حيث الفعـالية(العدديـة) على الأقل إلـى حد السـاعـة.

.

الكلمات المفتاحيـــة : مسـالة المتـراجعات التغيـرية, المؤثرات الشبـه رتيبة, طريقة النقـاط الداخليـة, مسافـة .

Introduction

Le problème d'inégalités variationnelles (VIP) consiste à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in C \text{ tel que :} \\ \langle F(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C \end{cases} \tag{1}$$

Où C est un sous-ensemble convexe fermé de R^n, et F est un opérateur continu dans R^n.

Désignons par T l'ensemble des solutions de (VIP).

Sur le plan théorique, (VIP) s'est développé à l'origine en1966 sous l'impulsion des spécialistes des équations aux dérivées partielles, en particulier Stampacchia et Herthaman. Actuellement, ce problème fait l'objet de recherche intensive dans le but de trouver une théorie riche et moins restrictive et élaborer des algorithmes convenables pour la résolution. L'intérêt que nous accordons à ce problème peut être mesuré à travers ses applications dans de différents domaines tels que les modèles d'équilibre économiques, les problèmes de transport en recherche opérationnelle [1-9-11-15-16].

De plus (VIP) est considéré comme une formulation unificatrice de plusieurs problèmes mathématiques tels les EDP, les systèmes non linéaires, les problèmes de complémentarité et certains problèmes d'optimisation.

Nous avons effectue une étude approfondie d'une nouvelle approche de point intérieur introduite par Censor [5] allant de l'aspect théorique à la mise en œuvre proprement dite. L'objectif est d'alléger le calcul des projections figurant dans les méthodes classiques et relaxer au mieux les hypothèses de convergence.

Notre travail est réparti comme suit : quelques définitions préliminaires sur les opérateurs de projection et la monotonie sont données à la première partie de la section 2.

La deuxième partie est consacrée aux méthodes classiques les plus importantes que nous présentons dans l'ordre chronologique des travaux, tout en dégageant les difficultés majeures qui tournent autour du calcul des projections.

La troisième section, traite essentiellement la nouvelle alternative et la convergence de son algorithme. Le mot clé dans tout ça est la distance généralisée de Bregman, qui permet de réduire considérablement le coût des projections en question. Ceci étant, cette approche présente certains inconvénients théoriques et numériques pour lesquels nous avons apporté des contributions intéressantes.

La dernière section traduit l'ensemble de nos efforts relatifs à cette alternative. En effet, il s'agit de la mise en œuvre de plusieurs versions de la méthode adaptées chacune pour une classe importante de problèmes mathématiques.

1- Préliminaires.

Dans cette section, on résume les propriétés de base et les définitions qui seront utiles pour notre article. R^n désigne l'espace des vecteurs réels à dimension *n*, menu de la norme Euclidienne $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ et le produit scalaire $x^T y, \ \forall x, y \in R^n$.

Soit C est un sous-ensemble convexe fermé non vide de R^n, P_C présente l'opérateur de projection orthogonale de R^n sur C.

La propriété principale de l'opérateur P_C est :

$$(x - P_C(x))^T (y - P_C(x)) \leq 0, \forall x \in R^n, \forall x \in C.$$

Pour toute constante $\alpha > 0$, il bien connu que (VIP) est équivalent à cette équation :

$$x = P_C(x - \alpha F(x)) \tag{2}$$

Définitions.

- F est monotone si $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in C.$
- F est fortement monotone s'il est existe une constante $\mu > 0$, tel que $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \forall x, y \in C.$
- F est paramonotone si F est monotone et satisfait : $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle = 0 \Rightarrow F(x) = F(y), \forall x, y \in C.$
- F est continu de Lipschitz s'il est existe L>0, tel que: $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in C$.

2- Survol des principales méthodes de projection.

Il existe une classe importante de méthodes dites de projection, inspirées fondamentalement des méthodes de l'optimisation. La théorie de ces méthodes est insuffisante et même parfois trop restrictive par ses hypothèses (la forte monotonie, la condition de Lipschitz,…). On va présenter dans ce qui suit, les méthodes de projection les plus célèbres pour la résolution de (VIP) et relatives au nouveau algorithme proposé.

Le schéma itératif de base est le suivant :

$$x^{k+1} = P_C\left(x^k - \alpha F\left(x^k\right)\right), \quad \forall \alpha > 0 \tag{3}$$

Cette procédure découle directement du problème de point fixe. La suite générée par ce schéma converge vers $\bar{x}$ la solution unique de (VIP) pour $\alpha \in \left]0, \frac{2\mu}{L^2}\right[$, (μ, L désignent respectivement les constantes de la forte monotonie et la continuité de Lipschitz), voir [2]. Si l'hypothèse de forte monotonie n'est pas satisfaite cette procédure risque de diverger pour n'importe quel choix de α même variable.

Une amélioration théorique de la procédure précédente était proposée par Korpolevich [14]. Les hypothèses sont la monotonie et condition de Lipschitz. Le schéma itératif associé est :

$$\begin{cases} y^k = P_C\left(x^k - \alpha F\left(x^k\right)\right) \\ x^{k+1} = P_C\left(x^k - \alpha F\left(y^k\right)\right) \end{cases} \tag{4}$$

Pour établir la convergence de cet algorithme, on démontre tout d'abord que pour $\alpha \in \left]0, \frac{1}{L}\right[$, le vecteur $x^k - \alpha F\left(y^k\right)$ est la projection de x^k sur l'hyperplan de normale $F\left(y^k\right)$ qui sépare x^k de l'ensemble *T* (car en absence de la forte monotonie de *F*, l'unicité de la solution n'est pas garantie), puis l'itéré x^{k+1} est obtenu à l'aide d'une autre projection sur *C*, ce qui entraîne $\left\|x^{k+1} - \bar{x}\right\| \le \left\|x^k - \bar{x}\right\|, \forall \bar{x} \in T$.

De même si l'hypothèse de Lipschitz est aussi éliminée, la décroissance de $\left\{\left\|x^k - \bar{x}\right\|\right\}, \forall \bar{x} \in T$ n'est pas garantie. Un choix judicieux (variable) de α_k est indispensable à chaque itération.

En se basant sur cette idée, les chercheurs ont pu développer une nouvelle variante de l'algorithme précédent connue par la méthode Korpolevich modifiée [10] où *F* est seulement continu monotone. La formule itérative correspondante s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} y^k = P_C\left(x^k - \sigma_k F\left(x^k\right)\right) \\ x^{k+1} = P_C\left(x^k - \lambda_k F\left(y^k\right)\right) \end{cases} \tag{5}$$

σ_k est déterminée par une procédure d'approximation de multiplicateur de telle façon que l'hyperplan H_k d'équation $F\left(y^k\right)^T\left(x - y^k\right) = 0$, sépare x^k de l'ensemble *T* et $x^k - \lambda_k F\left(y^k\right)$ est le projeté de x^k sur H_k, d'où : $\lambda_k = \left\langle F\left(y^k\right), x^k - y^k\right\rangle / \left\|F\left(y^k\right)\right\|^2$.

De même on a $\left\|x^{k+1} - \bar{x}\right\| \le \left\|x^k - \bar{x}\right\|, \forall \bar{x} \in T$. Ces aménagements permettent de récupérer la convergence sans avoir besoin de la condition de Lipschitz.

Remarque1.

Le problème majeur de tous ces algorithmes réside dans le calcul des projections qui dépend directement de la structure de *C*. A l'exception de quelques ensembles convexes, le calcul des ces projections est très coûteux voir même impossible. L'idée de progresser à l'intérieur de *C* devra nous conduire à un aspect algorithmique plus intéressant.

3- Méthode de point intérieur.

3.1. Eléments de base.

Cette alternative est introduite par Censor dans le but d'améliorer la théorie et réduire le calcul de projections. Le principe de cette méthode est le même que celui de la méthode de Korpolevich modifiée, mais les projections cette fois ci sont effectuées sur des hyperplans, ce qui est beaucoup plus simple. Les ingrédients de base pour cette approche sont les fonctions de Bregman à partir desquelles on définit une distance généralisée permettant des calculer les dites projections pour au moins une classe importante de convexes *C*.

3.1.1. Fonctions de Bregman.

C'est une classe de fonctions introduite par Bregman [4]. Ces fonctions et leurs distances associées étaient utilisées dans plusieurs domaines d'application en optimisation convexe [6-8-10].

Soit $\emptyset \ne S \subseteq R^n$ un convexe ouvert, on considère les deux fonctions suivantes :

$g : \bar{S} \to R$ une différentiable et

$D_g : \bar{S} \times S \to R^+$ telle que $D_g(x, y) = g(x) - g(y) - \langle \nabla g(y), x - y \rangle$.

On dit que *g* est une fonction de Bregman de zone *S* notée $g \in B_S$, si elle satisfait les conditions ci- dessous :

B$_1$: *g* est continue et strictement convexe sur $\bar{S}$.

B$_2$: $g \in C^2(S)$.

B$_3$: $\forall \alpha \in R$, les sections inférieures $L_1(y, \alpha) = \left\{x \in \bar{S} / D_g(x, y) \le \alpha\right\}$ et $L_2(x, \alpha) = \left\{y \in S / D_g(x, y) \le \alpha\right\}$ sont bornées, $\forall x \in S, \forall y \in \bar{S}$ respectivement.

B$_4$: Si $\left\{y^k\right\}$ est une suite de *S* qui converge vers y^*, alors $D_g\left(y^*, y^k\right) \to 0$ quand $k \to +\infty$

B$_5$: Si $\left\{x^k\right\}$ et $\left\{y^k\right\}$ sont deux suites telles que : $y^k \to y^*$, $\left\{x^k\right\}$ bornée, et $D_g\left(x^k, y^k\right) \to 0$ quand $k \to$, alors $x^k \to y^*$.

3.1.2. Distance de Bregman.

Soit $g \in B_S$, alors D_g l'application donnée précédemment, définit une distance généralisée (au sens qu'elle ne satisfait pas l'inégalité triangulaire) mais elle possède les propriétés suivantes :

P₁ : $\forall x \in \bar{S}, \forall y \in S, D_g(x,y) \geq 0.$

P₂ : $D_g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

P₃ :
$\forall x \in \bar{S}, \forall y \in S, \forall z \in S$ on a : $D_g(x,y) + D_g(y,z) - D_g(x,z) = \langle \nabla g(x) - \nabla g(y), x - y \rangle.$

Pour des raisons de convergence, on a besoin d'une condition supplémentaire sur *g* à savoir :

B₆ : $\forall u \in R^n, \exists\, x \in S$ tel que : $\nabla g(x) = u.$

Lemme 1. Sous les conditions **B₁** et **B₂,** on a : **B₆** $\Leftrightarrow$ **B₇** et **B₈** où

B₇ : Si $\{x^k\}$ est une suite qui converge vers $x \in \partial S$ (la frontière de *S*), alors :

$$\left\langle \nabla g(x^k), u - x^k \right\rangle = +\infty, \forall u \in R^n \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} D_g(u, x^k) = +\infty.$$

B₈ : Les ensembles de niveau de la fonction ω sont bornés, avec $\omega : S \to R^+$, et $\omega(x) = \|\nabla g(x)\|$.

3.1.3. Projection de Bregman.

Soit $g \in B_S$, $\emptyset \neq E \subseteq R^n$, un convexe fermé tel que : $E \cap S \neq \emptyset.$

Soit $y \in S$ et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\ D_g(x,y) \\ x \in E \cap \bar{S} \end{cases} \tag{6}$$

Alors, l'équation(6) admet une solution unique $\bar{x} \in S$ qui désigne la projection de Bregman de *y* sur l'ensemble *E*, noté $\bar{x} = P_{BE}(y)$.

Si *g* satisfait **B₇**, alors $\bar{x} \in S$, auquel cas :

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} \min\ D_g(x,y) \\ x \in E \end{cases}$$

Si de plus, *E* est un hyperplan $E = \{x \in R^n \,/\, a^T x = \beta\}$ avec $0 \neq a \in R^n$ et $\beta \in R,$ alors la solution est complètement caractérisée par les conditions de Karuch Kuhn Tuker (KKT).

Il existe $\lambda \in R$, tel que :

$$\begin{cases} \nabla g(\bar{x}) = \nabla g(y) - \lambda a \\ \langle a, \bar{x} \rangle = \beta \end{cases} \tag{7}$$

3.2. Présentation de la méthode.

Elle basée sur un ensemble de résultats que nous résumons ici :

Soit $F : R^n \to R^n$ et $g \in B_S$ satisfaisant **B₆**, tel que : $\bar{S} = C$ (l'ensemble des contraintes associé à (VIP)).

On définit les fonctions suivantes :

$h : S \times R_+^*,\ h(x,\sigma) = y$ où y est la solution du système

$$\nabla g(y) = \nabla g(x) - \sigma F(x) \tag{8}$$

$\phi, \varphi : S \times R_+^* \to R,$ où

$$\varphi(x,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \langle F(x), x - h(x,\sigma) \rangle \tag{9}$$

$$\bar{\varphi}(x,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \langle F(h(x,\sigma)), x - h(x,\sigma) \rangle \tag{10}$$

Et

$$\phi : S \to R \text{ où } \phi(x) = F(x)^T \left[\nabla^2 g(x)\right]^{-1} F(x) \tag{11}$$

On a les propriétés suivantes :

1. Sous l'hypothèse **B₆**, *h* est bien définie car dans ce cas *y* existe, est unique et appartient à *S*.
De plus, *h* est continue et $h(x,0) = x, \forall x \in S.$

2. Les fonctions $\varphi, \bar{\varphi}$ sont continues sur $S \times R_+^*$, et pour $\bar{x} \in S$ on a :

$$\lim_{(x,\sigma)\to(\bar{x},0)} \varphi(x,\sigma) = \lim_{(x,\sigma)\to(\bar{x},0)} \bar{\varphi}(x,\sigma) = \phi(\bar{x}) \geq 0.$$

Etant donné $x^k \in S$ tel que $F(x^k) \neq 0,$ on obtient les itérés y^k, x^{k+1} en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \nabla g(y^k) = \nabla g(x^k) - \sigma_k F(x^k) \Leftrightarrow y^k = (h(x^k), \sigma_k) \\ \nabla g(x^{k+1}) = \nabla g(x^k) - \lambda_k F(y^k) \\ \langle F(y^k), x^{k+1} - y^k \rangle = (1 - \alpha_k) \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle \end{cases}$$

Où $\alpha_k \in [\hat{\alpha}, 1]$ et $\hat{\alpha} > 0$.

Remarque 2.

De (7), on remarque que y^k n'est rien d'autre que la projection de Bregman de x^k sur un hyperplan de vecteur normal $F(x^k)$ (supposé non nul). Le scalaire σ_k est le multiplicateur correspondant dont le calcul nécessite des efforts considérables car l'hyperplan en question n'est pas véritablement connu. Le calcul de $\lambda_k > 0$ est beaucoup plus simple due celui de σ_k, du fait qu'on a plus d'informations concernant l'hyperplan H_k. Il passe par y^k, sépare x^k de l'ensemble *T* et $x^{k+1} = P_{HB}(x^k)$. Par conséquent, H_k est donné explicitement par l'équation: $\langle F(y^k), x^{k+1} - y^k \rangle = (1 - \alpha_k) \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle$.

3.3. Critères d'optimalité.

Proposition 1.

1) Si $F(\overline{x}) = 0 \Rightarrow \overline{x} \in T$.

2) Si $\overline{x} \in \text{int}(C)$ et $\overline{x} \in T \Rightarrow F(\overline{x}) = 0$, [12].

Malheureusement, le critère donné par 1) de la proposition 1 ne couvre pas l'éventualité où la solution $\overline{x} \in \partial S$ et $F(\overline{x}) \neq 0$. Nous avons pu régler ce problème comme la montre la proposition suivante.

Proposition 2. Soient $\overline{x}$ et $\overline{y}$ deux points d'accumulation respectivement des deux suites $\{x^k\}$ et $\{y^k\}$ définies par le système ((12)-(14)).

Si $F(\overline{x}) = F(\overline{y})$ alors $\overline{x} \in T$, [12].

On note que cette condition est vérifie sous la condition de la paramonotonie de F.

La démonstration de cette proposition se base sur plusieurs résultats. Pour plus de détails voir [5] et [12].

Remarque 2. Dans chaque de type de point intérieur, on remarque la présence d'une fonction barrière pour éviter que les itérés s'approchent de la frontière du domaine. Pour notre méthode, c'est la distance de Bregman qui joue ce rôle.

3.4. Algorithme de base.

Début d'algorithme

Pas 0 :

$k = 0, x^0 \in S, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ et ε une précision donnée.

Pas 1 : Si $\left\| F(x^k) \right\| \leq \varepsilon$, stop $x^k \in T$, sinon aller en pas 2.

Pas 2 : Sélection de σ_k : Choisir $\sigma_{\max} > 0$

Calculer $\varphi(x^k, \sigma_{\max}), \overline{\varphi}(x^k, \sigma_{\max})$ et $\phi(x^k)$.

Si

$$\overline{\varphi}(x^k, \sigma_{\max}) \geq \varepsilon_1 \max\{\varphi(x^k, \sigma_{\max}), \phi(x^k)\} \tag{15}$$

On prend $\sigma_k = \sigma_{\max}$, sinon choisir $\sigma_k \in]0, \sigma_{\max}[$ tel que:

$$\varepsilon_1 \max\{\varphi(x^k, \sigma_{\max}), \phi(x^k)\} \leq \overline{\varphi}(x^k, \sigma_{\max}) \leq (1 - \varepsilon_2) \max\{\varphi(x^k, \sigma_{\max}), \phi(x^k)\} \tag{16}$$

On prend $\sigma_k = \sigma$, puis on calcule $y^k = h(x^k, \sigma_k)$.

Pas 3 : Si $\left\| F(x^k) - F(y^k) \right\| \leq \varepsilon$, stop $x^k \in T$, sinon aller en pas 4.

Pas 4 : Projection de Bregman : résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \nabla g(x^{k+1}) = \nabla g(x^k) - \lambda_k F(y^k) \\ \langle F(y^k), x^{k+1} - y^k \rangle = (1 - \alpha_k)\langle F(y^k), x^k - y^k \rangle \end{cases}$$

Où les inconnus sont x^{k+1}, λ_k.

Posons $k = k+1$, et aller en pas 1.

Fin d'algorithme.

3.5. Convergence de l'algorithme.

3.5.1. L'existence de l'intervalle

$[\sigma', \sigma''] \subset]0, \sigma_{\max}[$

On considère la fonction suivante :

$$\zeta(\sigma) = \frac{\overline{\varphi}(x^k, \sigma)}{\max\{\varphi(x^k, \sigma), \phi(x^k)\}}.$$

D'une part, en utilisant les propriétés des fonctions φ et $\overline{\varphi}$ on obtient $\lim\limits_{\sigma \to 0} \zeta(\sigma) = 1$.

D'autre part, la continuité de la fonction $\zeta, \zeta(\sigma_{\max})$ et $\varepsilon_1 < 1 - \varepsilon_2$ assurent l'existence d'un intervalle $[\sigma', \sigma''] \subset]0, \sigma_{\max}[$ tel que $\forall \sigma \in [\sigma', \sigma''] : \varepsilon_1 < \zeta(\sigma) < 1 - \varepsilon_2$.

3.5.2. Sélection de σ_k.

Voir [12]. Etant donné, l'hyperplan H_k défini par (13), si $F(x^k) \neq 0$ on a :

- $\langle F(y^k), z - y^k \rangle - (1 - \alpha_k)\langle F(y^k), x^k - y^k \rangle \leq 0, \ \forall z \in T$
- $\langle F(y^k), x^k - y^k \rangle - (1 - \alpha_k)\langle F(y^k), x^k - y^k \rangle = \alpha_k, \ \langle F(y^k)$

Ces deux dernières inégalités expriment la séparation de x^k et T.

Elles sont satisfaites sous la condition : $\langle F(y^k), x^k - y^k \rangle > 0$ qui dépend directement de la sélection de σ_k.

1[er] critère Sélection de σ_k. Soit $\sigma_{\max} > 0$ une valeur initiale et $F(x^k) \neq 0$, on a :

(14)

$$\Leftrightarrow \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle \geq \varepsilon_1 \sigma_{\max} \left(F(x^k)^T \left[\nabla^2 g(x^k) \right]^{-1} F(x^k) \right)$$

$$\Leftrightarrow \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle > 0.$$

(Puisque $F(x^k) \neq 0$, $x^k \in \bar{S}$ et la matrice $\nabla^{-2} g(x^k)$ est définie positive).
Alors, on prend $\sigma_k = \sigma_{\max}$, si ce critère n'est pas vérifie, il faut choisir un autre $\sigma_k \in]0, \sigma_{\max}[$ dont l'existence est entièrement assurée.

2$^{\text{ième}}$ critère Sélection de σ_k. Le deuxième critère est donné par la double inégalité (16) qui garantie la séparation et évite les valeurs trop petites pour σ_k.

Avant de donner les principales étapes de convergence, on note que la suite $\{D_g(z, x^k)\}_k, \forall z \in T$ est décroissante sous la condition :
$\langle \nabla g(x^k) - \nabla g(x^{k+1}), z - x^{k+1} \rangle \leq 0, \forall z \in T$, voir [12].

Lemme 2. Si $T \neq \emptyset$, alors
$\langle \nabla g(x^k) - \nabla g(x^{k+1}), z - x^{k+1} \rangle \leq 0, \forall z \in T$.

Lemme 3. Soit F un opérateur continu, monotone, alors :
i) $z \in T \Leftrightarrow \forall x \in C, \langle F(x), x - z \rangle \geq 0$.
ii) Si de plus F est paramonotone, $z \in T$ et $\bar{x} \in C$ satisfaisant $\langle F(\bar{x}), z - \bar{x} \rangle = 0$, alors $\bar{x} \in T$.

Lemme 4. Si la suite $\{x^k\}$ est bornée, alors la suite $\{y^k\}$ est bornée.

Pour la démonstration de la convergence de l'algorithme, il suffit de prouver les résultats suivants :
1. La suite des itérés $\{x^k\}$ est bien définie et appartient à S.
2. La suite $\{x^k\}$ possède une limite $\bar{x} \in C$.
3. La limite $\bar{x}$ satisfait les conditions d'optimalité.

En effet, pour le premier point, l'itéré y^k est bien défini (par définition de h). Du fait que, $H_k \cap S \neq \emptyset$ (car il existe au moins un élément $\hat{x}^k = y^k + (1 - \alpha_k)(x^k - y^k)$ qui appartient à H_k et S, d'où la possibilité d'appliquer la projection de Bregman), alors x^k existe, est unique et appartient à S.

La démonstration du second point est la proposition suivante qui découle des lemmes 2 et 3.

Proposition 3. Si $T \neq \emptyset$, alors :
i) La suite $\{x^k\}$ est bornée.
ii) $\lim\limits_{k \to +\infty} (x^{k+1} - x^k) = 0$.
iii) Si $\bar{x}$ est un point d'accumulation de la suite $\{x^k\}$ appartenant à T, alors : $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k = \bar{x}$.

Démonstration. i) Il est facile de vérifier l'égalité suivante :
$$D_g(p,q) + D_g(q,r) - D_g(p,r) = \langle \nabla g(r) - \nabla g(q), p - q \rangle \text{ pour tout } p \in \bar{S}, q \in S, r \in S.$$

Prenons $p = z$, $q = x^{k+1}$, $r = x^k$, et d'après le lemme 1 on obtient :
$D_g(z, x^{k+1}) \leq D_g(z, x^k) - D_g(x^{k+1}, x^k)$, donc la suite $\{D_g(z, x^k)\}_k, \forall z \in T$ est décroissante $\forall k \geq 0$.
Alors, $D_g(z, x^k) \leq D_g(z, x^0), \forall k \geq 0$, et en utilisant la condition **B$_3$**, on a la suite $\{x^k\}$ est bornée comme conséquence.

ii) La suite $\{D_g(z, x^k)\}_k, \forall z \in T$ est positive $\forall k \geq 0$, et d'après l'inégalité (17) on a : $0 \leq D_g(x^{k+1}, x^k) \leq D_g(z, x^k) - D_g(z, x^{k+1})$. En faisant $k \to +\infty$, on obtient $D_g(x^{k+1}, x^k) = 0$.
En se servant de **i)** et de la condition **B$_5$**, on démontre le résultat **ii).**
iii) Soit $\{x^{j_{kj}}\}$ une sous-suite convergente de $\{x^k\}$ telle que :
$\lim\limits_{k \to +\infty} x^{j_k} = \bar{x}$ (Puisque $\{x^k\}$ est bornée de **i)**), alors d'après **B$_4$** $\underset{k \to +\infty}{D_g(\bar{x}, x^{j_k})} = 0$.
Si $\bar{x} \in T$, on a $\{D_g(\bar{x}, x^k)\}$ est une suite positive décroissante, d'où elle est convergente. De plus, elle possède une une sous-suite qui converge vers 0, alors elle est aussi. En utilisant **B$_5$,**
On le résultat $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k = \bar{x}$.

Le troisième point passe par plusieurs propositions.
On considère $\bar{x} \in \bar{S}$ tel que : 1) $\bar{x} = \lim\limits_{k \to +\infty} x^{j_k}$, où $\{x^{j_k}\}$ une sous-suite convergente de $\{x^k\}$. De même pour $\{y^k\}$, en utilisant le lemme 3, alors :
2) $\bar{y} = \lim\limits_{k \to +\infty} y^{j_k}$, 3) $\bar{\sigma} = \lim\limits_{k \to +\infty} \sigma_{j_k}$, 4) $\bar{\alpha} = \lim\limits_{k \to +\infty} \alpha_{j_k}$.
Comme conséquence de la proposition 3, on a 5) $\bar{x} = \lim\limits_{k \to +\infty} x^{k_j + 1}$.
La proposition ci-dessous présente le cas où la limite $\bar{x}$ satisfait le premier critère d'optimalité de la proposition 1.

Proposition 4. S'il existe un point $\overline{x}$ qui vérifie les affirmations 1)-5), alors :

i) $\langle F(\overline{y}), \overline{x}-\overline{y}\rangle = 0.$

ii) $F(\overline{x}) = 0.$

Démonstration. i) On remplace $\{x^k\}$ et $\{y^k\}$ par les points des sous-suites $\{x^{j_k}\}$ et $\{y^{j_k}\}$ dans l'équation de l'hyperplan H_k, on obtient :

$$\left\langle F\left(y^{j_k}\right), x^{j_k+1} - y^{j_k}\right\rangle - \left(1-\alpha_{j_k}\right)\left\langle F\left(y^{j_k}\right), x^{j_k} - y^{j_k}\right\rangle.$$

Faisant $k \to +\infty$, et comme F est continu, on trouve :

$\langle F(\overline{y}), \overline{x}-\overline{y}\rangle - (1-\overline{\alpha})\langle F(\overline{y}), \overline{x}-\overline{y}\rangle$, de plus on a $\hat{\alpha} \geq \alpha > 0$, d'où le résultat.

ii) On distingue deux cas pour le paramètre $\overline{\sigma}$:

Premier cas : $\overline{\sigma} > 0$ (borné loin de 0)

Puisque $\overline{\sigma} > 0$, alors on est au premier critère de sélection de σ_k qui est exprimé par la relation (14) appliquée aux sous-suites $\{x^{j_k}\}$ et $\{y^{j_k}\}$, et prenons la limite $k \to +\infty$, on trouve :

$$0 \leq \left(F(\overline{x})^T \nabla^{-2} g(\overline{x}) F(\overline{x})\right) \leq \frac{1}{\varepsilon_1 \overline{\sigma}} \langle F(\overline{y}), \overline{x}-\overline{y}\rangle.$$

On utilise alors le résultat **i)**, et le fait que $\nabla^{-2} g(x)$ soit une matrice définie positive sur $\overline{S}$, on trouve $\left(F(\overline{x})^T \nabla^{-2} g(\overline{x}) F(\overline{x})\right) = 0 \Rightarrow F(\overline{x}) = 0.$

Deuxième cas : $\overline{\sigma} = 0$ (borné au voisinage de 0)

Cette fois on envisage le second critère de sélection de σ_k donné par (15) appliqué à $\{x^{j_k}\}$ et $\{y^{j_k}\}$, en faisant tendre $\left(x^{j_k}, \sigma_{j_k}\right) \to (\overline{x}, 0)$, d'où $F(\overline{x}) = 0.$

La proposition 5 concerne le cas où la limite $\overline{x} \in \partial S$ et $F(\overline{x}) \neq 0$, (le cas le plus difficile).

Proposition 5. S'il existe un point $\overline{x}$ qui vérifie les affirmations 1)-5), $F(\overline{x}) \neq 0$, et F est paramonotone, alors $F(\overline{x}) = F(\overline{y})$.

Démonstration. On remplace x^k, y^k par x^{j_k}, y^{j_k} dans $\varepsilon_1\left\langle F\left(x^k\right), x^k - y^k\right\rangle \leq \left\langle F\left(y^k\right), x^k - y^k\right\rangle$ qui découle de (13), et faisant $k \to +\infty$, on trouve

$$\langle F(\overline{x}), \overline{x}-\overline{y}\rangle \leq \frac{1}{\varepsilon_1}\langle F(\overline{y}), \overline{x}-\overline{y}\rangle.$$

D'une part, $\langle F(\overline{x}), \overline{x}-\overline{y}\rangle \leq \frac{1}{\varepsilon_1}\langle F(\overline{y}), \overline{x}-\overline{y}\rangle = 0.$ (Proposition 4, i)).

D'autre part, $0 = \langle F(\overline{y}), \overline{x}-\overline{y}\rangle \leq \langle F(\overline{x}), \overline{x}-\overline{y}\rangle$. ($F$ est monotone).

Par conséquent, $\langle F(\overline{x}) - F(\overline{y}), \overline{x}-\overline{y}\rangle = 0.$

En utilisant la condition de la paramonotonie de F, on a le résultat $F(\overline{x}) = F(\overline{y})$.

Théorème 1. Soient F un opérateur continu paramonotone, C un sous-ensemble de R^n convexe fermé d'intérieur non vide et $g \in B_S$ satisfaisant $\mathbf{B_6}$ telle que $S = \operatorname{int}(C)$. Alors la suite générée par l'algorithme précédent est bien définie et converge $\overline{x} \in T$ si seulement si $T \neq \emptyset$.

Mise en œuvre de l'algorithme.

Voir [12]. A l'étape d'initialisation, il est difficile de trouver $x^0 \in S = \operatorname{int}(C)$. D'ailleurs, c'est un problème connu au niveau des méthodes de point intérieur. Aussi le choix de la fonction de Bregman n'est pas évident pour un convexe fermé quelconque. Ceci a pour effet de limiter l'application de l'algorithme à des problèmes où la structure de C est propice (cône, polyèdre, sphère,…). Nous allons présenter l'ensemble des résultats issus de l'implémentation numérique pour différentes classes de problèmes connus par leurs importances en analyse numérique. Notons que pour chaque classe, une adaptation de l'algorithme est nécessaire. Nous avons également implémenté l'algorithme de Korpolevich modifie, histoire de comparer les résultats obtenus. Les programmes sont réalisés en Pascal-Turbo version 6 sur un Pentium II avec une précision, d'ordre $\varepsilon = 10^{-7}$, et en prenant $\varepsilon_1 = 0.3, \varepsilon_2 = 0.5$. Le paramètre de relaxation est pris constant $\alpha_k = \alpha, \forall k \geq 0$.

Au cour des tests, on a fait varier les paramètres formels $\sigma_{\max}, \alpha, x^0$ pour voir l'influence de chacun sur le comportement de l'algorithme.

Pour chaque classe, on va donner la fonction et la distance de Bregman correspondantes, les schémas itératifs et la formule de λ_k. Voir [12], pour les exemples testés.

4.1. Systèmes non linéaires (SNL).

Pour ce cas où $C = R^n$, (VIP) coïncide avec la résolution d'un système d'équations non linéaires pour lequel les méthodes utilisées présentent des difficultés. Puisque R^n est un ouvert, alors $\forall x \in R^n$ est un point intérieur. Par conséquent, il suffit pour F d'être monotone et le seul critère d'optimalité utilisé est $F(x)=0$.

$$g(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2,\ D_g(x,y)=\frac{1}{2}\|x-y\|^2,\quad \begin{cases} y_i^k = x_i^k - \sigma_k F_i(x^k) \\ x_i^{k+1} = x_i^k - \lambda_k F_i(y^k) \end{cases},$$

$$\lambda_k = \alpha_k \left\langle F(y^k), x^k - y^k \right\rangle / \left\|F(y^k)\right\|^2 .$$

Exemple	Taille	Nombre d'itérations		Temps d'exécution	
		Censor	Korpolevich m	Censor	Korpolevich m
1	4	48	174	0.05	0.05
2	4	29	91	0.05	0.05
3	10	728	910	0.11	0.17
4	1	300	716	0.06	0.11
5	20	66	232	0.06	0.11

Tableau (1)

4.2. Problème de complémentarité (PC).

Si $C = R_+^n$, (VIP) correspond au problème de complémentarité (linéaire ou non linéaire), défini par:
Trouver $\bar{x} \geq 0$ tel que $F(\bar{x}) \geq 0$, et $\bar{x}^T F(\bar{x}) = 0$.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i),\quad D_g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right) + y_i - x_i,\quad \begin{cases} y_i^k = \exp\left(x_i^k - \sigma_k F_i(x^k)\right) \\ x_i^{k+1} = \exp\left(x_i^k - \lambda_k F_i(y^k)\right) \end{cases}.$$

Le paramètre λ_k, est donné par l'équation non linéaire suivante qui provient de (14).

$$f(\lambda_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k F_i(y^k) \exp\left(-\lambda_k F_i(y^k)\right) - (1-\alpha_k) x_i^k F_i(y^k) - \alpha_k y_i^k F_i(y^k).$$

Laquelle est résolue par une procédure de type Newton.

Exemple	Taille	Nombre d'itérations		Temps d'exécution	
		Censor	Korpolevich m	Censor	Korpolevich m
1	2	169	736	0.05	0.06
2	3	31	8700*	0.05	4.68
3	4	37	6127*	0.06	2.14
4	4	75	84	0.06	0.06
5	6	200	732	0.06	0.11
6	9	8	22179**	0.05	21.42
7	10	784	610	0.33	0.22
8	20	44	12117**	0.05	62.37

Tableau (2)

(*,** signifient que la précision considérée est de 10^{-4}, 10^{-3} respectivement, pour l'algorithme de Korpolevich m)

4.3. (VIP) avec *C* un hypercube

$$\left(C = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i], a_i < b_i, \forall i = 1 \ldots n \right)$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\ln(x_i - a_i) + (b_i - x_i)\ln(b_i - x_i),\ D_g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\ln\left(\frac{(x_i - a_i)}{y_i - a_i}\right) + \ln\left(\frac{(b_i - x_i)}{b_i - y_i}\right)$$

$$\begin{cases} y_i^k = \dfrac{a_i(b_i - x_i^k) + b_i(x_i^k - a_i)\exp\left(-\sigma_k F_i(x^k)\right)}{(b_i - x_i^k) + (x_i^k - a_i)\exp\left(-\sigma_k F_i(x^k)\right)} \\ x_i^{k+1} = \dfrac{a_i(b_i - x_i^k) + b_i(x_i^k - a_i)\exp\left(-\lambda_k F_i(y^k)\right)}{(b_i - x_i^k) + (x_i^k - a_i)\exp\left(-\lambda_k F_i(y^k)\right)} \end{cases}.$$

L'équation non linéaire associée au paramètre λ_k, est donnée par :

$$f(\lambda_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^k - t_i^k \exp\left(-\lambda_k F_i(y^k)\right)}{q_i^k - d_i^k \exp\left(-\lambda_k F_i(y^k)\right)} - (1-\alpha_k) x_i^k F_i(y^k) - \alpha_k x_i^k F_i(y^k).$$

Où :

$$r_i^k = a_i F_i(y^k) q_i^k,\ t_i^k = b_i F_i(y^k) d_i^k,\ q_i^k = b_i - x_i^k,\ d_i^k = x_i^k - a_i.$$

Exemple	Taille	Nombre d'itérations		Temps d'exécution	
		Censor	Korpolevich m	Censor	Korpolevich m
1	4	30	57	0.05	0.05
2	4	73	97	0.05	0.05
3	6	29	53	0.05	0.06
4	9	42	-	0.05	-
5	10	706	688	0.33	0.33
6	20	37	-	0.06	-

Tableau (3)

(- signifie que l'algorithme de Korpolevich m ne converge pas).

CONCLUSION

Pour la classe (SNL), les deux algorithmes ne différent que dans la procédure de sélection de σ_k. Par conséquent, on n'a pas noté de grande différences entre les résultats obtenus par les deux algorithmes et spécialement pour le cas de $\alpha = 1$. En général, le comportement de l'algorithme de point intérieur pour les classes de (CP) et (VIP) avec C un hypercube est nettement meilleur que celui de Korpolevich modifie. Mais, le temps d'exécution a évolué un petit peu est cela est dû à la procédure de Newton pour le calcul de λ_k.

On note en particulier, la divergence de l'algorithme de Korpolevich modifie en cas où la solution $\bar{x} \in \partial S$ et $F(\bar{x}) \neq 0$, pour les classes (CPNL) et (VIP) avec C un hypercube.

La principale contribution qu'on a apportée à cette étude c'est d'introduire le second critère d'optimalité. Car, si on se limite à utiliser seulement le premier critère d'optimalité, alors en cas où la solution $\bar{x} \in \partial S$ et $F(\bar{x}) \neq 0$ ne sera pas détectée et l'algorithme entre dans une boucle infinie. L'approche de point intérieur est prometteuse pour la résolution effective de (VIP). Il faudra ce pendent, pousser cette alternative à son plus haut niveau de perfectionnement.

RÉFÉRENCES

[1] D. P. Bertsekas and R.M. Gafni, Projection method for variational inequalities with applications to traffic assignment problem, Mathematical Programming Study 17 (1982), pp. 139-159.

[2] D. P. Bertsekas and J.N. Tsitsiklis, Parallel and Distribution Computation Numerical methods (Englewood Cliffs NJ, 1989).

[3] A. Bnouhachem, Self-adaptive method for solving general mixed variational inequalities. Journal Mathematical Analysis and Applications 309, (2005), pp, 136-150.

[4] L.M. Bregman, The relaxation method of finding common point of convex sets and its applications to the problem in convex programming, URSS Computational and mathematical Physics 7 (1967), pp, 200-217

[5] Y. Censor, A.N. Iusem and Stavros A. Zenois, An interior method with Bregman functions for variational inequalities problem with paramonotone operators, Mathematical Programming 81 (1998), pp, 373-400.

[6] Y. Censor and Lent, an iterative row-action method for interval convex programming, Journal of Optimization Theory and Application 34 (181), pp, 321-353.

[7] Y. Censor and S. Zenois, The proximal minimization algorithm with D-functions, Journal of Optimization Theory and Application 73 (1992), pp, 451-464.

[8] G. Chen, and M. Teboulle, Convergence analysis of a proximal-like optimization algorithm using Bregman functions, SIAM, Journal on Optimization, 3 (1993), pp, 42-54.

[9] S. Dafermos, Traffic equilibrium and variational inequalities, Transportation Science 14 (1980), pp, 538-543.

[10] A.R. De Pierro and A. N. Iusem, A relaxed version of Bregman's method for convex programming, Journal of Optimization Theory and Application 51 (1986), pp, 421-440.

[11] J. Ecktein and D.P. Bertsekas, on the Douglas-Rarhford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators, Mathematical Programming 55 (1992), pp, 293-318.
[12] H. Grar, Theoretical and numerical study of interior point method to solve variational inequalities problem, Thesis of Magister (2000).
[13] A. N. Iusem, An iterative algorithm for variational inequalities problem, Computational and Applied Mathematics 13 (1994), pp, 103-114.
[14] G. M. Korpolevich, The extra gradient method for finding saddle point and other problem, Ekonomocai Matematchekie Metody 12 (1976), pp747-756.
[15] A. Nagymey, Network economics, A variational inequality approach, Kluwer Acadimics Publishers, Dordrecht (1993).
[16] A. Nagymey, S. Thore, J. Pan, Special market policy modelling with goal targets, Operations Research 44, (1996), pp, 393-406.