Sciences & Technologie A – N°25, Juin. (2007), pp. 23-27

REPRESENTATIONS DE L'ALGEBRE DE WEYL-HEISENBERG Q-DEFORMEE ET ETATS COHERENTS Q-DEFORMES

Reçu le 09/05/2006 – Accepté le 28/04/2007

Résumé

Les états cohérents qui sont des superpositions linéaires de tous les états stationnaires, jouent un grand rôle dans la mécanique quantique, et peuvent être considérés comme liens avec la mécanique classique. Nous avons étudié les états cohérents dans un cadre plus général de la quantification qui est la théorie de déformation.
Nous avons étudié aussi les états cohérents du groupe de Weyl-Heisenberg q-déformé en généralisant la représentation de Macfarlane pour les opérateurs de création et d'annihilation q-déformés.
Finalement, nous avons étudié les états cohérents de l'algèbre de W. H. q-déformée dans la représentation de configuration.
Mots clés: Algèbre de Weyl-Heisenberg q-déformée, états cohérents q-déformés, représentations des opérateurs de création et d'annihilation q-déformés de l'oscillateur harmonique.

N. BOUCERRREDJ

Département de physique
Faculté des sciences
Université Badji Mokhtar
B. P. 12, 23000 Annaba.
ALGERIE

Abstract

Coherent states wich are the linear superposition of the stationary states, plays an important role in quantum mechanics, it may be considered a bonds with the classical mechanics. We have studied the coherent states in general case of the deformation theory. We have also studied the coherent states of the q-deformed
Weyl-Heisenberg algebra in the generalized Macfarlane representation.
Finally, we have studied the coherent states in this representation of the q-deformed Weyl-Heisenberg algebra in the configuration space.
Keywords: q-deformed Weyl-Heisenberg algebra, q-deformed coherent states, representations of the q-deformed creation and annihilation operators of the harmonic oscillator.

ملخص

الحالات المتماسكة أو المتناسقة و التى هي عبارة عن تركيب خطى لكل الحالات المستقرة، تلعب دور كبير في ميكانيكا الكم، ويمكن اعتبارها كادات ربط مع الميكانيكا التقليدية. لقد قمنا بدراسة هاتة الحالات في إطار نظرية التشوهات، كما قمنا أيضا بدراستها في حالة جبر وايل هايزنبرغ المشوه أو المضطرب في تمثيل ماكفارلان المعمم.
أخيرا، قمنا بدراسة الحالات المتناسقة لجبر وايل-هايزنبرغ المضطرب دى تمثيل ماكفارلان المعمم في فضاء الحالات.

الكلمات المفتاحيـــــة : جبر وايل هايزنبرغ المشوه، الحالات المتناسقة المشوهة، تمثيل مؤثرات الانشاء و الافناء المشوهة للهزاز التوافقى.

La théorie de déformation élaborée récemment a trouvé beaucoup de succès et a attiré une intention considérable des chercheurs physiciens et mathématiciens. L'application physique intéressante est déclanchée par l'introduction de l'oscillateur harmonique q-déformé par Biedenharn et Macfarlane en 1989, bien que des oscillateurs similaires avaient en existence [1].
La mécanique quantique peut être considérée comme une déformation (le paramètre de déformation est ħ) de la mécanique classique et la mécanique relativiste est une autre déformation (avec (1/c) comme paramètre de déformation) de la mécanique classique.
Les algèbres quantiques ont aussi plusieurs applications dans: la théories des champs; les systèmes dynamiques quantiques; l'optique quantique; la spectroscopie moléculaire, atomique et nucléaire et la physique de la matière condensée. Cependant, les groupes ou algèbres quantiques n'ont pas seulement une grande importance en physique et en chimie quantique mais aussi en pure mathématique [2,3,4].
Dans plusieurs articles, Macfarlane a introduit une représentation des opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique q-déformé [5]; ensuite plusieurs chercheurs ont utilisé cette représentation, Chaïchian a utilisé cette représentation pour étudier les intégrales de chemin de l'oscillateur harmonique q-déformé [6]. Shabanov a aussi utilisé cette représentation pour construire la formulation intégrale de chemin de l'oscillateur harmonique[7], etc….
Le but de cet article est de montrer que la représentation de Macfarlane n'est pas unique, et que les états cohérents q-déformés de l'algèbre de Weyl-Heisenberg changent en généralisant la représentation de Macfarlane ou en changeant de représentation.

Représentation de Macfarlane généralisée

Dans la représentation de Macfarlane les opérateurs de création et d'annihilation sont donnés par:

$$b=\alpha(e^{-2isx}-e^{-isx}e^{is\partial}),\qquad b^{+}=\bar{\alpha}(e^{2isx}-e^{is\partial}e^{isx}) \tag{1}$$

Dans ce cas:

$$\alpha=\bar{\alpha}=\frac{1}{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2s}},$$

Ces deux opérateurs vérifient une algèbre q-déformée appelée algèbre de Weyl-Heisenberg donnée par:

$$[b,b^{+}]_q=1,\qquad [b,1]=[b^{+},1]=0 \tag{2}$$

S est un paramètre réel relié à q par l'expression: $q=e^{-s^2}$.
On va démontrer dans ce qui suit que la représentation de Macfarlane pour les opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique n'est pas unique.

En remplaçant dans la représentation de Macfarlane (expression (1)) x par x+g(∂) ou par x+isg(∂) ainsi que ∂ par ∂+f(x) ou par ∂+isf(x) avec f(x)=f* (x), on trouve toujours que les opérateurs de création et d'annihilation vérifient la loi de q-commutation (2).
En utilisant la formule de Hausdorf-Campbell-Beaker (H.C.B.) [8]:

$$e^A e^B=\exp\left\{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{6}[A,[A,B]]+\frac{1}{24}[A,[A,[A,B]]]+\ldots\right\}$$

On trouve de la représentation de Macfarlane généralisée (en remplaçant ∂ par ∂+isf(x) avec f(x)=f* (x)) que les opérateurs de création et d'annihilation prennent les expressions suivantes:

$$b^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[i(x-\partial_x)+s\left(1+x\partial_x+f(x)+\frac{1}{2}\partial_x^2-\frac{3}{2}x^2\right)\right]+o(s^2),$$
$$b=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-i(x+\partial_x)+s\left(-x\partial_x+f(x)+\frac{1}{2}\partial_x^2-\frac{3}{2}x^2\right)\right]. \tag{3}$$

Un simple calcul nous permet de trouver les expressions des opérateurs de position et d'impulsion q-déformés:

$$P_q=\frac{i}{\sqrt{2}}(b^{+}-b)=-x+\frac{i}{2}s(1+2x\partial_x)+o(s^2),$$
$$X_q=\frac{1}{\sqrt{2}}(b^{+}+b)=-i\partial_x+\frac{1}{2}s(-3x^2+2f(x)+1+\partial_x^2)+o(s^2) \tag{4}$$

On voit que les opérateurs de création et d'annihilation dépendent fortement de la fonction f(x).

Etats cohérents q-déformés $|\lambda\rangle$ de l'opérateur d'annihilation "b" dans la représentation de configuration:

Cherchons les états propres de l'opérateur 'b' donnés par:

$$b|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle \tag{5}$$

Dans l'approximation de faible déformation , et en utilisant l'expression (3) de l'opérateur d'annihilation 'b', on peut écrire:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-i(x+\partial_x)+s\left(-x\partial_x+f(x)+\frac{1}{2}\partial_x^2-\frac{3}{2}x^2\right)\right]|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle,$$

Dans la représentation de configuration, on peut écrire aussi:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\langle x|\left[-i(x+\partial_x)+s\left(-x\partial_x+f(x)+\frac{1}{2}\partial_x^2-\frac{3}{2}x^2\right)\right]|\lambda\rangle=\lambda\langle x|\lambda\rangle,$$

En utilisant les relations de fermeture,

$$\int dx' |x'\rangle\langle x'| = 1,$$

$$\int dp |p\rangle\langle p| = 1$$

Et la formule d'inversion de la transformation de Fourier [8]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \psi(x')\delta(x-x') = \psi(x) \quad (6)$$

On trouve l'expression suivante des états propres de l'opérateur d'annihilation "b":

$$-\left[\frac{2}{s}\left(ix+\frac{3}{2}sx^2-sf(x)+\sqrt{2}\lambda\right)\right]\psi_\lambda(x)-\frac{2}{s}(i+sx)\psi'_\lambda(x)+\psi''_\lambda(x)=0,$$

Elle est de la forme:

$$\psi''_\lambda(x)+b(x)\psi'_\lambda(x)+c(x)\psi_\lambda(x)=0 \quad (7)$$

C'est une équation de type hypergéométrique avec:

$$b(x)=-(2/s)(i+sx),$$

$$c(x)=-(2/s)\left(+ix+\frac{3}{2}sx^2-sf(x)+\sqrt{2}\lambda\right). \quad (8)$$

Pour résoudre cette équation, posant: $\psi_\lambda(x)=h(x)\,v(x)$; la fonction h(x) est choisie de sorte que [9,10]:

$$2h'(x)+b(x)h(x)=0. \quad (9)$$

Calculant la première et la seconde dérivée de $\psi_\lambda(x)$, ensuite remplaçant les dans (7), on trouve:

$$\begin{aligned}&\psi''_\lambda(x)+b(x)\psi'_\lambda(x)+c(x)\psi_\lambda(x)=\\&h(x)v''(x)+\left[h''(x)+b(x)h'(x)+c(x)h(x)\right]v(x)=0\end{aligned} \quad (10)$$

Si on pose:

$$h(x)=\exp\left[-\frac{1}{2}A(x)\right], \quad (11)$$

$$b(x)=d\,A(x)/dx.$$

Donc:

$$A(x)=(-2/s)\left(ix+\frac{1}{2}sx^2\right),$$

ce qui implique que :

$$h(x)=\exp\left[(i/s)x+\frac{1}{2}(x^2)\right].$$

En calculant les dérivées $h'(x)$ et $h''(x)$ ainsi que les produits $b(x)h'(x)$ et $c(x)h(x)$, en les remplaçant dans (10), on trouve que la fonction $v(x)$ doit satisfaire la condition:

$$v''(x)+\left[-\left(2x+\frac{i}{s}\right)^2+\left(1-\left(2\sqrt{2}\lambda/s\right)+2f(x)\right)\right]v(x)=0 \quad (12)$$

Maintenant, on va discuter les solutions de cette équation selon le choix de la fonction f(x):

1- Si f(x)=0:

Faisant la transformation $t\to 2x+(i/s)$ ce qui donne: $x=\frac{1}{2}\left[t-(i/s)\right]$. Remplaçant dans (12), on trouve:

$$v''(t)+\left[i^2t^2+\left(1-\left(2\sqrt{2}\lambda/s\right)\right)\right]v(t)=0,$$

elle est de la forme:

$$v''(t)+\left[\alpha^2t^2+\beta\right]v(t)=0,$$

ou de la forme:

$$v''(t)+\left[\lambda'+l^2t^2\right]v(t)=0. \quad (13a)$$

$$\left\{\begin{aligned}\alpha^2&=l^2=i^2\\ \beta=\lambda'&=1-\left(2\sqrt{2}\lambda/s\right)\end{aligned}\right\} \quad (13b)$$

Cette équation hypergéométrique de type de Whittaker [11], admet une solution de type:

$$v(t)=D_{-(l+i\lambda')/2l}\left[\pm\sqrt{l}(1+i)t\right] \quad (14)$$

où $D_\nu(z)$ est une fonction cylindrique parabolique donnée par:

$$D_\nu(z)=2^{\frac{1}{4}+\nu/2}z^{\frac{-1}{2}}W_{\frac{1}{4}+\nu/2,\frac{-1}{4}}\left(z^2/2\right),$$

$W_{\frac{1}{4}+\nu/2,\frac{-1}{4}}\left(z^2/2\right)$: fonction de Whittaker.

Donc:

$$\begin{aligned}D_\nu(z)=2^{\nu/2}e^{-z^2/4}&\left\{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)/\Gamma\left[(1-\nu)/2\right]\right){}_1F_1\left(-\nu/2;\frac{1}{2};z^2/2\right)+\right.\\&\left.\left(z/\sqrt{2}\right)\left[\left(\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)/\Gamma(\nu/2)\right){}_1F_1\left((1-\nu)/2;\frac{3}{2};z^2/2\right)\right]\right\},\end{aligned}$$

où:

${}_1F_1(x,y,z)$ est une fonction hypergéométrique.

donc les états cohérents sont alors donnés par:

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(x)&=h(x)\,v(x)\\&=A\left(\exp\left[(ix/s)+\frac{1}{2}x^2\right]\right)D_{-(\alpha+i\beta)/2\alpha}\left\{\pm\sqrt{\alpha}\left[2(1+i)x+(i-1)/s\right]\right\}\end{aligned}$$

(15)

2- Si f(x)=4x²-1:

En remplaçant dans l'équation (12), et après tout calcul fait, on trouve l'expression suivante:

$$v''(x)+[-\frac{4i}{s}x-\frac{2\sqrt{2}}{s}\lambda+\frac{1}{s^2}]v(x)=0 \qquad (16a)$$

Elle est de la forme:

$$v''(x)+(ax+b)v(x)=0 \qquad (16b)$$

Posant ax+b=λ^2z, d'où on obtient l'équation différentielle suivante:

$$v''(x)+(\frac{\lambda^6}{a^2}z)v(x)=0 \qquad (17)$$

qui admet une solution de type:

$$v(z)=z^{\frac{1}{2}}\zeta_{\frac{1}{3}}(2\frac{\lambda^3 z^{\frac{3}{2}}}{3a}) \qquad (17a)$$

Où $\zeta_\nu(x)$ dénote les fonctions $J_\nu, Y_\nu, H_\nu^{(1)}\ ou\ H_\nu^{(2)}$ ou leurs combinaisons.

J_ν, Y_ν sont les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce.

$$Y_\nu=\frac{1}{\sin\nu\pi}[J_\nu(z)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(z)],$$

$$et$$

$$H_\nu^{(1)}=J_\nu+iY_\nu,$$

$$H_\nu^{(2)}=J_\nu-iY_\nu$$

Avec $H_\nu^{(1)}\ et\ H_\nu^{(2)}$ sont les fonctions de Hankel de première et de seconde espèce respectivement [11].

D'où l'état cohérent est donné par:

$$\psi_\lambda(x)=h(x)v(x)=Ae^{\frac{i}{s}x+\frac{1}{2}x^2}(\frac{a}{\lambda^2}x+\frac{b}{\lambda^2})^{\frac{1}{2}}\zeta_{\frac{1}{3}}[2\frac{\lambda^3}{3a}(\frac{a}{\lambda^2}x+\frac{b}{\lambda^2})^{\frac{3}{2}}]$$

A est une constante d'intégration.

On voit que les états cohérents $\psi_\lambda(x)$ dans les deux cas sont différents; et sont aussi très difficile à interpréter. Pour cela; on va utiliser une solution perturbative donnée par:

$$\psi_\lambda(x)=\psi_{0\lambda}(x)+s\psi_{1\lambda}(x)$$

Remplaçant dans l'équation des états propres de l'opérateur d'annihilation "b" et identifiant les termes de même ordre en s, on trouve:

$$\psi'_{0\lambda}(x)=(-x+i\lambda\sqrt{2})\psi_{0\lambda} \qquad (18a)$$

$$2i\psi'_{1\lambda}(x)+2(ix+\lambda\sqrt{2})\psi_{1\lambda}(x)=\psi''_{0\lambda}(x)-2x\psi'_{0\lambda}(x)-2(\frac{3}{2}x^2-f(x))\psi_{0\lambda}(x) \qquad (18b)$$

De (18a) on trouve:

$$\psi_{0\lambda}(x)=Ae^{(-\frac{1}{2}x^2+i\lambda\sqrt{2}x)}$$

A est une constante d'intégration.

Notant que la solution de (18b) dépende fortement de la fonction f(x). Discutant maintenant les solutions selon le choix de la fonction f(x).

1) Si f(x)=0, la solution est égale à:

$$\psi_{1\lambda}(x)=\left\{\frac{1}{2}iA[(2\lambda^2+1)x+2i\lambda\sqrt{2}x^2+C]\right\}e^{(-\frac{1}{2}x^2+i\lambda\sqrt{2}x)}$$

A et C constantes d'intégration.

Donc l'état cohérent à l'ordre s est donné par:

$$\psi_\lambda(x)=Ae^{(-\frac{1}{2}x^2+i\lambda\sqrt{2}x)}\left\{1+s\left[\frac{1}{2}i(2\lambda^2+1)x-\lambda\sqrt{2}x^2+K\right]\right\}+o(s^2)$$

K: constante d'intégration.

2) Si f(x)=(3/2)x² après tout calcul fait, on trouve l'expression suivante:

$$\psi_{1\lambda}(x)=\left\{\frac{1}{2}iA[-x^3+2i\lambda\sqrt{2}x^2+(2\lambda^2+1)x+C]\right\}e^{(-\frac{1}{2}x^2+i\lambda\sqrt{2}x)}$$

Et l'état cohérent à l'ordre "s" s'écrit comme:

$$\psi_\lambda(x)=Ae^{(-\frac{1}{2}x^2+i\lambda\sqrt{2}x)}\left\{1+s\left[-\frac{1}{2}ix^3-\lambda\sqrt{2}x^2+\frac{1}{2}i(2\lambda^2+1)x+K\right]\right\}+o(s^2) \qquad (20)$$

K: constante d'intégration.

On voit dans tous les cas, les états cohérents sont différents.

Les constantes d'intégrations A et K peuvent être déterminées à partir de la condition de normalisation donnée par:

$$\langle\psi_\lambda(x)|\psi_\lambda(x)\rangle=\int_{\Omega_s}D_s(q)\psi_\lambda^*(x)\psi_\lambda(x)=1$$

Ω_s : domaine d'intégration donné par: $\Omega_s=\left[-\frac{\pi}{s},\frac{\pi}{s}\right]$; et D_s (q) est la mesure.

On a aussi utilisé d'autres représentations et on a toujours trouvé que les états cohérents q-déformés changent en changeant de représentation.

CONCLUSION

La représentation de Macfarlane des opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique n'est pas unique. Les états cohérents q-déformés de l'algèbre de Weyl-Heisenberg q-déformée changent en généralisant la représentation de Macfarlane ou en changeant de représentation de l'algèbre q-déformée.

Enfin, les représentations des algèbres q-déformées dans la théorie de déformation ne sont pas équivalentes, et la physique diffère d'une représentation à l'autre.

RÉFÉRENCES

[1] Denis Bonatsos, C. Daskaloyannis, Harry A. Mavromatis, "Connection between q-deformed anharmonic oscillators and quasi-exactly soluble potentials". Phys. Lett. A **199**, 1-6 (1995).

[2] M. R. Kibler, "Introduction to quantum groups". Arxiv: hep-th/9409012 v1 2 Sep 94.

[3] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. **10** 63 (1985); **11** 247 (1986).

[4] S. L. Woronowicz, Pub. RIMS-Kyoto **23** 117 (1987).

[5] A. J. Macfarlane, "On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum groups $SU(2)_q$.

[6] M. chaïchian, A. P. Demichev, "q-deformed path integral". Phys. Lett. B **320**, 273-280 (1994).

[7] A. K. Rajagopal, "Coordinate and momentum representations of the q-deformed oscillator and their interpretation". Phys- Rev. A. **47**, R3465-R3467 (1993).

[8] Claude Cohen-Tanoudji, Bernard Diu, Frank Laloë. "Mécanique quantique I". Edition Hermann, Paris (1977).

[9] N. Boucerredj, "Etats cohérents Q-déformés". Sciences et Technologie (Revue semestrielle de l'Université Frères Mentouri- Constantine) A N° **21** (Juin 2004).

[10] N. Boucerredj, " A new q-deformed Heisenberg-Weyl algebra". In the sixth Constantine high energy physics school. Weak and strong interactions phenomenology. Constantine University. (2002).

[11] A. Nikiforov, V. Ouvarov. 'Fonctions spéciales de la physique mathématique.' Edition Mir, Moscou (1983).

[7] E.Lorenzo, Solar Electricity: Engineering of Photovoltaics Systems, Progensa, 1994.

[8] J.N.Marvart, Solar Electricity, Willey, 2000.

[9] J.-P.Charles, Caractérisation I (V) et fonctionnement des photopiles solaires, Thèse de Doctorat ès Sciences, Université des Sciences et Techniques du Languedoc (Juillet 1984).

[10] MARTIN WOLF and HANS RAUSCHENBACHT, SERIES RESISTANCE EFFECTS ON SOLAR CELL MEASUREMENTS, Advanced Energy Conversion. Vol. 3, pp. 455-479.

[11] E.E.van Dyk and E.L.Meyer "Analysis of the effect of parasitic resistances on the performance of photovoltaic modules" Renewable Energy journal (2003) pp.333-344.

[12] J.P.Charles, A practical method of analysis of the current-voltage characteristics of solar cells, solar Cells, 4(1981) 169-178.