

SIMULATION TRIDIMENSIONNELLE DE LA CONVECTION NATURELLE À DOUBLE DIFFUSION DANS LE CAS OPPOSANT

Reçu le 07/03/2006 – Accepté le 23/05/2007

Résumé

On considère une étude numérique tridimensionnelle de la convection naturelle bidiffusive dans une enceinte rectangulaire soumise à des gradients de température et de concentration horizontaux. L'écoulement est entraîné par les forces des poussées thermique et solutale. Les résultats obtenus montrent le caractère tri directionnel de l'écoulement près des parois isothermes et le caractère tridimensionnel de l'écoulement près des parois verticales adiabatiques. La variation du nombre de Grashof solutal a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulements et plusieurs bifurcations entre ces écoulements. La convection transitoire et apériodique se manifeste dans un intervalle de Grashof solutal entre 3×10^5 et 5×10^5 .

Mots clés: Convection naturelle tridimensionnelle. Double diffusion. Poussées thermique et solutale. Bifurcations. Régime transitoire

Abstract

We consider a three dimensional numerical study of the double diffusive natural convection in a rectangular enclosure subjected to horizontal temperature and concentration gradients. The flow is driven by the thermal and solutal buoyancies. The obtained results show the three directional flow character near the isothermal walls and the three dimensional flow character near the vertical adiabatic walls. The variation of the solutal Grashof number allowed obtaining many types of flows and several bifurcations between these flows. The transitory and aperiodic convection occurs in an interval of the solutal Grashof between 3×10^5 and 5×10^5 .

Keywords: Three-dimensional natural convection. Double diffusive. Thermal and solutal buoyancies. Bifurcations. Transitory mode.

S. BENISSAAD*
M. AFRID**
Z. NEMOUCHI *

* Laboratoire d'Energétique Appliqué et de Pollution.

Département de Génie Mécanique.

** Laboratoire de Physique Energétique. Département de Physique,

Université Mentouri Constantine Algérie

ملخص

5×10^5 3×10^5

الكلمات المفتاحية :

La convection naturelle produite par des forces de volume dues simultanément à des gradients de température et de concentration est généralement désignée comme étant la convection thermosolutale ou à double diffusion. Souvent, des structures d'écoulements complexes résultent de la différence entre les diffusivités thermique et solutale et les poussées thermique et solutale. L'étude de ces mouvements générés par la présence simultanée d'un gradient de température et d'un gradient de concentration dans un mélange de deux fluides a suscité un grand nombre de travaux (Lee et al. [1], Shyy et Chen [2]). Le développement récent de ces études est lié à l'importance qu'a pris ce problème dans diverses applications. La convection thermosolutale se rencontre dans une grande variété de domaines telles que la géologie, la métallurgie et l'océanographie (Schmidt [3]). Les applications liées à l'existence de gradients de masse volumique dans un fluide soumis à un champ de gravité apparaissent par exemple dans le domaine de la croissance cristalline (Wilcox [4]), ainsi que dans beaucoup de phénomènes naturels (fusion des icebergs et des banquises) ou de processus industriels (élaboration d'alliage et de fonderie). Dans les années récentes, les études de la solidification dans les systèmes binaires ont été simulées par la croissance cristalline et la fonderie des alliages métalliques. Quand un alliage se solidifie, il y a rejet de l'un des composants dans la phase fondue, la différence de densité entre les deux composants avec le gradient de la température crée la convection à double diffusion. Puisque la qualité et la structure du solide résultant sont influencés par le processus de transport dans la phase liquide durant la croissance du cristal, une bonne compréhension de la convection thermosolutale pendant la phase de solidification a une importance primordiale. Ainsi, et dans le but de bien comprendre ce phénomène, de nombreux travaux expérimentaux et numériques ont été développés. Divers cas avec différents nombres de Grashof thermique, de Grashof solutal, de Prandtl et de Schmidt ainsi que le rapport d'aspect géométrique ont été traités avec des effets thermiques et solutaux coopérant ou opposant.

Les études sur la convection à double diffusion peuvent être classées généralement sous deux types de configurations. Dans le premier type, le fluide est soumis à un gradient de concentration vertical, alors que le gradient de température est appliqué horizontalement. Dans le second type, les gradients de température et de concentration sont imposés horizontalement. Généralement, dans cette configuration deux situations sont considérées, dépendant des forces de volume dues aux gradients de température et de concentration, qui peuvent être en coopération ou en opposition. Plusieurs études expérimentales ont été réalisées dans ce domaine (Kamotani et al. [5], Wang et Chen [6], Han et Kuehn [7], Jiang et al. [8]) qui employaient des solutions aqueuses (de chlorure de sodium NaCl, de carbonate de sodium Na₂CO₃ ou de sulfate de cuivre CuSO₄) correspondant à un nombre de Lewis élevé ($Le=200$) et un nombre de Prandtl égal à 7. Kamotani et al. [5] ont étudié expérimentalement la convection à double diffusion dans

une enceinte rectangulaire, ayant un rapport d'aspect ($A=H/L$) variant entre 0,13 et 0,55, dans le cas où les forces de volume sont coopérantes ou opposantes. Ils ont employé une technique électrochimique pour imposer les concentrations sur les parois verticales. Les résultats obtenus dans cette étude, signalent l'existence de régimes multicellulaires obtenus à contre-courant pour $N>10$ et à co-courant pour $N>6$. Lee et al. [1] ont étudié expérimentalement la stabilité de la convection à double diffusion avec des gradients de température et de concentration horizontaux, dans des enceintes rectangulaires de rapport d'aspect ($A=H/L$) variant de 0,2 à 2. Les résultats obtenus montrent un écoulement unicellulaire pour un rapport des forces de volume élevé ou faible, alors que le régime d'écoulement multicellulaire apparaît pour les valeurs intermédiaires de ce rapport : $8<N<55$ dans le cas coopérant et $5<N<13$ dans le cas opposant. Les études expérimentales avec des nombres de Lewis faibles ou modérés ($Le=1$ à 10) représentant la convection à double diffusion pour les gaz binaires sont peu nombreuses (Weaver et Viskanta [9]). Les structures d'écoulement résultant des conditions de coopération et d'opposition des forces de volumes ont été simulées numériquement par Shyy et Chen [2] et Han et Kuhen [10], où des structures d'écoulement multicellulaires ont été déterminées. Pour les mêmes conditions Beghein et al. [11] ont obtenu des corrélations entre les flux de transfert de masse et de chaleur et des nombres adimensionnels caractérisant l'écoulement en utilisant une simulation numérique de la convection thermosolutale des polluants dans l'air ayant un nombre de Prandtl de 0,7. Il a été trouvé pour le cas opposant quand le nombre de Lewis est inférieur à l'unité, que la cavité est remplie de polluant. D'autre part quand le nombre de Lewis est beaucoup plus grand que l'unité, le polluant est répandu en une couche limite très mince ; tandis que le coeur de la cavité est rempli de fluide homogène.

Lorsque les forces de volume sont opposantes, les expériences indiquent des comportements d'écoulement instables pour un certain ordre de grandeur des paramètres d'écoulements (Jiang et al. [8], Lee et Hyun [12]). Le cas spécial où les rapports des forces de volume ont la même grandeur a été étudié par Gobin et Bennacer [13], Ghorayeb et Mojtabi [14] et Xin et al. [15]. En utilisant l'analyse de la stabilité linéaire, le nombre de Rayleigh (Ra) critique, dans des cavités verticales à deux dimensions, a été trouvé dépendant seulement de $Ra.(Le-1)$. Le caractère instationnaire des structures d'écoulement a été étudié par Bergeon et al. [16] où les mécanismes, par lesquelles les solutions stables perdent leur stabilité ou les solutions instables deviennent stables, ont été déterminés. Pour différents rapports de forces de volume opposantes, une simulation numérique de la convection thermosolutale dans un mélange liquide de Pb-Sn ayant un très petit nombre de Prandtl ($Pr=0,02$) et un très grand nombre de Lewis ($Le=7500$), réalisée par Bergman et Hyun [17], a permis de prévoir le comportement oscillatoire à un nombre de Rayleigh et des rapports de forces de volume relativement élevés. Les prédictions illustrent deux régions de la convection dans lesquelles les

grandes forces de volume solutales mènent à enrichir le flux massique. Cependant, quand les forces de volume thermique et solutale sont équilibrées le flux massique est considérablement réduit. Par ailleurs les flux de chaleur sont modérément affectés par la convection due à un faible nombre de Prandtl de la solution liquide.

L'étude numérique en régime instationnaire de Zhou et Zebib [18], sur la convection thermosolutale dans le cas de la croissance cristalline en cavité carrée, où les forces de volume sont opposantes et égales, montre l'apparition de solutions oscillatoires, à faible nombre de Lewis ($Le=5$), et à partir d'un nombre de Grashof thermique critique $Gr_{t.c.}=7,5 \times 10^4$. L'effet du rapport des forces de volume sur la bifurcation des structures a été examiné numériquement pour un gaz binaire dans une enceinte rectangulaire par Nishimura et al. [19], la solution montre que la convection est oscillatoire pour le cas opposant dans la limite d'un intervalle du rapport des forces de volume autour de $N=1$, pour des valeurs particulières des nombres de Rayleigh et de Lewis. Ghorayeb et al. [20] ont étudié, dans le cas particulier où les forces thermique et solutale sont opposantes et leur rapport est égal à l'unité, l'influence du nombre de Lewis sur la naissance des régimes convectifs et la structure de l'écoulement dans une enceinte carrée. Les résultats obtenus à partir de l'analyse de la stabilité linéaire ont mis en évidence, en plus du régime supercritique, une grande variété de solutions sous-critiques dont le nombre est fonction du rapport de forme de la cavité. Par ailleurs, dans leur étude analytique et numérique sur la stabilité linéaire de l'écoulement dans une cavité rectangulaire, dans le cas où les forces de volume solutale et thermique sont opposantes et égales, Ghorayeb et Mojtabi [14], ont montré que l'équilibre de la solution reste stable tant que

le paramètre $Rat.c. \left| Le-1 \right|$, serait inférieur à une certaine valeur critique égale 17174, où $Rat.c.$ est le nombre de Rayleigh thermique critique. Leur étude numérique indique l'existence d'une variété de régimes supercritiques dont le nombre dépend principalement du rapport d'aspect de l'enceinte. Dans une autre étude, Ghorayeb et al. [21] ont fait des simulations numériques de l'instabilité de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité carrée avec des forces de volume égales et de sens opposés pour un intervalle de nombre de Lewis compris entre 2 et 45. Dans cette situation l'état stable de la structure de l'écoulement est symétrique par rapport au centre et il reste stable jusqu'à la hauteur d'un seuil de la valeur du nombre de Grashof thermique au-delà duquel les écoulements oscillatoires apparaissent. Cependant l'état oscillatoire est soit symétrique par rapport au centre ou asymétrique dépendant de la valeur du nombre de Lewis.

Benissaad et Afrid [22] ont étudié numériquement, la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte rectangulaire avec un rapport d'aspect égal à 4. Ils ont considéré le cas d'une solution aqueuse ayant les paramètres suivants ; $Pr=7$, $Sc=240$, $Gr_t=2,2 \times 10^5$ et Gr_s variant de 104 à 107. Les poussées, thermique et solutale, sont coopérantes ou opposantes. Les résultats obtenus ont

permis d'observer une variété de régimes d'écoulement. Quand les forces de volume sont opposantes, l'écoulement est permanent et monocellulaire pour des valeurs de Gr_s entre 104 et $2,2 \times 10^5$. A partir de Gr_s égal à $2,2 \times 10^5$ et jusqu'à 7×10^5 , l'écoulement devient transitoire. Lorsque Gr_s est supérieur ou égal à 8×10^5 et inférieur à $2,2 \times 10^6$, l'écoulement bifurque vers un régime permanent et multicellulaire. Pour des valeurs de Gr_s supérieures ou égale $2,2 \times 10^6$, l'écoulement redevient permanent et monocellulaire.

Dans ces travaux, les auteurs ont supposé que l'écoulement est bidimensionnel avec des vitesses d'écoulement négligeables dans les plans transversaux. Néanmoins, dans les sections suivantes de ce travail, il sera montré qu'il y a une certaine différence entre les prédictions des modèles bidimensionnels et tridimensionnels, et que la solution tridimensionnelle est plus précise dans les systèmes thermosolutals, particulièrement dans le cas opposant où les effets tridimensionnels sont plus apparents.

Cependant, Sezai et Mohamad [23] ont montré, dans le cas d'une enceinte cubique, que la structure de l'écoulement de la convection naturelle thermosolutale, dans le cas opposant pour des valeurs de $N \geq 1$, est strictement tridimensionnelle pour certaines valeurs des paramètres employés tels que le rapport des forces de volume, le nombre de Rayleigh thermique et le nombre de Lewis. Ils ont observé une variété de bifurcations et la formation de configurations d'écoulements complexes.

Ce travail est consacré à la simulation de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité parallélépipédique de rapport de forme $A=4$, pour des gradients thermique et solutal opposant. Notre but est d'étudier le développement des structures d'écoulement tridimensionnelles et d'examiner l'effet de la variation du nombre de Grashof solutal sur ces structures et sur les transferts de chaleur et de masse. Un autre but est la comparaison des résultats bi et tridimensionnels. Les résultats numériques de cette étude sont limités à une solution chimique aqueuse de sulfate de cuivre ayant pour paramètres : $Pr=7$, $Sc=240$, le nombre de Gr_t est fixé à $2,2 \times 10^5$, tandis que la valeur du nombre de Gr_s varie de 104 à 107.

GÉOMÉTRIE ET MODÈLE MATHÉMATIQUE

On considère une enceinte rectangulaire de longueur L , de hauteur H , de largeur l et de rapport d'aspect $A=L/H$. les dimensions de l'enceinte sont $4 \times 1 \times 1$. Elle est remplie d'un électrolyte et soumise à des gradients de température et de concentration horizontaux, c'est-à-dire que les parois verticales de l'enceinte, gauche et droite, sont maintenues à des températures constantes et uniformes mais différentes. L'une de ces parois est connectée à une anode et l'autre est connectée à une cathode (voir figure 1).

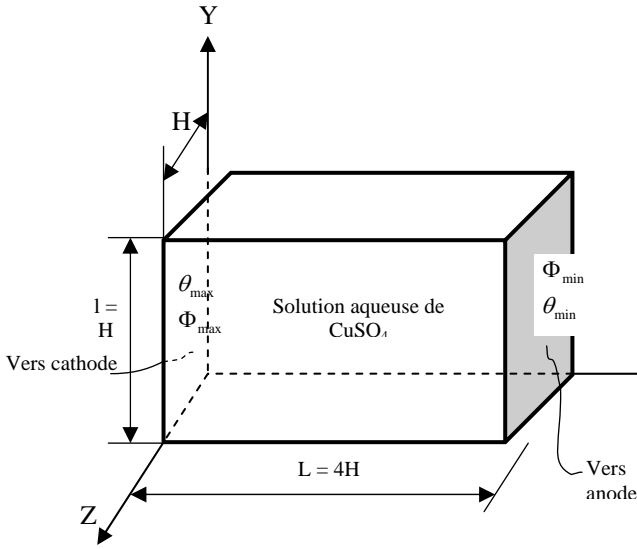


Figure 1. Géométrie du problème considéré.

Les autres parois sont imperméables, adiabatiques et non-conductrices d'électricité. Cette connexion électrique permet le maintien des parois isothermes à deux concentrations constantes et donc l'obtention d'un gradient de concentration horizontal qui avec le gradient de température horizontal entraîne la convection naturelle à double diffusion. On suppose que le fluide constitué de cette solution aqueuse est incompressible et newtonien. Toutes les propriétés physiques, à l'exception de la masse volumique, sont considérées constantes. On adopte l'approximation de Boussinesq, ce qui revient à considérer la masse volumique constante, égale à sa valeur de référence, dans tous les termes des équations de transfert sauf celui de la force de gravité. Dans ce dernier, la masse volumique est fonction de la température et de la concentration :

$$\rho(T, C) = \rho_0 [1 - \beta_t (T - T_0) + \beta_s (C - C_0)]$$

$\rho_0 = \rho(T_{\min}, C_{\min})$, étant la masse volumique de référence.

$$\beta_t = \left((-1/\rho_0) \left(\partial \rho / \partial T \Big|_C \right) \right); \beta_t > 0,$$

$$\text{et } \beta_s = \left((1/\rho_0) \left(\partial \rho / \partial C \Big|_T \right) \right); \beta_s > 0.$$

Les écoulements de la convection naturelle thermosolutale susceptibles de se développer dans cette enceinte sont régis par les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement, de conservation d'énergie et de transfert des espèces. En l'absence de génération interne de chaleur et de réaction chimique et en négligeant les dissipations visqueuses, le système d'équations différentielles aux dérivées partielles décrivant le problème s'écrit sous la forme vectorielle adimensionnelle suivante :

$$\text{à } t = 0; U = V = W = \theta = \Phi = 0$$

Pour $t > 0$;

Equation de continuité

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0$$

(1)

Equations de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \nabla^2 \vec{U} + (Gr_t \theta - Gr_s \Phi) k \quad (2)$$

où k est un vecteur unitaire suivant la direction Y .

Equation d'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \quad (3)$$

Equation de transfert des espèces

$$X \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{Sc} \nabla^2 \Phi \quad (4)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$U = V = W = 0 \quad (X=0, X=4, \forall Y \text{ et } \forall Z);$$

$$Y=0, Y=1, \forall X \text{ et } \forall Z; Z=0, Z=1, \quad (5)$$

$$\forall X \text{ et } \forall Y)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0$$

$$(Y=0, Y=1, \forall X \text{ et } \forall Z) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0$$

$$(Z=0, Z=1, \forall X \text{ et } \forall Y) \quad (7)$$

$$\theta = \Phi = 1 \quad (X=0, \forall Y \text{ et } \forall Z) \quad (8)$$

$$\theta = \Phi = 0 \quad (X=4, \forall Y \text{ et } \forall Z) \quad (9)$$

Pour mettre le système d'équations précédent sous cette forme adimensionnelle, nous avons normalisé les coordonnées par H , les vitesses par (ν/H) , le temps par (H^2/ν) , la pression relative $(P-P_0)$ par $(\rho_0 \nu^2/H^2)$, la température relative $(T-T_{\min})$ par ΔT et la concentration relative $(C-C_{\min})$ par ΔC .

Les transferts thermique et massique aux parois à $X=0$ et $X=4$ sont caractérisés par les nombres adimensionnels moyens de Nusselt \overline{Nu} et de Sherwood \overline{Sh} définis par :

$$\overline{Nu} \Big|_{X=0 \text{ ou } 4} = \int_0^1 \int_0^1 - \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0 \text{ ou } 4} dY dZ \quad (10)$$

$$\overline{Sh} \Big|_{X=0 \text{ ou } 4} = \int_0^1 \int_0^1 - \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{X=0 \text{ ou } 4} dY dZ \quad (11)$$

MÉTHODE NUMÉRIQUE

La méthode numérique des volumes finis est employée pour discrétiser le domaine physique et les différentes équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnelles du modèle mathématique. Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes finis. Dans chaque volume, on considère un point situé en son centre. Les quantités scalaires température, concentration, et pression sont stockées aux centres des volumes finis, par contre, les composantes suivant X , Y et

Z de la vitesse sont stockées aux faces des volumes finis. Un maillage non uniforme, plus raffiné près des parois, est utilisé dans la direction horizontale, car les forts gradients de température et de concentration se situent près des parois verticales à X=0 et X=4. Suivant les directions verticale et transversale, le maillage est uniforme. On a considéré une discrétisation des équations différentielles en utilisant le schéma numérique hybride et une discrétisation temporelle d'ordre un. L'équation de discrétisation de chaque variable dépendante représente un système d'équations linéarisées pour les vitesses ou linéaire pour la pression, la température et la concentration. Ces systèmes d'équations sont résolus par la méthode de triple balayage suivant X, Y et Z impliquant l'utilisation de l'algorithme de Thomas. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour la résolution séquentielle des systèmes des équations de discrétisation des variables dépendantes [24]. Le régime permanent et les équilibres thermique et solutale sont considérés atteints lorsque les bilans d'énergie et de matière sont satisfaits et la variation des champs des vitesses, de la température et de la concentration entre deux incréments consécutifs du temps est nulle ou négligeable, c'est-à-dire :

$$\text{Max.} \left(\left| \frac{f_{i,j,k}^{t+\Delta t} - f_{i,j,k}^t}{f_{i,j,k}^{t+\Delta t}} \right| \right) \leq 10^{-6} \tag{12}$$

Où f est une variable dépendante. Les indices i, j et k indiquent un point du maillage. L'exposant t + Δt fait référence au temps plus l'incrément du temps. Dans tous les cas en régime permanent, on a utilisé Δt=10-4, et pour les cas transitoires, on a utilisé Δt=10-4, Δt=5×10-5, Δt=2,5×10-5 et Δt=10-5.

VALIDATION DU CODE NUMÉRIQUE

Dans le cas bidimensionnel, notre de calcul a été validé par comparaison au résultat expérimental de Kamotani et al. [5] et l'étude numérique de Han et Kuehn [10]. Dans le cas tridimensionnel, notre code numérique a été testé et validé par comparaison avec les résultats numériques de Sezai et Mohamad [23] qui ont étudié la convection naturelle bidiffusive avec des poussées thermique et solutale opposées dans une enceinte cubique. Les paramètres employés dans ce cas sont : un maillage non uniforme de 80x80x80, un nombre de Rayleigh thermique Rat=1×107, Le=1, Pr=0,71 et différents rapports des poussées thermique et solutale. Nous avons trouvé des écoulements et des champs thermique et de concentration similaires à ceux de Sezai et Mohamad [23]. Dans le tableau 1,

Tableau 1. Comparaison des valeurs de \overline{Nu} . Ra_t=1×10⁷, Pr=0,71 et Le=1. Maillage : 80x80x80.

N	\overline{Nu} (notre étude)	\overline{Nu} [23]
0,01	16,20	16,27
0,1	15,82	15,87
0,2	15,31	15,37
0,5	13,48	13,53
0,8	10,45	10,51
0,9	8,58	8,64
1,5	13,49	13,54
5,0	23,48	23,55

on représente les nombres de Nusselt de nos simulations numérique et ceux de la référence [23]. On constate que la différence relative maximale des valeurs de \overline{Nu} des deux études est plus petite que 0,5%.

TEST ET CHOIX DU MAILLAGE

Pour le choix du maillage de notre étude, nous avons considéré la simulation numérique d'un cas particulier quand les poussées thermique et solutale sont coopérantes : Gr_t=8,8×105, Gr_s=5×106, Pr=7, Sc=240, avec trois maillages arbitrairement choisis : 62x22x22, 98x28x28 et 124x44x44. Avec le premier maillage on obtient une convection unicellulaire, alors qu'avec les deux derniers maillages on obtient une convection multicellulaire (voir figure 2).

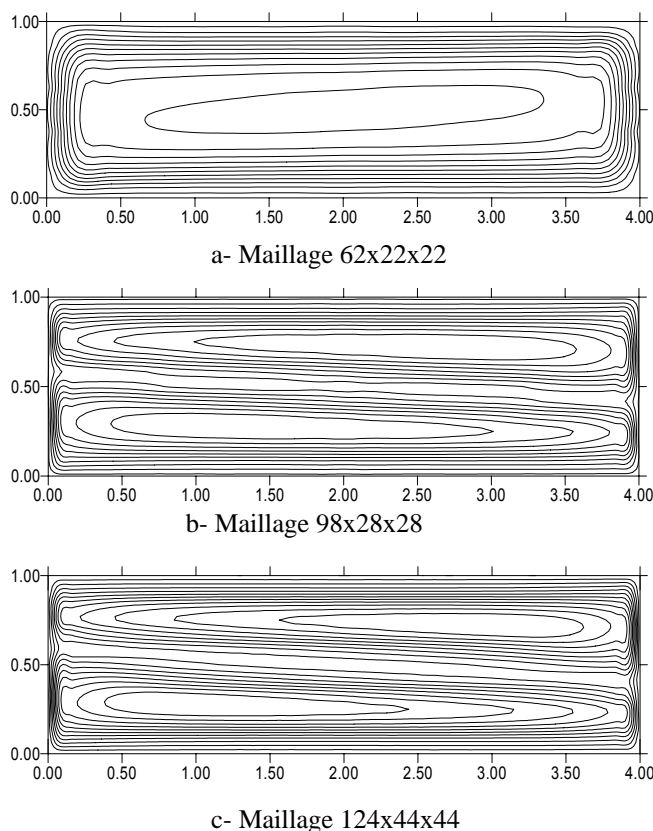


Figure 2. Effet du maillage sur la structure de l'écoulement : Ψ dans le plan X-Y à Z=0,5 ; cas coopérant : Gr_t=8,8×10⁵, Gr_s=5×10⁶, Pr=7, Sc=240.

En fait, les taux des transferts thermique et massique des deux derniers maillages sont très proches et différents de ceux du premier maillage (voir tableau 2).

Tableau 2. Effet du maillage sur \overline{Nu} et \overline{Sh} . Cas coopérants. $Gr_t=8,8 \times 10^5$, $Gr_s=5 \times 10^6$, $Pr=7$, $Sc=240$.

Caractéristiques	Maillage 62x22x22	Maillage 98x28x28	Maillage 124x44x44
$\overline{Nu} _{X=0}$	16,63	11,64	11,60
$\overline{Nu} _{X=4}$	16,63	11,64	11,60
$\overline{Sh} _{X=0}$	32,78	69,89	68,17
$\overline{Sh} _{X=4}$	32,78	69,89	68,17

Ces résultats montrent que le maillage 98x28x28 est suffisant pour assurer une bonne résolution spatiale du problème étudié ; et donc tous les cas présentés dans cette étude sont obtenus avec ce maillage.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Structure de l'écoulement

La température et la concentration de la paroi verticale gauche sont supérieures à celles de la paroi verticale droite. Ces gradients de température et de concentration créent une poussée thermique et une poussée solutale agissant dans des sens opposés et entraînant un mouvement fluide rotatif dans les plans X-Y. On distingue plusieurs régimes d'écoulements dépendant de la valeur de Gr_s . Pour les deux cas de $Gr_s=104$ et $Gr_s=105$, on a un écoulement de convection naturelle dominée par une poussée thermique. L'écoulement se présente sous la forme d'une seule cellule circulant dans le plan X-Y, dans le sens horaire. La circulation monocellulaire (voir figure 3)

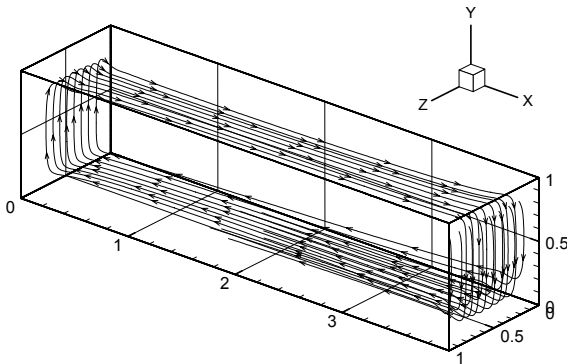


Figure 3. Circulation tridimensionnelle de huit particules équidistantes, placées sur la droite joignant les points $(3,9, 0,82, 0)$ et $(3,9, 0,82, 1)$. $Gr_t=2,2 \times 10^5$, $Gr_s=10^4$, $Pr=7$, $Sh=240$.

dans l'espace de l'enceinte est visualisée par les trajectoires de huit particules, initialement positionnées sur la droite limitée par les points $(3,9, 0,82, 0)$ et $(3,9, 0,82, 1)$. On voit clairement, la circulation unicellulaire du fluide dans le sens horaire.

Les écoulements dans le plan $Z=0,5$ des cas de $Gr_s=104$ et $Gr_s=105$ sont illustrés dans les figures 4a et 4b,

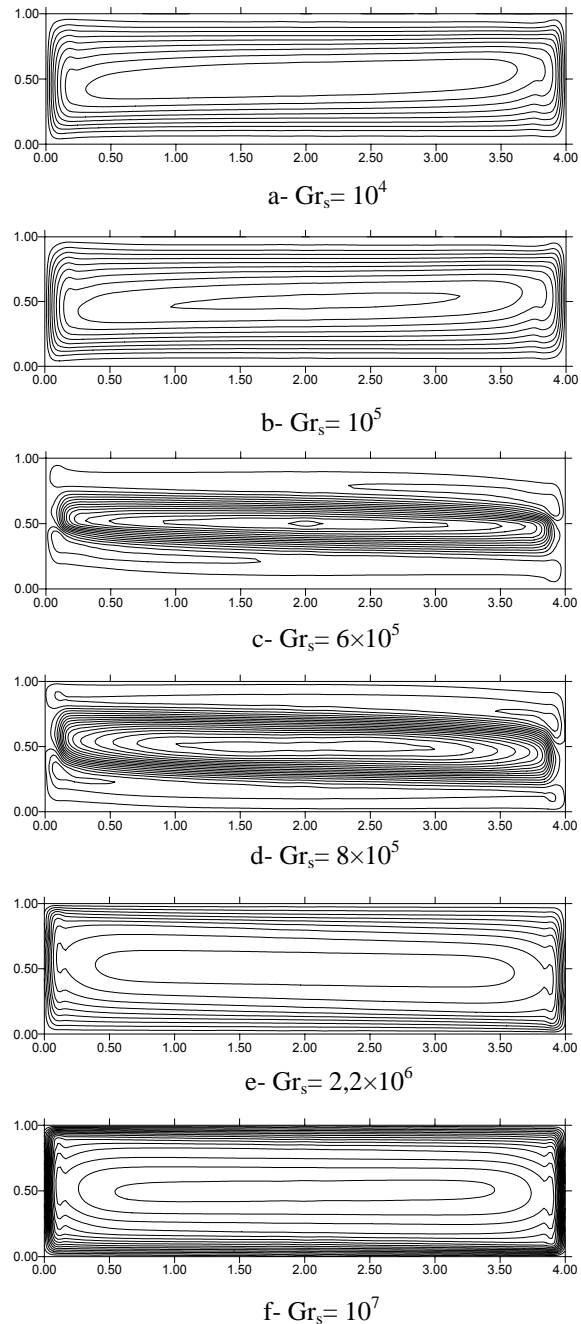


Figure 4. Structure de l'écoulement : Ψ pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal dans le plan X-Y à $Z=0,5$; $Gr_t=2,2 \times 10^5$, $Pr=7$, $Sh=240$.

où le régime monocellulaire est maintenu. La convection est dominée par la poussée thermique. Entre $Gr_s=3 \times 10^5$ et $Gr_s=5 \times 10^5$, l'écoulement bifurque vers un régime transitoire dépendant du temps. L'apparition de ces instabilités et du régime oscillatoire est due à la

compétition des poussées, thermique est solutale, comparables et opposantes. Le cas le plus représentatif du régime transitoire est celui de $Gr_s=3,7 \times 10^5$.

La figure 5 montre la variation temporelle de la vitesse horizontale U de six points arbitrairement choisis. Il est clair que l'écoulement est oscillatoire. La réduction du pas du temps de 10^{-4} à 5×10^{-5} puis à $2,5 \times 10^{-5}$ et finalement à 10^{-5} ne réduit pas l'amplitude des oscillations des vitesses et donc ces dernières sont d'origine physique et non numérique.

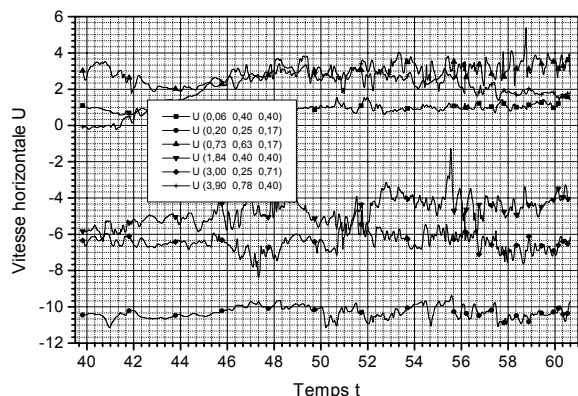


Figure 5. Variation temporelle de la composante horizontale de la vitesse de quelques points arbitrairement choisis ; $Gr_t=2,2 \times 10^5$, $Gr_s=3,7 \times 10^5$, $Pr=7$, $Sh=240$.

Le signal représenté par la figure 5 est la superposition de quatre signaux obtenus avec différents incréments de temps. Les pas de temps employés correspondant aux valeurs suscitées, ont été réalisés sur les périodes suivantes : $39,82 < t < 55,68$, $55,68 < t < 56,15$, $56,15 < t < 59,94$ et $59,94 < t < 60,66$ respectivement. Pour déterminer le caractère apériodique des oscillations on considère l'analyse du signal temporel de la vitesse U à $(x=1,84, y=0,40, z=0,40)$. On a pris M pas du temps ($M=32768$) du signal obtenu avec un pas de $\Delta t = 2,5 \times 10^{-5}$ (sur la période de temps allant de 56,15 à 57,03) et on a déterminé sa transformée de Fourier discrète et complexe. Cette transformée de Fourier est multipliée par un demi fois de son complexe conjugué pour obtenir le spectre d'énergie (E) du signal. Dans la figure 6, on présente le logarithme décimal de l'énergie normalisée par M^2 en fonction des fréquences F ($F = K / (M \Delta t)$, $K=1, 2, 3, \dots, M/2$). Les pics du spectre d'énergie normalisée correspondent aux énergies des fréquences dominantes. Le spectre de la figure 6 illustre, comme prévu, le caractère apériodique et chaotique du signal analysé.

Avec Gr_s égal à 6×10^5 , on obtient, une bifurcation de l'écoulement transitoire à un écoulement permanent multicellulaire. Ce régime d'écoulement est aussi maintenu avec Gr_s égal à 8×10^5 , comme montré dans les figures 4c et 4d présentant l'écoulement à $Z=0,5$.

On distingue trois cellules contra-rotatives. La première en haut de l'enceinte et tourne dans le sens anti-horaire, la deuxième au milieu de l'enceinte circulant dans le sens

horaire et la troisième en bas de l'enceinte tournant dans le sens anti-horaire.

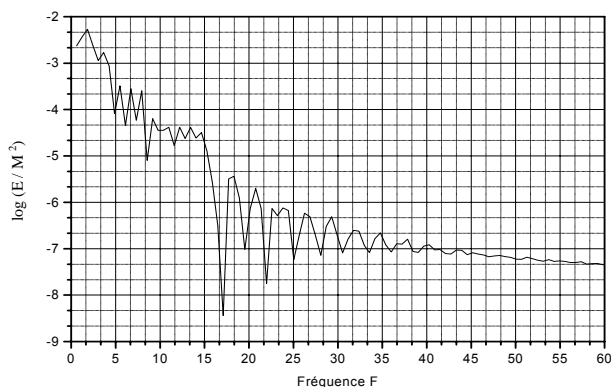


Figure 6. Spectre d'énergie de la vitesse horizontale U au point $(1,84, 0,40, 0,40)$.

Dans les zones de la première et la troisième cellules, la poussée solutale est dominante et la stratification solutale présente permet la rotation dans le sens anti-horaire. Cependant, dans la zone de la deuxième cellule, la concentration est uniforme, et la convection est entraînée par une poussée thermique, localement dominante, et donc la circulation est dans le sens horaire.

Pour les cas de $Gr_s=2,2 \times 10^6$ et 107 , la convection naturelle bifurque vers un écoulement unicellulaire (voir les figures 4e et 4f) mais tournant dans le sens anti-horaire sous l'effet d'une poussée solutale dominante. L'augmentation de Gr_s à $2,2 \times 10^6$ établit la convection naturelle entraînée par une poussée solutale dominante. La figure 4e montre une circulation unicellulaire dans le sens anti-horaire. Pour $Gr_s=107$, la convection solutale s'intensifie dans le sens anti-horaire et l'écoulement est qualitativement similaire à celui du $Gr_s=2,2 \times 10^6$ (voir figure 4f).

Le caractère tri directionnel de l'écoulement se manifeste surtout près des parois verticales isothermes et pour des faibles nombres de Gr_s . Ainsi la vitesse transversale W n'apparaît que près des parois citées et elle est très faible, surtout pour les grands nombres Gr_s , par rapport aux composantes horizontale U et verticale V , comme l'illustrent les figures 7a et 7b.

Cependant le caractère tridimensionnel de l'écoulement est présent dans tous les cas étudiés. Ainsi, on a remarqué dans tous les cas la variation transversale suivant Z tout près des parois verticales adiabatiques et imperméables, à $Z=0$ et $Z=1$, des composantes de la vitesse et donc le champ de vitesse est tridimensionnel. Cependant la variation suivant Z est négligeable loin des plans à $Z=0$ et $Z=1$ (voir figures 7a et 7b).

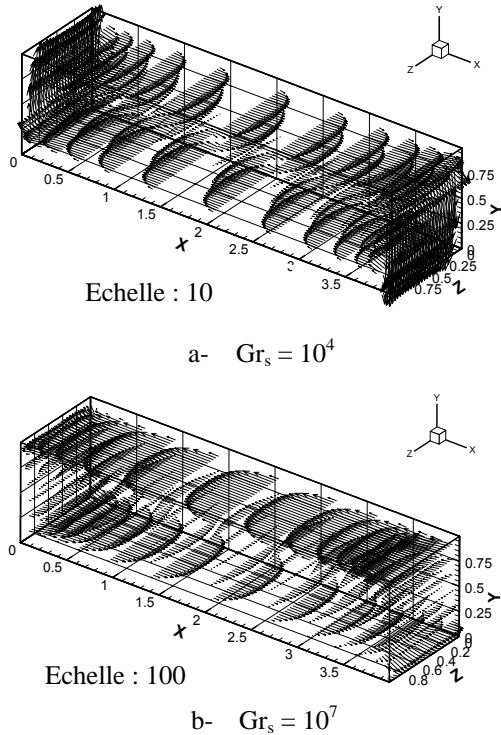


Figure 7. Champs des vitesses. $Gr_t=2.2 \times 10^5$, $Pr=7$, $Sh=240$.

Transfert de chaleur

Les champs thermiques des figures 8a et 8b sont ceux d'une convection naturelle dominée par une poussée thermique. Les surfaces isothermes sont entraînées par l'écoulement vers la droite en haut de l'enceinte et vers la gauche en bas de l'enceinte. Au milieu de l'enceinte, la vitesse de l'écoulement est relativement faible et la conduction de chaleur impose une stratification thermique verticale stable (la température décroît suivant Y) parce que le fluide le plus chaud (moins dense) doit superposer le fluide relativement plus froid (plus dense).

Avec $Gr_s=104$ et 105 on a des nombres de Nusselt $\overline{Nu}=9,22$ et $8,88$, respectivement. Quand $Gr_s=3,7 \times 10^5$, le champ thermique est chaotique et apériodique avec un nombre de Nusselt oscillant entre $2,05$ et $2,75$. Avec $Gr_s=6 \times 10^5$ et $Gr_s=8 \times 10^5$, l'écoulement multicellulaire impose un entraînement alterné des surfaces isothermes suivant la direction de la circulation. Ainsi, près du plafond de l'enceinte les isothermes sont entraînées vers la gauche. Dans la zone de la cellule centrale de l'écoulement, les isothermes sont déviées vers la droite en haut de la cellule et vers la gauche en bas de la cellule. Dans la région de la cellule près de la base de l'enceinte, les surfaces isothermes sont déplacées vers la droite. La circulation contra-rotative des cellules de l'écoulement crée des gradients de température horizontaux très important, dans tout l'espace de l'enceinte, augmentant le transfert conductif et diminuant le transfert convectif entre les parois isothermes. En conséquence, on enregistre une très grande diminution du nombre de Nusselt

$\overline{Nu}=1,5$. Pour $Gr_s=2,2 \times 10^6$, l'écoulement de la poussée solutale dominante dans le sens anti-horaire entraîne les surfaces isothermes vers la gauche en haut de l'enceinte et vers la droite en bas de l'enceinte. On remarque un échange de chaleur important par conduction horizontale entre les parois isothermes et donc un transfert de chaleur convectif très réduit par rapport à celui des cas :

avec $Gr_s=104$ et $Gr_s=105$;
avec $Gr_s=2,2 \times 10^6$, on a $\overline{Nu}=0,98$. L'augmentation de la convection solutale ($Gr_s=107$) augmente légèrement le nombre de Nusselt à $\overline{Nu}=2,11$.

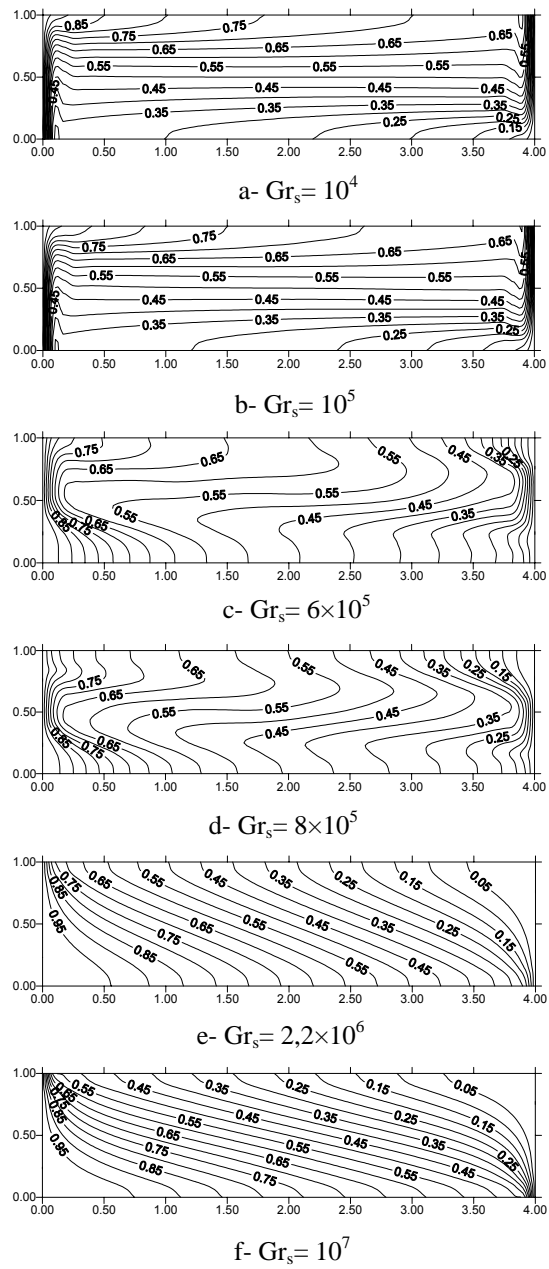


Figure 8. Distribution de la température : θ pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal dans le plan X-Y à $Z=0,5$; $Gr_t=2,2 \times 10^5$, $Pr=7$, $Sh=240$.

Transfert de matière

Avec $Gr_s=104$, la figure 9a montre une distribution de concentration limitée dans une mince couche limite solutale près des parois à concentration constante ($X=0$ et $X=4$) et des parois horizontales ($Y=0$ et $Y=1$). Tout près des parois verticales aux concentrations constantes, on a presque une simple diffusion de concentration. Les surfaces à concentrations constantes sont des plans quasi verticaux. En s'éloignant des deux parois à concentration constante, l'écoulement de la convection entraîne (déforme) les plans à concentration constante et on obtient très près des parois horizontales (à $Y=0$ et $Y=1$) une stratification solutale stable : une croissance de la concentration suivant Y . Le noyau de l'enceinte est maintenu à une concentration constante ($\Phi=0,5$). Avec l'augmentation de Gr_s à 105, la distribution de la concentration est qualitativement la même (voir la figure 9b) mais on remarque un épaississement de la couche limite solutale près des parois. Loin des parois, une grande partie de l'enceinte est toujours maintenue à concentration constante ($\Phi=0,5$). On remarque que l'augmentation de Gr_s de 104 à 105 entraîne une diminution du nombre de Sherwood de $\overline{Sh}=32,65$ à $\overline{Sh}=28,56$. Quand $Gr_s=3,7\times 10^5$, le champ de concentration est oscillatoire et aperiodique avec un nombre de Sherwood oscillant entre 10,48 et 11,78. La diminution du nombre de Sherwood est due aux effets opposés des poussées thermique et solutale. Avec $Gr_s=6\times 10^5$ et $Gr_s=8\times 10^5$, l'écoulement multicellulaire entraîne une répartition importante de la concentration près des parois horizontales. Ainsi, les variations verticales de la concentration sont confinées près du plafond et la base de l'enceinte, dans les zones des cellules tournant dans le sens anti-horaire. Ces variations verticales se manifestent sous formes de stratifications solutales stables : les faibles concentrations superposant les fortes concentrations. Dans la zone de la cellule centrale de l'écoulement, la concentration est sensiblement constante comme le montrent les figures 9c et 9d. Dans le régime multicellulaire, le nombre de Sherwood augmente de $\overline{Sh}=23,10$ pour $Gr_s=6\times 10^5$ à $\overline{Sh}=30,50$ pour $Gr_s=8\times 10^5$. Cette augmentation du nombre de Sherwood est un signe de la croissance de la dominance de la poussée solutale près des parois. Pour les cas de $Gr_s=2,2\times 10^6$ et $Gr_s=10^7$, la convection naturelle contrôlée par la poussée solutale dominante entraîne la répartition de la concentration dans tout l'espace de l'enceinte. Loin des parois à concentration constante, et dans toute l'enceinte, on note la stratification solutale stable : le fluide à faible concentration superposant le fluide le plus dense (voir les figures 9e et 9f). Pour $Gr_s=2,2\times 10^6$ et 107, les nombres de Sherwood sont $\overline{Sh}=50,80$ et 73,27, respectivement. Cette augmentation considérable du nombre de Sherwood est caractéristique

d'une intensification de la convection naturelle dominée par une poussée solutale.

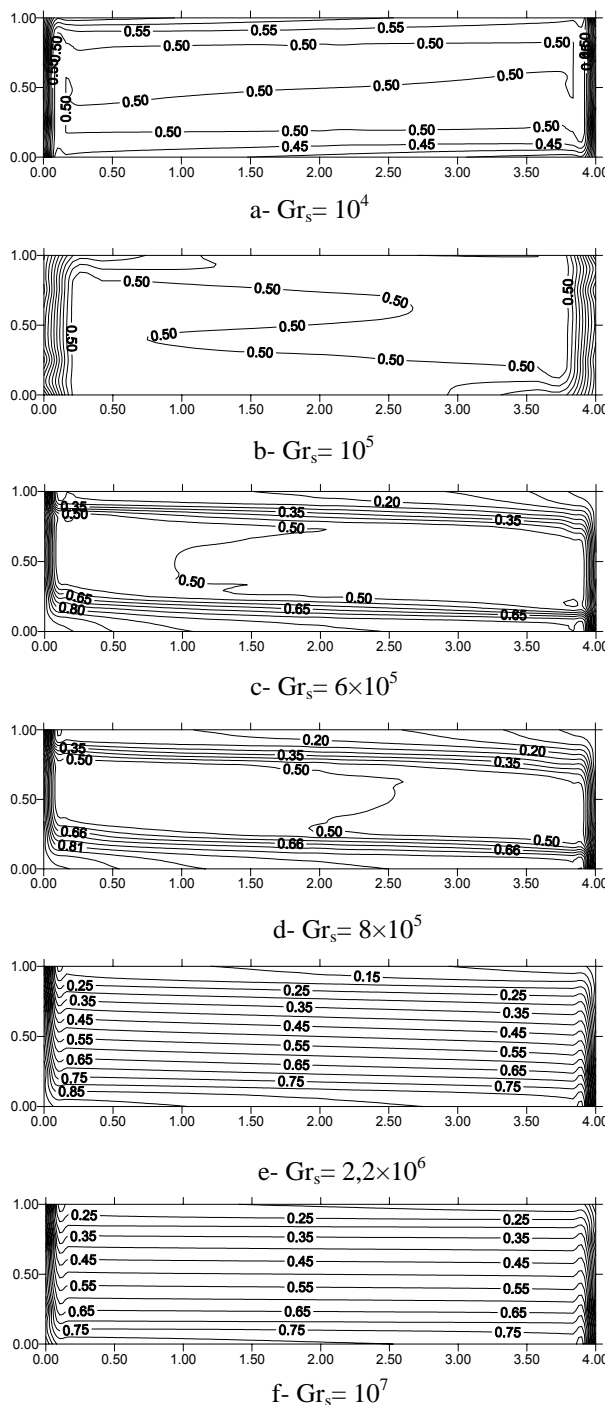


Figure 9. Distribution de la concentration : Φ pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal dans le plan X-Y à $Z=0,5$; $Gr_t=2,2\times 10^5$, $Pr=7$, $Sh=240$.

COMPARAISON DES MODÈLES BIDIMENSIONNEL ET TRIDIMENSIONNEL

La comparaison des résultats obtenus dans cette étude pour une enceinte tridimensionnelle avec ceux d'une enceinte bidimensionnelle [22], a permis de constater ce

qui suit. On a noté certaines différences importantes entre les résultats des simulations bi et tridimensionnelles. Une différence concerne l'apparition et le caractère du régime transitoire. Le régime transitoire dans le modèle bidimensionnel est obtenu pour Grs compris entre $2,2 \times 10^5$ et 7×10^5 et il est oscillatoire et périodique, tandis que dans le modèle tridimensionnel, il est obtenu pour Grs compris entre 3×10^5 et 5×10^5 et il est apériodique (chaotique). Une autre différence concerne le domaine d'apparition du régime multicellulaire. Ce régime a été observé dans le cas bidimensionnel pour des valeurs de Grs supérieures ou égale à 8×10^5 et inférieures à $2,2 \times 10^6$; mais, dans le cas tridimensionnel, il a été obtenu pour Grs variant entre 6×10^5 et 8×10^5 . Le caractère tri directionnel de l'écoulement tridimensionnel ne se manifeste que près des parois isothermes. La vitesse transversale W est très faible par rapport aux autres composantes de vitesse (U et V). Cependant, on note que le caractère tridimensionnel de l'écoulement est important dans le cas du régime multicellulaire. La différence des résultats bi et tridimensionnel est aussi exposée par la comparaison de leurs nombres de Nusselt et de Sherwood présentés dans le tableau 3.

Tableau 3. Comparaison des nombres de Nusselt et de Sherwood des convections bi et tridimensionnelle.

Gr _s	Cas bidimensionnel [22]		Cas tridimensionnel	
	\overline{Nu}	\overline{Sh}	\overline{Nu}	\overline{Sh}
10^4	9,42	34,59	9,22	32,65
10^5	9,24	32,59	8,88	28,56
8×10^5	0,52	32,71	1,50	30,50
$2,2 \times 10^6$	0,97	51,07	0,98	50,80
10^7	2,06	73,50	2,11	73,27

Pour Grs égal à 104 ou 105, les nombres de Nusselt et de Sherwood des cas bidimensionnels sont supérieurs à ceux des cas tridimensionnels. Pour Grs égal à 8×10^5 , le nombre de Nusselt du cas bidimensionnel est inférieur à celui du cas tridimensionnel; alors que le nombre de Sherwood du cas bidimensionnel est supérieur à celui du cas tridimensionnel. Pour Grs supérieur ou égal à $2,2 \times 10^6$, les résultats bi et tridimensionnel sont très proches.

CONCLUSION

Dans le présent travail, on a considéré la simulation numérique tridimensionnelle de la convection naturelle bidiffusive dans une enceinte parallélépipédique. Les conditions aux limites ont été choisies de telle sorte que les poussées thermique et solutale, engendrées par les gradients horizontaux de température et de concentration imposés entre les parois verticales (isothermes et à concentrations constantes) de l'enceinte, soient en opposition. L'écoulement, le transfert thermique et le transfert massique sont modélisés par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de masse, des quantités de mouvement, d'énergie et des espèces; et de leurs conditions initiales et aux limites. Les

équations modélisantes sont résolues par la méthode numérique des volumes finis. Parmi les paramètres de contrôle de la convection naturelle, seul le nombre de Grashof solutal est varié entre 104 et 107; les autres paramètres sont fixes.

La convection naturelle est permanente pour des valeurs du nombre de Grashof solutal entre 104 et $2,2 \times 10^5$ et entre 6×10^5 et 107. Par contre pour des nombres de Grs entre 3×10^5 et 5×10^5 , la convection naturelle est transitoire et apériodique. Entre 104 et $2,2 \times 10^5$, l'écoulement est monocellulaire. Entre Grs= 6×10^5 et 8×10^5 , l'écoulement est multicellulaire. Il redevient monocellulaire pour des valeurs de Grs supérieures ou égale à 9×10^6 . Entre Grs=104 et Grs= $2,2 \times 10^6$, on a obtenu une décroissance monotone du nombre de Nusselt de 9,22 à 0.98. Pour Grs=107, le nombre de Nusselt croît légèrement à 2,11. Concernant le nombre de Sherwood, entre Grs=104 et 105, il diminue de 32,65 à 28,56. En régime transitoire, le nombre de Sherwood oscille entre 10,48 et 11,78. A partir de Grs= 6×10^5 et jusqu'à Grs=107, le nombre de Sherwood croît de 23,1 à 73,37.

La comparaison des résultats des simulations bi et tridimensionnelle a montré la l'existence de certaines différences importantes entre les deux cas.

REFERENCES

- [1] J. Lee, M.T. Hyun, K.W. Kim, Natural convection in confined fluids with combined horizontal temperature and concentration gradients, Int. J. Heat Mass Transfer 31 (10) (1988) 1969-1977.
- [2] W. Shyy, M.Y. Chen, Double-diffusive flow in enclosures, Phys. Fluids A 3 (11) (1991) 2592-2607.
- [3] A.W. Schmidt, Double diffusion in oceanography, Ann. Rev. Fluid Mech. 26 (1994) 255-285.
- [4] W.R. Wilcox, Transport phenomena in crystal growth from solution, Prog. Crystal Growth Charact. 26 (1993) 153-194.
- [5] Y. Kamotani, J.S. Wang, S. Ostrach, H.D. Jiang, Experimental study of natural convection in shallow enclosures with horizontal temperature and concentration gradients, Int. J. Heat Mass Transfer 28 (1), 165-173 (1985)
- [6] L.W. Wang, J.J. Chen, Flow patterns of thermosolutal convection in low aspect ratio enclosures, Experimental Heat Transfer 1(1987) 197-204.
- [7] H. Han, T.H. Kuehn, Double diffusive natural convection in a vertical rectangular enclosure – I. Experimental study, Int. J. Heat Mass Transfer 34 (2) (1991) 449-459.
- [8] H.D. Jiang, S. Ostrach, Y. Kamotani, Unsteady thermosolutal transport phenomena due to opposed buoyancy forces in shallow enclosures, J. Heat Transfer 113 (1991) 135-140.
- [9] J.A. Weaver, R. Viskanta, Natural convection in binary gases due to horizontal thermal and solutal gradients, J. Heat Transfer 113(1991) 141-147.
- [10] H. Han, T.H. Kuehn, Double diffusive natural convection in a vertical rectangular enclosure –II.

Numerical study, Int. J. Heat Mass Transfer 34 (2) (1991) 461-471.

[11] C. Beghein, F. Haghghat, F. Allard, Numerical study of double-diffusive natural convection in a square cavity, Int. J. Heat Mass Transfer 35 (4) (1992) 833-846.

[12] J.W. Lee, J.M. Hyun, Time-dependent double diffusive in a stably stratified fluid under lateral heating, Int. J. Heat Mass Transfer 34 (9) (1991) 2409-2421.

[13] D. Gobin, R. Bennacer, Double diffusive in a vertical fluid layer: Onset of the convective regime, Phys. Fluids 6(1994) 59-67.

[14] K. Ghorayeb, A. Mojtabi, Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity, Phys. Fluids 9(1997) 2339-2348.

[15] S. Xin, P. Le Quéré, L. Tucheran, Bifurcation analysis of double-diffusive convection with opposing horizontal thermal and solutal gradients, Phys. Fluids 10 (1998) 850-858.

[16] A. Bergeon, K. Ghorayeb, A. Mojtabi, Double diffusive instability in an inclined cavity, Phys. Fluids 11(1999) 549-859.

[17] T.L. Bergman, M.T. Hyun, Simulation of two-dimensional thermosolutal convection in liquid metals induced by horizontal temperature and species gradients, Int. J. Heat Mass Transfer 39 (1996) 2883-2894.

[18] H. Zhou, A. Zebib, Oscillatory double diffusive convection in crystal growth, Journal of Crystal Growth 135 (1994) 587-593.

[19] T. Nishimura, M. Wakamatsu, A.M. Morega, Oscillatory double-diffusive convection in a rectangular enclosure with combined horizontal temperature and concentration gradients, Int. J. Heat Mass Transfer 41 (1998) 1601-1611.

[20] K. Ghorayeb, H. Khallouf, A. Mojtabi, Influence du nombre de Lewis sur la structure de l'écoulement de double diffusion convection, Entropie 198 (1996) 97-101.

[21] K. Ghorayeb, H. Khallouf, A. Mojtabi, Onset of oscillatory flows in double-diffusive convection, Int. J. Heat Mass Transfer 42 (1999) 629-643.

[22] S. Benissaad, M. Afrid, Influence du nombre de Grashof sur la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte rectangulaire à faible rapport de forme, Entropie 242 (2002) 44-55.

[23] I. Sezai, A.A. Mohamad, Double diffusive convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradients, Phys. Fluids 12 (2000) 2210-2223.

[24] S.V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, edited by Hemisphere Publishing Corporation, Washington, DC., 1980.

NOMENCLATURE

A rapport d'aspect géométrique = L / H
 C concentration
 D coefficient de diffusivité massique
 E énergie des oscillations
 F fréquence des oscillations
 g accélération de la pesanteur
 H hauteur de l'enceinte
 L longueur de l'enceinte
 l largeur de l'enceinte
 P pression adimensionnelle
 T température
 t temps adimensionnel
 \vec{U} vecteur vitesse
 U, V, W composantes horizontale, verticale et transversale adimensionnelles de la vitesse
 X, Y, Z coordonnées horizontale, verticale et transversale adimensionnelles

Lettres grecs

α coefficient de diffusivité thermique
 β_s coefficient d'expansion solutal
 β_t coefficient d'expansion thermique
 Φ concentration adimensionnelle = $(C - C_{\min}) / (C_{\max} - C_{\min})$
 ν viscosité cinématique
 θ température adimensionnelle = $(T - T_{\min}) / (T_{\max} - T_{\min})$
 ρ masse volumique
 Ψ fonction de courant

Groupes adimensionnels

Gr_t nombre de Grashof thermique = $g \beta_t \Delta T H^3 / \nu^2$;
 avec : $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$
 Gr_s nombre de Grashof solutal = $g \beta_s \Delta C H^3 / \nu^2$;
 avec : $\Delta C = C_{\max} - C_{\min}$
 Le nombre de Lewis = α / D
 N rapport des forces de volume solutale et thermique = $\beta_s \Delta C / \beta_t \Delta T$
 Pr nombre de Prandtl = ν / α
 Sc nombre de Schmidt = ν / D

Indices

0 état de référence à T_{\min} et C_{\min}
 min minimum des valeurs à $X=0$ et $X=4$
 max maximum des valeurs à $X=0$ et $X=4$