Sciences & Technologie A– N°24, Décembre (2006), pp. 31-35

APPROXIMATION D'UN PROBLEME DE CONTACT SANS FROTTEMENT

Reçu le 18/10/2005– Accepté le 26/12/2006

Résumé

Le but de ce travail est de donner une méthode d'approximaton d'un problème élastique de contact sans frottement. Le modèle mathématique correspondant au problème mécanique est formulé en fonction d'une inéquation variationnelle elliptique. Les conditions aux limites de contact sont celles de Signorini. Nous rappelons un résultat d'existence et d'unicité de la solution variationnelle du problème mécanique, ensuite nous proposons un schéma d'approximation de la solution et on montre que cette solution approchée converge vers la solution faible du problème mécanique. Enfin on donne une estimation abstraite de l'erreur.

Mots clés : *Approximation, élasticité, contact, conditions de Signorini, solution faible, opérateur monotone.*

Abstract

The aim of this work is to give a method of approximation of an elastic problem of contact without friction. The mathematical model corresponding to the mechanical problem is formulated according to an elliptic varational inequation. The boundary conditions of contact are those of Signorini. We remind a result of existence and of unicity of the varational solution of the mechanical problem, then we propose a method of approximation of the solution and we prove that this approximate solution converges towards the weak solution of mechanical problem. Finally we give an abstract estimate of the error.

Keywords: *Approximation, elasticity, contact, Signorini's conditions, weak solution, monotonous operator.*

B. TENIOU

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Exactes
Universté Mentouri Constantine
Algérie

ملخص

إن الهدف من هذا العمل هو إعطاء طريقة تقريب لمسألة تلامس جسم مرن بدون احتكاك . النموذج الرياضي المرافق لهذه المسألة مصاغ بواسطة متراجحة تغيرية ناقصية . إن الشروط الحدية لهذا التلامس هي شروط Signorini . نذكر نتيجة الوجود و الوحدانية للحل التغيري للمسألة الميكانيكية ثم نقترح طريقة لتقريب الحل ونبين أن هذا الحل التقريبي يتقارب نحو الحل الضعيف للمسألة الميكانيكية . في الأخير نعطي تقريبا نظريا للخطأ .

كلمات مفتاحية: التقريب ، المرونة ، التلامس ، شروط Signorini ، الحل الضعيف ، مؤثر رتيب.

Les phénomènes de contact avec ou sans frottement sont fréquemment rencontrés. Le contact des pneux d'une voiture avec le sol, le sabot avec le disque de frein et les chemises avec les pistons sont des exemples courants. La fréquence de ces problèmes de contact a engendré récemment de nombreux ouvrages mathématiques et numériques. En 1933, A. Signorini a formulé un problème de contact sans frottement entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide. Ce n'est qu'en 1964, que G. Fichera a pu résoudre ce problème en utilisant quelques propriétés des inéquations variationnelles elliptique. L'étude mathématique des problèmes de contact a commencé en 1972, avec l'ouvrage de Duvaut et Lions, où on trouve des résultats d'existence et d'unicité de plusieurs problèmes de contact, mais dans le cas linéaire. Les problèmes de contact avec conditions aux limites de Signorini ont été étudiés par plusieurs auteurs. Les problèmes de contact avec conditions aux limites de Signorini et frottement de Coulomb induisent de nombreuses difficultés mathématiques dans la résolution mathématique. L'analyse mathématique des problèmes de contact n'est qu' une étape marginale dans le traitement de ces problèmes dans le secteur industriel. Afin de répondre aux besoins du secteur industriel, il convient de faire appel au traitement numérique d'où la nécessité de proposer ou de construire des modèles approchés pour ces problèmes de contact. Beaucoup de travaux portant sur l'étude numérique des problèmes de contact ont été réalisés, on peut citer par exemple [4] pour les problèmes linéaires et [1], [2], [3] et [5] pour les problèmes non linéaires. Ce travail est divisé en trois parties:

La première est consacrée aux définitions des outils mathématiques et mécaniques dont on a besoin dans l'étude de notre problème mécanique de contact.
La duxième partie porte sur l'étude théorique du contact sans frottement entre un corps élastique non linéaire et une fondation rigide avec l'hypothèse des petites déformations et dans le processus statique. Les conditions aux limites de contact sont celles de Signorini. Les résultats d'existence et d'unicité de la solution faible de ce problème peuvent être trouvés dans [6].
La troisième partie est réservée à l'approximation de ce problème mécanique de contact. Nous donnons une méthode d'approximation de ce problème, ensuite nous démontrons la convergence de cette méthode. Notre contribution dans l'étude de ce problème de contact réside dans l'estimation théorique de l'erreur d'approximation ainsi que la démonstration de la convergence de la solution approchée vers la solution faible du problème mécanique.

Définitions et notations

Dans les définitions qui suivent, nous adoptons les notations d'Einstein. On note par :

Ω Un domaine de $\mathbb{R}^N$ (N=2,3 pour les applications)

Γ La frontière de Ω

Γ_i Une partie de Γ

ν Est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de Γ

u_ν Est la composante normale de u ($u_\nu = u.\nu$)

u_τ Est la composante tangentielle de u ($u_\tau = u - u_\nu.\nu$)

S_N L'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^N$

$H = \{u = (u_i)\ tel\ que\ u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1,N}\} = L^2(\Omega)^N$

On définit respectivement l'opérateur déformation $\varepsilon: H_1 \rightarrow$ W et l'opérateur divergence Div : $W_1 \rightarrow H$ par :

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)),\ \ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \qquad Div\sigma = (\partial_j \sigma_{ij})$$

Où les espaces W, H_1, W_1 sont définis par :

$$W = \{\sigma = (\sigma_{ij})\ tel\ que\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega); i,j = \overline{1,N}\}$$

$$H_1 = \{\ u \in H \text{ tel que } \varepsilon(u) \in W\}$$

$$W_1 = \{\ \sigma \in W \text{ tel que } Div\sigma \in H\}$$

Les espaces W, H_1, W_1 munis de leurs produits scalaires respectifs définis par :

$$\langle u, v\rangle_H = \int_\Omega u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau\rangle_W = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}\ dx \quad \forall \sigma, \tau \in W$$

$$\langle u, v\rangle_{H_1} = \langle u, v\rangle_H + \langle\varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_W \quad \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau\rangle_{W_1} = \langle \sigma, \tau\rangle_W + \langle Div\sigma, Div\tau\rangle_H \quad \forall \sigma, \tau \in W_1$$

sont des espaces de Hilbert. Les normes associées à ces produits scalaires respectifs sont notées par :

$|.|_H, |.|_W, |.|_{H_1}, |.|_{W_1}$

L'application $\gamma: H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité :

$$\gamma u = u|_\Gamma\ \forall u \in C^1(\overline{\Omega})^N$$

est dite application trace. L'image de H_1 par cette application est notée $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$.

Soit H'_Γ le dual de H_Γ, alors pour tout $\sigma \in W_1$ on a la formule de Green :

$$\langle \sigma\nu, \gamma v\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(v)\rangle_W + \langle Div\sigma, v\rangle_H \quad \forall \sigma \in H_1$$

et si

$$\in C^1(\overline{\Omega})_S^{N\times N} = \{\sigma = (\sigma_{ij})\ tel\ que\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})\}$$

alors

$$\langle \sigma\nu, \gamma v\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu v\ ds \quad \forall v \in H_1$$

où Γ est la frontière de Ω, supposée de Lipchitz. Nous supposons que Γ, est partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2, et Γ_3 telles que $mes(\Gamma_1) > 0$. Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, alors l'inégalité de Korn :

$$|\varepsilon(u)|_W \geq C|u|_{H_1} \quad \forall u \in V$$

est vérifiée, où C est une constante strictement positive qui dépend de Ω et Γ_1. L'espace V défini par :

$$V = \{u \in H_1\ tel\ que\ u = 0\ sur\ \Gamma_1\}$$

est un sous-espace fermé de H_1.

Formulation du problème mécanique et hypothèses

On considère un corps élastique qui occupe un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^N$ (N=2,3 pour les applications) et dont la frontière Γ supposée suffisamment régulière, est partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2, et Γ_3 telles que $mes(\Gamma_1) > 0$. On suppose que ce corps est encastré sur Γ_1 (c'est-à-dire que le champ des déplacements est nul sur Γ_1), que des tractions superficielles h s'appliquent sur Γ_2 et que des forces volumiques f agissent dans Ω. On suppose aussi que le corps Ω repose sur une fondation rigide par la partie Γ_3 de sa frontière et que le contact s'effectue sans frottement, c'est-à-dire que les mouvements tangentiels sont complètement libres. On précise encore que la loi constitutive du corps élastique Ω est non linéaire.
Sous ces conditions, ce problème mécanique de contact se formule de la manière suivante :

Problème P.
Trouver le champ des déplacements $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma: \Omega \rightarrow S_N$ tels que :

$$\sigma = F(x, \varepsilon(u))\ \text{ dans } \Omega \qquad (1)$$

$$Div\sigma + f = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\sigma\nu = h \text{ sur } \Gamma_2 \quad (4)$$

$$u_\nu \leq 0 \,,\ \sigma_\nu \leq 0 \,,\ \sigma_\tau = 0 \,,\ \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (5)$$

Hypothèses.

Pour l'étude variationnelle du problème P, on considère les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} F: \Omega \times S_N \text{ est une application tensorielle vérifiant:} \\ (a)\ \exists m > 0 \text{ tel que } \left(F(x,\varepsilon_1) - F(x,\varepsilon_2)\right).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \quad p.p.\ x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \\ (b)\ \exists L > 0 \text{ telle que } |F(x,\varepsilon_1) - F(x,\varepsilon_2)| \leq L|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ (c) \text{ La fonction } x \to F(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue} - \text{mesurable} \\ \quad p.p.\ x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in S_N \\ (d)\ F(x, 0_N) = 0_N \end{cases} \quad (6)$$

$$f \in H, \quad h \in L^2(\Gamma_2)^N \quad (7)$$

Remarque 1.

Les hypothèses (6) nous permettent de considérer l'opérateur $\tilde{F}: W \to W$

défini par :

$$\tilde{F}(\varepsilon)(x) = F(x, \varepsilon(u)) \qquad p.p.\ x \in \Omega \qquad \forall \in W$$

On note aussi dans la suite cet opérateur par F. Comme l'opérateur F est fortement monotone et de Lipchitz, alors F est aussi inversible et son inverse $F^{-1}: W \to W$ l'est aussi.

On munit l'espace V du produit scalaire suivant :

$$(u,v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_W \quad \forall u, v \in V \quad (8)$$

Grâce à l'inégalité de Korn, on peut vérifier facilement que les normes $|.|_V$ *et* $|.|_{H_1}$ sont équivalentes sur V.

De (7) et du théorème Riesz-Fréchet, il résulte l'existence d'un élément unique $q \in V$ tel que :

$$(q, v)_V = (f, v)_H + (h, \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V \quad (9)$$

En outre, on définit l'ensemble des « déplacements admissibles » suivant :

$$U_{ad} = \{v \in H_1 \text{ tel que } v = 0 \ sur\ \Gamma_1 \,, \quad v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}$$

Formulation variationnelle du problème mécanique

Dans cette partie, on va donner une formulation variationnelle du problème P. Dans cette formulation, l'inconnue principale est le champ des déplacements u. Le résultat conduisant à cette formulation est le suivant :

Lemme 1 : Sous les hypothèses (6) et (7), si (u, σ) est une solution du problème P, alors on a :

$$\begin{cases} u \in U_{ad} \,, \\ (F(\varepsilon(u)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_W \geq (q, v - u)_V \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases}$$

Démonstration : La démonstration de ce lemme est basée sur l'utilisation de la définition de l'ensemble U_{ad}, l'application de la formule de Green et l'utilisation de l'équation d'équilibre ainsi que les conditions aux limites du problème P (cf. [6], pp. 54-55). Le lemme 1 nous permet donc de donner la formulation variationnelle suivante pour le problème P :

Problème PV.

Trouver le champ des déplacements u : $\Omega \to H_1$ tel que :

$$u \in U_{ad},\ (F(\varepsilon(u), \varepsilon(v) - \varepsilon(u)))_W \geq (q, v - u)_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

Existence et unicité de la solution

Pour l'existence et l'unicité du problème PV, on a le théorème suivant:

Théorème 1.

Soit $mes(\Gamma_1) > 0$. Sous les hypothèses (6) et (7), le problème PV admet une solution unique $u \in U_{ad}$

Démonstration : (i) U_{ad} est un convexe fermé non-vide de H_1.

(ii) L'opérateur $A: V \to V$ défini par :

$$(A\omega, v)_V = (F(\varepsilon(\omega)), \varepsilon(v))_W \quad \forall v, \omega \in V$$

est fortement monotone et de Lipchitz. Alors le théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques de premières espèces (cf. [6], pp. 56-57), entraîne l'existence d'un élément unique $u \in V$ tel que :

$$u \in U_{ad},\ (F(\varepsilon(u), \varepsilon(v) - \varepsilon(u)))_W \geq (q, v - u)_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

D'où le théorème 1.

Approximation numérique du problème

Dans cette section, on propose une méthode d'approximation numérique de la solution variationnelle du problème P, ensuite on donne une estimation abstraite de l'erreur.

Problème approché

Dans cette sous-section, nous proposons une méthode d'approximation numérique de la solution variationnelle du problème PV. Nous supposons que les hypothèses (6) et (7) sont vérifiées et que V^h *et* W^h sont respectivement deux sous-espaces de dimensions finies de V et W, où h > 0 est un paramètre de discrétisation. On note aussi par $U_{ad}^h \subset V^h$, un sous-espace de dimension finie de l'espace des déplacements admissibles U_{ad}. Nous supposons que $\varepsilon(V^h) \subset W^h$. Un schéma de discrétisation du problème PV, est donné par le problème suivant :

Problème P_1^h : Trouver u^h tel que :

$$u^h \in U_{ad}^h, < F\left(\varepsilon(u^h), \varepsilon(v^h) - \varepsilon(u^h)\right) >_{W^h} \geq < q, v^h - u^h >_{V^h} \quad \forall v^h \in U_{ad}^h \quad (10)$$

Théorème2.

Sous les hypothèses (6) et (7), le problème (P_1^h) admet une solution unique $u^h \in V$.

Démonstration : La preuve de ce théorème peut s'obtenir par une application directe du théorème 1, puisque V^h est un sous-espace de dimension finie de l'espace V.
Concernant l'estimation de l'erreur abstraite nous avons le résultat suivant :

Théorème3.
Sous les hypothèses (6) et (7), il existe une constante C > 0 indépendante du sous-espace V^h telle que :

$$|u-u^h|_V^2 \le C \inf_{v^h\in V^h}\{|u-v^h|_V^2+|u-v^h|_V\} \qquad (11)$$

Démonstration : On rappelle que pour tout $u \in U_{ad}$, on a :

$$< F(\varepsilon(u),\varepsilon(v)-\varepsilon(u)) >_W \ge < q, v-u >_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

Donc pour $v = u^h$ on aura :

$$< F\left(\varepsilon(u),\varepsilon(u^h)-\varepsilon(u)\right) >_W \ge < q, u^h-u >_V$$

Qu'on peut écrire sous la forme :

$$< F\left(\varepsilon(u),\varepsilon(u)-\varepsilon(u^h)\right) >_W \ge < q, u-u^h >_V \qquad (12)$$

De l'inéquation (10), on a :

$$< F\left(\varepsilon(u^h),\varepsilon(v^h)-\varepsilon(u^h)\right) >_W \ge < q, v^h-u^h >_V$$

Donc :

$$< F\left(\varepsilon(u^h),\varepsilon(v^h)-\varepsilon(u^h)\right) >_W$$
$$=< F\left(\varepsilon(u^h),\varepsilon(v^h)-\varepsilon(u)\right) >_W + < F\left(\varepsilon(u^h),\varepsilon(u)-\varepsilon(u^h)\right) >_W$$
$$\ge (q, v^h-u^h)_V$$

D'où :

$$-< F\left(\varepsilon(u^h),\varepsilon(u)-\varepsilon(u^h)\right) >_W \le < F\left(\varepsilon(u^h),\varepsilon(v^h)-\varepsilon(u)\right) >_W + < q, u^h-v^h >_V \quad (13)$$

Moyennant (12) et (13) On obtient :

$$< F(\varepsilon(u)) - F\left(\varepsilon(u^h)\right),\varepsilon(u)-\varepsilon(u^h) >_W$$
$$\le < F\left(\varepsilon(u^h),\varepsilon(v^h)-\varepsilon(u)\right) >_W + < q, u-v^h >_V$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que $|\varepsilon(v)|_W \le |v|_V$ dans le membre droit de cette dernière inégalité, puis le fait que F est un opérateur fortement monotone et en utilisant l'inégalité de Korn dans son membre gauche, on obtient :

$$M|u-u^h|_V^2 \le \left|F\left(\varepsilon(u^h)\right)\right|_W |v^h-u|_V + |q|_V|v^h-u|_V \qquad (14)$$

En outre, on a :

$$\left|F\left(\varepsilon(u^h)\right)\right|_W \le \left|F\left(\varepsilon(u^h)\right)-F(\varepsilon(u))\right|_W + \left|F(\varepsilon(u))\right|_W$$
$$\le L_1|\varepsilon(u^h)-\varepsilon(u)|_W + \left|F(\varepsilon(u))\right|_W \le L_1|u^h-u|_V + \left|F(\varepsilon(u))\right|_W \qquad (15)$$

(14) et (15) entraînent que :

$$M|u-u^h|_V^2 \le L_1|u^h-u|_V|v^h-u|_V + |q|_V|v^h-u|_V + \left|F(\varepsilon(u))\right|_W|v^h-u|_V$$

En utilisant le fait que :

$$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2) \text{ où } a,b \in \mathbb{R}$$

On aboutit à :

$$M|u-u^h|_V^2 \le \frac{1}{2}L_1(|u^h-u|_V^2+|v^h-u|_V^2) + C_1|v^h-u|_V$$

Où $C_1 = |q|_V + \left|F(\varepsilon(u))\right|_W$

Supposons que $\left(M-\frac{1}{2}L_1\right) > 0$. Alors on aura :

$$|u-u^h|_V^2 \le C(|v^h-u|_V^2+|v^h-u|_V) \quad \forall v^h \in V^h$$

D'où :

$$|u-u^h|_V^2 \le C \inf_{v^h\in V^h}\{|u-v^h|_V^2+|u-v^h|_V\}$$

Analyse de la convergence

Dans cette sous-section, on analyse la convergence du problème approché (P_1^h) vers le problème (P_1), quand h tend vers zéro. Pour cela, on introduit l'hypothèse suivante :

Hypothèse (HP) :

Il existe un sous-espace $V_0 \subset V$ dense dans V et une fonction $\alpha(h) \ge 0$ tels que :

$$\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

et

$$\inf_{v^h\in V^h}\{|v-v^h|_V \le \alpha(h)|v|_{V_0}\} \quad \forall v \in V$$

Le théorème suivant nous assure la convergence du problème approché (P_1^h) vers le problème PV, quand h tend vers zéro.

Théorème 4 : Soit u la solution du problème PV et u^h la solution du problème approché (P_1^h) correspondant à la discrétisation du problème P. Alors, sous l'hypothèse (HP) on a le résultat suivant :

$$|u-u^h|_V \to 0 \text{ quand } h \to 0 \qquad (17)$$

Démonstration :

Comme V_0 est un sous-espace dense dans V, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $\bar{u}$ de V_0 tel que :

$$|u-\bar{u}|_V \le \varepsilon \qquad (18)$$

En outre, on a :

$$|u-v^h|_V \le |u-\bar{u}|_V + |\bar{u}-v^h|_V$$

Donc :

$$\inf_{v^h\in V^h}\{|u-v^h|_V\} \le |u-\bar{u}|_V + \inf_{v^h\in V^h}\{|\bar{u}-v^h|_V\} \qquad (19)$$

De (18), (19) et de l'hypothèse (HP), il résulte :

$$\inf_{v^h\in V^h}\{|u-v^h|_V\} \le \varepsilon + \alpha(h)|\bar{u}|_{V_0} \qquad (20)$$

En passant à la limite, quand h tend vers zéro, on obtient :

$$\inf_{v^h\in V^h}\{|u-v^h|_V\} \to 0, \quad \text{quand } h \to 0 \qquad (21)$$

Le théorème 3 et la relation (21) entraînent que :

$$|u-v^h|_V \to 0, \quad \text{quand } h \to 0$$

CONCLUSION

Nous avons proposé une méthode d'approximation (qui peut être soit la méthode : des éléments finis, des différences finies, des différences divisées,...), d'un problème élastique non linéaire de contact sans frottement, ensuite nous avons donné une estimation théorique de l'erreur d'approximation et démontré la convergence de cette méthode, mais la fiabilité et l'efficacité de cette méthode ou de n'importe quelle méthode d'approximation réside dans les tests numériques qui nous permettent de comparer entre les erreurs théoriques et numériques et de vérifier la rapidité de la convergence de la méthode utilisée, mais en général les résultats des tests numériques dépendent aussi de la méthode approchée choisie, c'est pour cette raison les méthodes approchées ne cessent d'émerger et dévoluer. Parmi les méthodes récentes utilisées dans l'approximation des problèmes non linéaires de contact avec frottement on peut citer la méthode du Lagrangien augmenté. Nous signalons aussi que la solution approchée de notre problème de contact est stable, car l'étude de ce problème de contact est faite dans le processus statique.

REFERENCES

[1] J. R. FERNANDEZ-GARCIA, W. HAHN & M. SHILOR, Numerical analysis and simulation of quasistatic frictionless contact problem, Int. Jour. Appli. Math. Comp. Sci. 11. (2001), pp. 205-222.

[2] R. GLOWINSKI, J. L. & R. TRIMOLIERES, Numerical analysis of variational inequalities, North-Holland Amsterdam (1981).

[3] R. GLOWINSKI, Numerical method for nonlinear variational problems, Springer-Verlag, New-York (1984).

[4] I. R. IONESCU & M. SOFONEA, Functional and numercal methods in viscoplasticity, Oxford Univ. Press, Oxford (1993).

[5] N, KIKUCHI, J. T. ODEN, Contact problems in elasticity: a study of variational inequalies and finit element Methods, Philadelphia (1988).

[6] B. TENIOU, Etude fonctionnelle des problemes élasto-viscoplastiques de contact, Thèse d'état, Université Mentouri, Constantine (Janv. 2000).