Sciences & Technologie A – N°25, Juin. (2007), pp. 29-35

RESOLUTION D'UN PROBLEME MIN-MAX AVEC UNE COMMANDE VECTORIELLE

Reçu le 25/01/2003 – Accepté le 01/06/2007

Résumé

Un problème min-max en commande optimale à plusieurs entrées avec le signale de sortie bornée a été résolu par une méthode adaptée du simplexe [1, 2, 3]. Celle-ci permet de commencer l'itération par un point intérieur et permet aussi l'obtention d'une solution approchée. Après avoir construit le support et l'accroissement de la fonctionnelle, on a donné le critère d'optimalité et $\varepsilon-$optimale sous forme du principe de Pontriaguine [4]. En utilisant ces deux critères, on a construit une itération de l'algorithme, constituée de trois procédures : Changement de commande, changement d'appui et procédure finale.
Mots clés: Commande optimale, Commande vectorielle, Support contrôle, ε -Optimal.

M. AIDENE
B. OUKACHA

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences
Université Mouloud Mammeri,
Tizi-Ouzou
Algérie

Abstract

An algorithm is proposed to solve the min-max optimal control for linear dynamic system. initial and terminal states are fixed. The terminal constraints is borned. This algorithm is based on the simplex method of linear programming [1, 2, 3].
Keywords: The Commande optimale, Commande vectorielle, Support contrôle, ε -Optimal.

ملخص

إشكالية أدنى– أقصى للتحكم الأمثل ذات مداخل متعددة، مع اشارة خروج محدودة،حلت بطريقة مستنبطة من Simplexe[1,2,3].
هذه الطريقة تسمح ببداية التكرار بنقطة داخلية و تسمح ايضا بالحصول على حل مقرب . بعدما شكلنا الركيز و تزايد Fonctionnelle, قدمنا معيار المثالية ومعيار ε - الأمثل في شكل مبدأ Pontriaguine [4] .
باستخدام هذين المعيارين شكلنا Itération de l'algorithme, مركبة من ثلاث مراحل:تغيير التحكم, تغيير الركيز و المرحلة النهائية.

الكلمات المفتاحيـــــة : - الأمثلε التحكم الأمثل, الطابع ادنى-اقصى -

Un problème non linéaire de contrôle optimal avec une commande vectorielle et des contraintes bornées sur l'ensemble d'accessibilité a été considéré. L'intérêt du problème réside en premier lieu dans le modèle du min-max qui a plusieurs applications pratiques et l'application de la méthode de résolution développée par Gabassov et sont équipe. Ici on a fait une généralisation au problème avec une commande vectorielle et le maintien de la spécificité de min-max, car autrement on aurait un nombre élevé de contraintes.

1. POSITION DU PROBLEME

Dans la classe des commandes constantes par morceaux $U = \{u(t), t \in T = [0, t_*]\}$, considérons le problème suivant:

$$J(u) = \min_{k \in K}\left(c_k' x(t_*) + \alpha_k\right) \to \max_u, \tag{1}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$g_* \le Hx(t_*) \le g^*,\ d_* \le u(t) \le d^*, \tag{3}$$

où $x(t) = (x_j,\ j \in J)$ est un n- vecteur représentant l'état du système à l'instant t, x_0 la position initiale, A, B des $n \times n - n \times r$ - matrices constantes. $H = H[I, J]$ une $m \times n$ -matrice, $g_* = g_*[I], g^* = g^*[I]$ des m-vecteurs scalaires, $\alpha_k, k \in K$, des scalaires où $K = \{1, 2, ..., \rho\}$, $c_k', k \in K$, des vecteurs constants représentant les coûts, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)), t \in T$, la commande agissant sur le système, $d_* < d^*, d_* = (d_{*1}, d_{*2}, ..., d_{*r}), d^* = (d_1^*, d_2^*, ..., d_r^*)$, avec $r > 1$;

$I = \{1, 2, ..., m\}, J = \{1, 2, ..., n\}$ des ensembles d'indices, $J(u)$ le critère de qualité.

La solution du système (2) $x(t)$, donnée par la formule de CAUCHY est égale à:

$$x(t) = F(t)\left(x_0 + \int_0^t F^{-1}(t_*) Bu(\tau) d\tau\right), t \in T, \tag{4}$$

où $F(t) = \exp(At), t \in [0, t_*]$, est une matrice carrée d'ordre n (résolvante), solution du système homogène $\dot{F}(t) = AF(t), F(0) = I_n$. (5)

En utilisant cette solution, le problème (1)-(3) devient un problème de la seule variable $u(t), t \in T$:

$$J(u) = \min_{k \in K}\left(c_k' F(t_*) x_0 + \int_0^{t_*} C_k(t) u(t) dt + \alpha_k\right) \to \max_u, \tag{6}$$

$$g_* - HF(t_*)x_0 \le \int_0^{t_*} P(t)u(t)dt \le g^* - HF(t_*)x_0, \tag{7}$$

$$d_* \le u(t) \le d^*, t \in T = [0, t_*] \tag{8}$$

où

$C_k(t) = c_k' F(t_*) F^{-1}(t) B, k \in K, P(t) = HF(t_*)F^{-1}(t)B, t \in T.$

Définition 1.1

La commande u est admissible si u et $x(t)$ vérifient les contraintes (2)-(3).

La commande admissible u^0 est dite optimale si $J(u^0) = \max_u J(u)$, et u^ε est ε *-optimale* si $J(u^0) - J(u^\varepsilon) \le \varepsilon.$

2. COMMANDE-APPUI (SUPPORT-CONTROLE)

Dans l'intervalle T, choisissons un ensemble T_{ap} de points isolés et de l'ensemble K, un sous ensemble K_{af}, tels que :

$|T_{ap}| \le |K_{af}| - 1 + m.$

A chaque moment $t \in T_{ap}$, construisons deux ensembles $I_{ac}(t) \subset I, I_{af}(t) \subset I \setminus I_{ac}(t)$, tels que $I_{af}(t) \cup I_{ac}(t) \ne \varnothing, \sum_{t \in T_{ap}} |I_{ac}(t)| = m, \sum_{t \in T_{ap}} |I_{af}(t)| = |K_{af}| - 1,$

et soit $I_H = I \setminus I_{ac} \cup I_{af}$.

Désignons par :

$T_{ac} = \{t \in T_{ap} : I_{ac}(t) \ne \varnothing\}, T_{af} = \{t \in T_{ap} : I_{af}(t) \ne \varnothing\}$, $T_H = T \setminus T_{ac} \cup T_{af}$, et posons $Q_{ac} = \{T_{ac}, I_{ac}\}$, où $I_{ac} = \{I_{ac}(t), t \in T_{ac}\}$.

Construisons la matrice :

$\Phi_{ac} = \Phi(Q_{ac}) = (\varphi_i(t), i \in I_{ac}, t \in T_{ac})$, où $\varphi_i(t)$ est la $i^{ième}$ colonne de la $m \times r -$ matrice $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(2), ..., \varphi_r(t)) = HP(t_* - t), t \in T,$

et $P(t)$ est la solution de l'équation différentielle:

$\dot{P} = AP, P(0) = B.$

Définition 2.1

L'ensemble $I_{ac} = \{I_{ac}(t), t \in T_{ac}\}$ et l'ensemble T_{ac} sont appelés respectivement *ensemble des indices d'appui* et *ensemble des moments d'appui*, et la paire $Q_{ac} = \{T_{ac}, I_{ac}\}$ appui des contraintes du problème (1)-(3) si la $m \times m-$matrice Φ_{ac} est inversible.

En utilisant cet appui, on construit les vecteurs suivants: $C_{ac}^k = (c_i^k(t), i \in I_{ac}(t), t \in T_{ac}), k \in K,$ où $c_i^k(t)$ est le $i^{ième}$ élément du $r-$vecteur $C^k(t) = (c_1^k(t), ..., c_r^k(t)) = C_k' P(t_* - t), t \in T, k \in K$, et les estimations suivantes:

$$\Delta^k(t) = (\Delta_1^k(t), ..., \Delta_r^k(t)) = y_k' \Phi(t) - C'^k(t), t \in T, k \in K; \qquad (9)$$

$$y_k' = C_{ac}'^k \Phi_{ac}^{-1}, k \in K. \qquad (10)$$

Désignons par $Q_{af} = \{T_{af}, I_{af}, K_{af}\}$, et construisons la matrice suivante:

$\Delta_{af} = (\Delta(Q_{af}); e(K_{af})),$

où $\Delta(Q_{af}) = (\Delta_i^k(t), i \in I_{af}(t), t \in T_{af}, k \in K_{af}),$

$e(K) = (e_k = 1, k \in K)$, $\Delta_i^k(t)$ est le $i^{ième}$ élément de la fonction (9).

Définition 2.2

Les ensembles $K_{af}, T_{af}, I_{af} = \{I_{af}(t), t \in T_{af}\}$ sont appelés respectivement des *indices d'appui* et l'ensemble Q_{af} *l'appui de la fonctionnelle* si la matrice Δ_{af} est inversible, Δ_{af} est dite matrice d'appui.

Soit Q_{af} un appui de la fonctionnelle, en utilisant la dernière ligne de la matrice Δ_{af}^{-1}, on construit le vecteur $\lambda = (\lambda[K_{af}], \lambda[K_H]), K_H = K \setminus K_{af}$: (11)

$$\lambda'[K_{af}] = (0[I_{af}], 1)\Delta_{af}^{-1}, \lambda[K_H] = 0$$

Définition 2.3

L'appui Q_{af} est dit régulier si $\lambda[K_{af}] \geq 0$.

Par la suite on ne considérera que des appuis réguliers.

Définition 2.4

La paire $Q_{ap} = \{Q_{ac}, Q_{af}\}$ formée de l'appui des contraintes et de l'appui de la fonctionnelle est appelée *appui du problème* (1)-(3).

L'appui Q_{ap} est dit régulier si Q_{af} est régulier.

Remarque 2.5

L'appui Q_{af} avec $T_{af} = \emptyset$ est régulier.

Définition 2.6

La paire $\{u, Q_{ap}\}$ formée d'une commande admissible et de l'appui Q_{ap} est appelée *commande appui*.

Définition 2.7

La commande appui $\{u, Q_{ap}\}$ est dite non dégénérée si : Ils existent de tels nombres $\gamma_0 > 0, \mu_0 > 0, u_{ij}^\gamma, i \in I_{ap}(t_j), j = 1, ..., s$; tel que pour tous $\gamma, 0 < \gamma < \gamma_0$, on a les relations suivantes:

1°-

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{t_j-\gamma}^{t_j+\gamma} \sum_{i \in I_{ap}(t_j)} \varphi_i(t) u_i(t) dt = \sum_{j=1}^{s} \int_{t_j-\gamma}^{t_j+\gamma} \sum_{i \in I_{ap}(t_j)} \varphi_i(t) u_{ij}^\gamma(t) dt,$$

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{t_j-\gamma}^{t_j+\gamma} \sum_{i \in I_{ap}(t_j)} \Delta_i^k(t) u_i(t) dt = \sum_{j=1}^{s} \int_{t_j-\gamma}^{t_j+\gamma} \sum_{i \in I_{ap}(t_j)} \Delta_i^k(t) u_{ij}^\gamma(t) dt, k \in K$$

$$d_{*i} + \mu_0 \leq u_{ij}^\gamma \leq d_i^* - \mu_0, i \in I_{ap}(t_j), j = 1, ..., s.$$

2°- $J(u) < c_k' x(t_*) + \alpha_k, k \in K_H$.

3°- $g_*(I_H) < H(I_H, J)x(t_*) < g^*(I_H)$.

3. CRITERE D'OPTIMALITE

Soit $\{u, Q_{ap}\}$ une commande appui de départ, et $x(t), t \in T$, sa trajectoire correspondante, les vecteurs $y_k, k \in K$ (10), les nombres $\lambda_k, k \in K$ (11), et la trajectoire unique $\psi(t), t \in T$, solution du système conjugué:

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \psi(t_*) = \sum_{k \in K} \lambda_k (-H' y_k + c_k). \qquad (12)$$

En utilisant cette fonction, on construit la co-commande $\Delta(t) = (\Delta_1(t), ..., \Delta_r(t)), t \in T$:

$$\Delta(t) = -\psi'(t) B, t \in T. \qquad (13)$$

Remarque 3.1

La co-commande $\Delta(t), t \in T$ peut être écrite sous une autre forme:

$$\Delta(t) = \sum_{k \in K} \lambda_k \Delta^k(t), t \in T. \qquad (14)$$

Soit $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $\overline{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, une autre commande admissible et sa trajectoire admissible correspondante.

Calculons les vecteurs d'écarts:

$$\omega_k = c_k' x(t_*) + \alpha_k - J(u), \qquad \overline{\omega}_k = c_k' \overline{x}(t_*) + \alpha_k - J(\overline{u}), k \in K \tag{15}$$

où $\omega \geq 0, \overline{\omega} \geq 0, \forall k \in K$, par définition de $J(u)$.

Introduisons le vecteur $\Delta\omega(K) = (\Delta\omega_k, k \in K)$:

$$\Delta\omega_k = \overline{\omega}_k - \omega_k = c_k' \Delta x(t_*) - \Delta J(u), k \in K. \tag{16}$$

De la définition de $J(\overline{u})$ et du vecteur $\omega(K)$, résulte l'inégalité:

$\Delta\omega_k \geq -\omega_k$, $k \in K$. En utilisant l'expression (4), on a

$$\Delta x(t_*) = \int_0^{t_*} F(t_*) F^{-1}(t) B \Delta u(t) dt .$$

De là, l'expression (16) devient :

$$\Delta J(u) = c_k' \Delta x(t_*) - \Delta\omega_k = \int_O^{t_*} c_k' F(t_*) F^{-1}(t) B \Delta u(t) dt - \Delta\omega_k = \int_O^{t_*} C_k' \Delta u(t) dt - \Delta\omega_k .$$

De là en vertu des vecteurs (11) et (14), résulte la formule d'accroissement du critère de qualité:

$$\Delta J(u) = -\int_0^{t_*} \Delta'(t) \Delta u(t) dt + \sum_{i \in I_{ac} \cup I_{af}} \nu_i \upsilon_i - \sum_{k \in K} \lambda_k \Delta\omega_k \tag{17}$$

où

$$\nu(I) = (\nu_i, i \in I) = \sum_{k \in K} \lambda_k y_k'(I); \nu(I_H) = 0; \upsilon(I) = (\upsilon_i, i \in I) = H\Delta x(t_*)$$

La valeur maximale de l'accroissement (17) sous les contraintes suivante:

$$\Delta J(u) \to \max,$$
$$d_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d^* - u(t), t \in T,$$
$$g_{*i} - H(i, J) x(t_*) \leq \upsilon_i \leq g_i^* - H(i, J) x(t_*), i \in I_{ap},$$

$$\Delta\omega_k \geq -\omega_k, k \in K_{af}. \tag{18}$$

est égale à:

$$\beta(u, Q_{ap}) = \sum_{i=1}^{r} \left[\int_{T^+(i)} \Delta_i(t)(u_i(t) - d_{*i}) dt + \int_{T^-(i)} \Delta_i(t)(u_i(t) - d_i^*) dt \right] + \sum_{k \in K} \lambda_k \omega_k + \sum_{\nu_i < 0, i \in I_{ap}} \nu_i \upsilon_{*i} + \sum_{\nu_i > 0, i \in I_{ap}} \nu_i \upsilon_i^* = \int_0^{t_*} \varepsilon(t) dt + \sum_{k \in K} \varepsilon_k + \varepsilon_1, \tag{19}$$

appelée valeur de suboptimalité de la commande appui $\{u, Q_{ap}\}$;

où

$T^+(i) = \{t \in T : \Delta_i(t) > 0\}$, $T^-(i) = \{t \in T : \Delta_i(t) < 0\}$, $i = \overline{1,r}$

$\upsilon_*(I) = (\upsilon_{*i}, i \in I) = g_*(I) - Hx(t_*)$, $\upsilon^*(I) = (\upsilon_i^*, i \in I) = g^*(I) - Hx(t_*)$.

De là l'inégalité suivante:

$$J(\overline{u}) - J(u) \leq \beta(u, Q_{ap}), \forall \overline{u} .$$

De cette dernière inégalité, on obtient les critères suivants :

Théorème 3.2

Les relations :

$$\begin{cases} \Delta_i(t) > 0, \ pour \ u_i(t) = d_{*i}, \\ \Delta_i(t) < 0, \ pour \ u_i(t) = d_i^*, \\ \Delta_i(t) = 0, \ pour \ d_{*i} < u_i(t) < d_i^*, t \in T, i = \overline{1,r}, \\ \nu_i > 0, \ pour \ H(i, J) x(t_*) = g_i^*, \\ \nu_i < 0, \ pour \ H(i, J) x(t_*) = g_{*i}, \\ \nu_i = 0, \ pour \ g_{*i} < H(i, J) x(t_*) < g_i^*, i \in I_{ap}, \\ \lambda_k > 0, \ pour \ \omega_k = 0, \\ \lambda_k = 0, \ pour \ \omega_k > 0, k \in K, k \in K_{af}, \end{cases} \tag{20}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité de la commande appui $\{u, Q_{ap}\}$.

Théorème 3.3

Pour que la commande appui $\{u, Q_{ap}\}$ soit optimale, il est suffisant que le long de la commande $u(t), t \in T$ et des trajectoires $x(t), \psi(t), t \in T$, les relations suivantes soient vérifiées et elles sont nécessaires dans le cas de la non dégénérescence:

$$\begin{aligned} & H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d_* \leq u \leq d^*} H(x(t), \psi(t), u), t \in T, \\ & \lambda'(K)\omega(K) = -\max_{\overline{\omega}_k \geq O} (-\lambda'(K)\overline{\omega}(K)), \\ & \nu' Hx(t_*) = \max_{g_* \leq Z \leq g^*} \nu' Z. \end{aligned} \tag{21}$$

Théorème 3.4

Soit ε un nombre positif donné.

Pour que la commande admissible $u = (u(t), t \in T)$ soit $\varepsilon -$optimale, il faut et il suffit que pour un appui régulier, sur le long de la commande-appui $\{u, Q_{ap}\}$ et des trajectoires correspondantes $x(t), \psi(t), t \in T$, les conditions $\varepsilon -$ maximum soient vérifiées:

$$H(x(t),\psi(t),u(t)) = \max_{d_*\le u\le d^*} H(x(t),\psi(t),u) - \varepsilon(t),\ t\in T,$$
$$\lambda'(K)\omega(K) = -\max_{\omega_k\ge O}(-\lambda'(K)\overline{\omega}(K)) + \varepsilon_k,\ k\in K_{af}, \quad (22)$$
$$\nu' Hx(t_*) = \max_{g_*\le Z\le g^*} \nu' Z - \varepsilon_1,$$

avec $\int_O^{t_*} \varepsilon(t)dt + \varepsilon_1 + \sum_{k\in K_{af}} \varepsilon_k \le \varepsilon$.

4. Algorithme

Soit $\{u, Q_{ap}\}$ une commande-appui de départ pour la quelle, pour $\varepsilon > 0$ donné, le principe $\varepsilon-$maximum n'est pas vérifié.
Cette méthode consiste à améliorer la commande-appui $\{u, Q_{ap}\} \to \{\overline{u}, \overline{Q}_{ap}\}$ en trois étapes tel que $J(\overline{u}) \ge J(u)$:

i) Changement de commande $u \to \overline{u}$.

ii) Changement d'appui $Q_{ap} \to \overline{Q}_{ap}$.

iii) Procédure finale.

4.1. Changement de commande

Soit $\{u, Q_{ap}\}$ une commande-appui de départ et $\overline{u}(t) = u(t) + \theta\Delta u(t),\ t\in T$, une autre commande admissible pour le problème (1)-(3), où $\Delta u(t)$ est la direction du changement de la commande, $\theta \ge 0$, le pas maximum admissible le long de cette direction.
Choisissons les nombres $\alpha > 0, h > 0$ (paramètres de l'algorithme) et construisons les ensembles suivants:

$$T_0 = \{t\in T : \eta(t) < \alpha\},\ T_* = \{t\in T : \eta(t)\ge\alpha\},\ T_* = T\setminus T_0,$$

où $\eta(t) = \min|\Delta_i(t)|,\ i = 1, ..., r$.

Subdivisons l'ensemble T_0 en intervalles $[\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j[,\ j = 1, ..., N$, tels que

$$T_0 = \bigcup_{j=1}^{N} [\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j[,\ [\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j[\cap[\underline{\tau}_i, \overline{\tau}_i[= \emptyset, i\ne j,\ \overline{\tau}_j - \underline{\tau}_j \le h,\ j = 1,\ ....,\ N;\ T_p \subset \{\overline{\tau}_j,\ j = \overline{1,N}\}$$

$$u(t) = u_j = const,\ t\in[\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j[,\ j = \overline{1,N}.$$

Désignons par $\ell_j = (\ell_{ij}, i = \overline{1,r}),\ j = \overline{1,N}$:

$$\ell_j = \begin{cases} \theta\Delta u(t),\ t\in[\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j[,\ j = \overline{1,N} \\ \theta,\ si\ j = N+1 \end{cases}$$

où $j = N+1$, est l'indice correspondant à l'ensemble $T_* = T\setminus T_0$.

Et posons

$$\Delta u_i(t) = \begin{cases} d_i^* - u_i(t),\ si\ \Delta_i(t) < -\alpha, \\ d_{*i} - u_i(t),\ si\ \Delta_i(t) > \alpha,\ i = \overline{1,r},\ t\in T_*. \end{cases}$$

Calculons les quantités suivantes:

$$q_j = \int_{\underline{\tau}_j}^{\overline{\tau}_j} \Phi(t)dt,\ g_k^{(j)} = -\int_{\underline{\tau}_j}^{\overline{\tau}_j} \Delta_k(t)dt,\ k\in K,\ j = 1, ..., N,$$

$$q_{N+1} = \int_{T_*} \Phi(t)\Delta u(t)dt,\ g_k(N+1) = -\int_{T_*} \Delta'_k(t)\Delta u(t)dt,$$

$$d_{*j} = d_* - u_j,\ d_j^* = d^* - u_j,\ j = \overline{1,N};\ d_{*N+1} = 0,\ d_{N+1}^* = 1,$$

$$\theta\Delta u_i(t) = \ell_{ij} = const,\ t\in[\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j[,\ j = \overline{1,N},\ i = \overline{1,r},\ 0\le\theta\le 1, \quad (23)$$
$$V_* = g_* - Hx(t_*),\ V^* = g^* - Hx(t_*),$$
$$g_k = (g_k(j),\ j = \overline{1, N+1}),\ G = (q_j,\ j = \overline{1, N+1}),$$
$$\overline{d}_* = (d_{*j},\ j = \overline{1, N+1}),\ \overline{d}^* = (d_j^*,\ j = \overline{1, N+1}).$$

En utilisant ces quantités le problème (18) sera équivalent au problème dit d'appui suivant:

$$\min_{k\in K}\left(\sum_{j=1}^{N+1} g'_k(j)\ell_j + \omega_k\right) \to \max_{\ell},$$
$$V_* \le \sum_{j=1}^{N+1} q_j\ell_j \le V^*, \quad (24)$$
$$d_{*j} \le \ell_j \le d_j^*,\ j = \overline{1, N+1},$$

dont la résolution se fera par la méthode adaptée de la manière suivante:
Soit $S = \{1, 2, ..., N+1\}$ l'ensemble des paramètres du problème (24) et posons les ensembles suivants:

$$S_{ac} \subset S,\ K_{af} \subset K,\ |S_{ap}| \le |K_{af}| + m - 1,$$
$$S_{ac} \subset S_{ap}, |S_{ac}| \le m,\ S_{af} \subset S_{ap}, |S_{af}| \le |K_{af}| - 1.$$

A chaque indice $j\in S_{ac}$, on construit l'ensemble $I_{j_{ac}} \subset I : \sum_{j\in S_{ac}} |I_{j_{ac}}| = m,$ et à chaque moment $j\in S_{ac}$, on construit l'ensemble $I_{j_{af}} \subset I\setminus I_{j_{ac}},\ \sum_{j\subset S_{af}} |I_{j_{af}}| = |K_{af}| - 1.$

Introduisons la matrice $Q_{ac} = Q(S_{ac}) = (q_{ij}, i\in I_{j_{ac}},\ j\in S_{ac})$ où q_{ij} est la $i^{ième}$ ligne de la matrice q_j (23) avec $\det Q(S_{ac}) \ne 0$.

Construisons les estimations :

$$\delta^{ij} = (K_{af}) = (g^{ij}(K_{af}), i\in I_{j_{ac}}, j\in S_{ac})$$
$$Q_{ac}^{-1} \times g^{ij}(K_{af}),\ i\in I,\ j\in S \quad (25)$$

et formons la matrice :

$$D_{af} = \left(\delta^{ij}(K_{af}), i \in I_{j_{af}}, j \in S_{af}; e(K_{af})\right), \qquad (26)$$

où $\det D_{af} \neq 0$.

Posons comme plan de départ $\ell_j = 0$ et l'appui $S_{ap} = \left(S_{ac}, S_{af}, I_{j_{af}}, K_{af}\right)$.

Au bout d'un certain nombre d'itération on aboutit à la solution $\varepsilon -$optimale $\left\{\ell^{\varepsilon}_j, \overline{S}_{ap}\right\}$du problème (24).

La nouvelle commande du problème (1)-(3) sera alors:

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \ell^{\varepsilon}_j, t \in [\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j[, j = \overline{1, N}, \\ u(t) + \ell^{\varepsilon}_{N+1}\Delta u(t), t \in T_*. \end{cases} \qquad (27)$$

$\overline{u}$ ainsi construite vérifie l'inégalité $J(\overline{u}) \geq J(u)$.

Par la suite si l'indice $N+1 \notin \overline{S}_{ap}$ alors on pose $\widetilde{S}_{ap} = \overline{S}_{ap}$, sinon on l'exclut de l'appui [2] : $\widetilde{S}_{ap} = \left(\overline{S}_{ap} \setminus N+1\right) \cup j_*$.

L'appui du problème (1)-(3) est défini à partir de l'appui du problème (24):

$\widetilde{T}_{ac} = \left\{\tau_j, j \in \widetilde{S}_{ac}\right\}, \widetilde{T}_{af} = \left\{\tau_j, j \in \widetilde{S}_{af}\right\}, \widetilde{I}_{ac}(\tau_j) = \widetilde{I}_{j_{ac}}, j \in \widetilde{S}_{ac}$, $\widetilde{I}_{af}(\tau_j) = \widetilde{I}_{j_{af}}, j \in \widetilde{S}_{af}, \widetilde{K}_{af} = K_{af}$,

et posons $\widetilde{Q}_{ap} = \left\{\widetilde{T}_{ap}; \widetilde{I}_{ac}(t), t \in \widetilde{T}_{ac}; \widetilde{T}_{af}; \widetilde{I}_{af}(t), t \in \widetilde{T}_{af}; \widetilde{K}_{af}\right\}$.

Par la suite, construisons les matrices:

$$\Phi_{ac} = \left(\varphi_i(t), i \in \widetilde{I}_{ac}(t), t \in \widetilde{T}_{ac}\right),$$
$$\widetilde{\Delta}_{af} = \left(\Delta_i(\widetilde{K}_{af}, t), i \in \widetilde{I}_{af}(t), t \in \widetilde{T}_{af}; e(\widetilde{K}_{af})\right).$$

Et calculons les vecteurs $\widetilde{\Delta}^k(t)$ (9), $\widetilde{\lambda}(K)$ (11), vérifions que $\det\widetilde{\Phi}_{ac} \neq 0$ et $\det\widetilde{\Delta}_{af} \neq 0$.

Calculons alors la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{ap}) = \overline{\beta}$.

-Si $\overline{\beta} = 0$ alors $\left\{\overline{u}, \widetilde{Q}_{ap}\right\}$ est une commande-appui optimale pour le problème (1)-(3).

-Si $\overline{\beta} \leq \varepsilon$ alors $\left\{\overline{u}, \widetilde{Q}_{ap}\right\}$ est une commande-appui $\varepsilon -$optimale.

-Si non, on passe soit à une nouvelle itération en démarrant avec la commande-appui $\left\{\overline{u}, \widetilde{Q}_{ap}\right\}$ et les paramètres $\overline{\alpha} < \alpha, \overline{h} < h$ ou à la procédure de changement d'appui.

4.2. Changement d'appui

Soit $\widetilde{\Psi}(t)$, $t \in T$ la solution du système conjugué (12) construite par l'appui $\widetilde{Q}_{ap}$, et soit $\widetilde{\Delta}(t) = -\widetilde{\psi}'(t)B, t \in T$, la co-commande, construisons alors la quasi-commande $\omega = (\omega(t), t \in T)$:

$$\begin{aligned} &\omega_i(t) = d^*_i, \; si \; \widetilde{\Delta}_i(t) < 0, \\ &\omega_i(t) = d_{*i}, \; si \; \widetilde{\Delta}_i(t) > 0, \\ &\omega_i(t) \in [d_{*i}, d^*_i], \; si \; \widetilde{\Delta}_i(t) = 0, t \in T, i = \overline{1, r}\,; \end{aligned} \qquad (28)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (\chi(t), t \in T)$ solution du système:

$\dot{\chi} = A\chi + B\omega, \chi(0) = x_0$.

-Si

$g_* \leq H\chi(t_*) \leq g^*$ et

$J(\omega) = c'_k \chi(t_*) + \alpha_k, k \in K_{af}$, alors la quasi-commande $\omega(t)$, $t \in T$ est optimale pour le problème (1)-(3).

-Si non, déterminons le vecteur:

$$\begin{pmatrix} \gamma(\widetilde{T}_{ap}) \\ \gamma(s+1) \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} g^*_*(\widetilde{I}_{ap}) - H(\widetilde{I}_{ap}, J)\chi(t_*) \\ C'(\widetilde{K}_{af})\chi(t_*) + \alpha(\widetilde{K}_{af}) - e(\widetilde{K}_{af})J(\omega) \end{pmatrix} \qquad (29)$$

où

$$\gamma(\widetilde{T}_{ap}) = \left(\gamma_i(t), i \in \widetilde{I}_{ap}(t), t \in \widetilde{T}_{ap}\right); \widetilde{I}_{ap}(t) = \widetilde{I}_{ac}(t) \cup \widetilde{I}_{af}(t),$$
$$t \in \widetilde{T}_{ap} = \widetilde{T}_{ac} \cup \widetilde{T}_{af}; \; s = \sum_{t \in \widetilde{T}_{ap}} \left|\widetilde{I}_{ap}(t)\right|;$$

$$R = \begin{pmatrix} \varphi_i(t), i \in \widetilde{I}_{ap}(t), t \in \widetilde{T}_{ap} \\ -c_i(\widetilde{K}_{af}, t), i \in \widetilde{I}_{ap}(t), t \in \widetilde{T}_{ap}; e(\widetilde{K}_{af}) \end{pmatrix},$$

où $\det R \neq 0$, car $\det\widetilde{\Phi}_{ac} \neq 0$ et $\det\widetilde{\Delta}_{af} \neq 0$;

$$g^*_* = \begin{cases} g_{*i}, \; si \; \widetilde{v}_i < 0 \\ g^*_i, \; si \; \widetilde{v}_i > 0, i \in \widetilde{I}_{ap}. \end{cases}$$

Calculons les quantités suivantes:

$$\begin{cases} \beta_k = \gamma(s+1) + J(\omega) - c'_k \chi(t_*) - \alpha_k - \sum_{t \in \widetilde{T}_{ap}} \sum_{i \in \widetilde{I}_{ap}(t)} c^k_i(t)\gamma_i(t), k \in \widetilde{K}_H = K \setminus \widetilde{K}_{af}, \\ \gamma^*(\widetilde{I}_H) = \sum_{t \in \widetilde{T}_{ap}} \sum_{i \in \widetilde{I}_{ap}(t)} \varphi_i(t) + H(\widetilde{I}_H, J)\chi(t_*) - g^*(\widetilde{I}_H), \\ \gamma_*(\widetilde{I}_H) = \sum_{t \in \widetilde{T}_{ap}} \sum_{i \in \widetilde{I}_{ap}(t)} \varphi_i(t) + H(\widetilde{I}_H, J)\chi(t_*) - g_*(\widetilde{I}_H). \end{cases}$$

Deux cas peuvent se présenter :

1er cas :

Si les relations suivantes:

$$\left\|\gamma(\widetilde{T}_{ap})\right\| \leq \mu, \beta_k \leq 0, k \in \widetilde{K}_H; \gamma_*(\widetilde{I}_H); \gamma^*(\widetilde{I}_H) \leq 0, \qquad (30)$$

(μ Paramètre de la méthode)

sont vérifiées alors on passe à la procédure finale avec l'appui $\widetilde{Q}_{ap}$.

2ième cas :

Si non on va changer l'appui $\widetilde{Q}_{ap}$, en utilisant la méthode duale [2] $\left(\widetilde{Q} \to \overline{\overline{Q}}\right)$, et refaire une nouvelle itération avec la commande-appui $\left\{\overline{\overline{u}}, \overline{\overline{Q}}\right\}$.

4.3. Procédure finale

Supposons que pour la quasi-commande $\omega = (\omega(t),\ t \in T)$(28) et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (\chi(t),\ t \in T)$ construite par l'appui $\widetilde{Q}_{ap}$, les conditions (30) sont vérifiées.

Formons les ensembles

$T_i^0 = \left\{t \in T : \widetilde{\Delta}_i(t) = 0\right\},\ i = 1,...,r$, des points isolés

$\tau \in \left\{t \in \widetilde{T}_{ap} : \widetilde{I}_{ap}(t) = i\right\}$

et

$$\dot{\widetilde{\Delta}}_i(\tau) \neq 0,\ i \in \widetilde{I}_{ap}(t),\ t \in \widetilde{T}_{ap},\ \left|\widetilde{T}_{ap}\right| = \left|\widetilde{T}_{ac} \cup \widetilde{T}_{af}\right| = s$$

La procédure finale consiste à déterminer l'appui optimal $\tau_{ap}^0 = (\tau_j,\ j = 1,....,s),\ \tau^0(s+1)$ à partir du vecteur (29) de telle sorte à avoir :

$$\begin{cases} g_* \leq H\chi(t_*) \leq g^*, \\ \omega\left(\widetilde{K}_{af}\right) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Ceci nous ramène au système d'équation suivant:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i \in \widetilde{I}_{ap}(t_j)} \left(d_i^* - d_{*i}\right) sign \dot{\widetilde{\Delta}}_i(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j} \varphi_i(t)dt = g_*^*\left(\widetilde{I}_{ac}\right) - H\left(\widetilde{I}_{ac}, J\right)\chi(t_*) \\ -\sum_{j=1}^{s} \sum_{i \in \widetilde{I}_{ap}(t_j)} \left(d_i^* - d_{*i}\right) sign \dot{\widetilde{\Delta}}_i(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j} c_i^k(t)dt + \tau(s+1) = \alpha_k + c'_k\, \chi(t_*),\ k \in \widetilde{K}_{af}. \end{gathered} \tag{32}$$

On résoud le système (32) par la méthode de NEWTON, en utilisant les approximations initiales:

$\tau_{ap}^{(0)} = \left\{\tau_j^0,\ j = 1,....,s\right\},\ \tau_{(s+1)}^{(0)}$, avec

$\tau_{ap}^{(0)} = \left\{t_j,\ j = 1,....,s\right\},\ \tau_{(s+1)}^{(0)} = \gamma(s+1)$.

Supposons connue la $k^{ième}$ approximation $\tau_{ap}^{(k)} = \tau_{ac}^{(k)}\tau_{af}^{(k)} = \left\{\tau_j^{(k)},\ j = 1,....,s\right\}$, $\tau_{(s+1)}^{(k)}$, alors la $(k+1)^{ième}$ approximation $\tau_{ap}^{(k+1)}$ et $\tau_{(s+1)}^{(k+1)}$ sera:

$$\begin{cases} \tau_{ap}^{(k+1)} = \tau_{ap}^{(k)} + \left\{\dfrac{1}{d_i^* - d_{*i}} sign \dot{\widetilde{\Delta}}_i(t_j) \gamma_i\left(\tau_j^{(k)}\right),\ i \in \widetilde{I}_{ap}\left(\tau_j^{(ap)}\right),\ j = 1,...,s\right\} \\ \tau_{(s+1)}^{(k+1)} = \tau_{(s+1)}^{(k)} + \gamma(s+1), \end{cases} \tag{33}$$

où $\left(\gamma_i\left(\tau_j^{(k)}\right),\ i \in \widetilde{I}_{ap}\left(\tau_j^{(k)}\right),\ j = 1,....,s;\ \gamma_{(s+1)}^{(k)}\right)$ est le vecteur (29) calculée par l'appui $Q_{ap}^{(k)} = \left\{\tau_{ap}^{(k)},\ \widetilde{I}_{ap}\left(\tau^{(k)}\right),\ \tau^{(k)} \in \tau_{ap}^{(k)};\ \widetilde{K}_{af}\right\}$.

Soient τ_{ap}^0, $\tau_{(s+1)}^0$ la solution du système (32), alors la fonction $\omega^0(t),\ t \in T$ (28) calculé par l'appui $Q_{ap}^0 = \left\{\tau_{ap}^0,\ I_{ap}^0(\tau^0),\ \tau^0 \in \tau_{ap}^0;\ \widetilde{K}_{af}\right\}$ est une commande optimale pour le problème (1)-(3) et Q_{ap}^0 est l'appui optimal.

CONCLUSION

Dans cet article un algorithme de résolution d'un problème actuel de contrôle optimal a été réalisé. Le problème de départ a été transformé en un problème de la seule variable $u(t),\ t \in T$. La difficulté du problème est que la fonctionnelle est non différentiable, c'est pour quoi on ne peut pas utiliser les techniques de programmation mathématique. Notre algorithme basé sur les techniques de la méthode du simplexe, se termine par une procédure finale qui fait appel à la méthode de Newton qui converge rapidement.

REFERENCES

[1] M. AIDENE. Algorithme de résolution d'un problème min-max en control optimal. Exposés de l'Académie des Sciences de Bélarus, T.30, 1, (1986), Pages 24-27.

[2] R.Gabasov. Adaptive method of linear programming. Preprint of theUniversity of Karlsruhe.Institue of Statistics and Mathematics. Karsruhe, Germany(1993).

[3] M. AIDENE, I.L. Vorob'ev, and B.Oukacha. Algorithm for the solving a linear optimal control problem with minimax performance index. Computational Mathematics and Mathematical physics. Vol 45, No 10, 2005, PP 1691-1700.

[4] E.A. Kostina-O.I. Kostuokova. Algorithme de résolution d'un problème convexe de programmation quadratique avec des contraintes linéaires et non linéaires. Revue de Mathématique, T.42, N 7, Minsk, (2001), P.1012-1026.

[5] L.S. Pontriaguin. Mathematical Theory of optimal processus, Interscience. New York, (1962).

[6] R. B. Vinter and F. M. F. L. Pereira. A max-min principe for optimal processes with discontiuous trajectories. SIAM J. Control and Optimization. Vol 26, No 1, 1988.