

## POUVOIR DE DETECTION ET DE RESOLUTION DE LA METHODE AR : APPLICATION AUX SIGNAUX COURTS

### Résumé

Les approches d'estimation spectrale basées sur la transformation de Fourier sont très appropriées à l'analyse spectrale des signaux longs. Cependant, en pratique la durée du signal est souvent limitée et ces techniques deviennent inefficaces. Pour parer à cette contrainte, plusieurs méthodes modernes d'analyse spectrale ont été proposées. Parmi ces techniques, la méthode du modèle AR est considérée dans cet article. Cet estimateur est testé sur un processus aléatoire, de courte durée, composé d'un bruit blanc gaussien et de trois sinusoïdes. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par les méthodes du périodogramme et du corrélogramme. Cette comparaison est basée sur le pouvoir de détection d'un signal noyé dans un bruit et la finesse d'analyse de ces méthodes. Les performances de l'estimateur AR sont quantifiées en fonction du rapport signal sur bruit et de l'ordre  $p$  du modèle AR.

**Mots clés:** Analyse spectrale, corrélogramme, estimateur AR, détection, périodogramme, résolution.

### Abstract

The spectral estimation approaches based on the Fourier transform are well adapted to the spectral analysis of long signals. However, in practice the signal duration is often limited and these techniques become ineffective. In order to avoid this constraint, many alternative spectral estimation procedures have been proposed. In this paper, the autoregressive (AR) model is considered. This AR estimator is applied to a short random process consisting of three sinusoids and a white Gaussian noise. The AR spectral estimator performances are compared to those of the periodogram and the correlogram methods. The comparison is based on the signal detection and the spectral resolution. The performances of the AR estimator are quantified in terms of the signal-to-noise ration and the AR model order.

**Key words:** Spectral analysis, correlogram, AR estimator, detection, periodogram, resolution.

R.E. BEKKA

D. CHIKOUCHE

Institut d'Electronique

Université de Ferhat Abbas

19000 Sétif, Algérie

### ملخص

لقد ثبت أن طرح التقدير الطيفي التي تعتمد على تحويل فورييه متوافقة تماما مع التحليل الطيفي للإشارات الطويلة. ولكن غالبا ما نجد مدة الإشارة محدودة وبالتالي تصبح هذه التقنيات غير فعالة على الإطلاق. اقترحت لحد الآن عدة طرق عصرية للتحليل الطيفي لغرض تجنب هذا القشل. وفي هذا المقال قمنا بدراسة إحدى هذه التقنيات التي تتمثل في الطريقة المعتمدة على نموذج أطور غريسييف وقد تم تجريب هذا المقدر على إشارة عشوائية قصيرة المدى مكونة من تشوش ابيض غوصي وثلاثة ذبذبات جيبيية. كما تمت مقارنة النتائج المحصلة عليها مع التي نتجت عن استعمال تقنيات بيريدوغرام و كوريلوغرام. وقد اعتمدت هذه المقارنة على قوة اكتشاف إشارة غارقة داخل تشوش ودقة التحليل لدى كل هذه التقنيات. كما تم التقدير الكمي لكفاءة تقنية أطور غريسييف بواسطة نسبة الإشارة على التشوش و درجة النموذج.

**الكلمات المفتاحية:** التحليل الطيفي، بيريدوغرام، كوريلوغرام، تقنية أطور غريسييف، اكتشاف، الدقة.

Le développement des techniques numériques du traitement du signal a entraîné ces deux dernières décennies l'apparition de nouvelles méthodes d'analyse spectrale [1]-[7].

Les méthodes basées sur la transformation de Fourier sont les plus performantes du point de vue faisabilité et accessibilité pratique et offrent de bons résultats pour une classe importante de signaux. Cependant, ces méthodes de Fourier exigent un compromis entre la finesse d'analyse et la stabilité statistique. La finesse d'analyse ou la résolution spectrale nécessite des grandes durées d'observation. Par contre la stabilité statistique exige de courtes durées d'analyse. Par conséquent, ces méthodes classiques sont mal adaptées à l'analyse des signaux de courte durée [8] et [9]. Les méthodes modernes d'analyse spectrale permettent de surmonter les limitations intrinsèques des méthodes de Fourier. Leurs principes consistent à supposer que le signal à étudier possède un modèle caractérisé par un nombre faible de paramètres à estimer et à substituer ces valeurs estimées dans les expressions théoriques de la densité spectrale de puissance. Ce gain de paramètres descriptifs permet d'atteindre une bonne stabilité statistique tout en préservant la finesse d'analyse.

L'objectif de cet article est l'étude de l'estimation de la densité spectrale par le modèle AR en vue de détecter et de séparer des fréquences pures dans une observation de courte durée. Les résultats de cette étude sont comparés à ceux obtenus par les méthodes du périodogramme et du corrélogramme [3] et [4]. II

faut noter que le périodogramme est un estimateur non consistant de la densité spectrale. Plusieurs approches d'amélioration du périodogramme ont été proposées. La plupart d'entre elles opèrent sur des segments de longueur inférieure à celle de la suite de données à analyser à l'exception du corrélogramme qui réduit la variance tout en opérant sur la longueur de la suite de données. Par conséquent, elles nécessitent un compromis entre la variance et le biais (résolution spectrale).

Les performances de l'estimateur AR sont quantifiées en fonction du rapport signal sur bruit (S/B) et de l'ordre  $p$  du modèle AR.

## ESTIMATEUR AR

Dans le modèle autorégressif (AR), chaque échantillon  $x(n)$  du signal aléatoire à modéliser est décrit par une combinaison linéaire de  $p$  échantillons précédents plus un terme erreur  $e(n)$  [3], [8] et [11] :

$$x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + e(n) \quad (1)$$

Le modèle AR peut être interprété comme un système linéaire excité par le signal  $e(n)$  et dont la réponse est  $x(n)$ .  $e(n)$  est un bruit blanc gaussien centré de variance  $\sigma_e^2$ .

La densité spectrale  $\hat{G}_{AR}(f)$  est donnée par [10] :

$$\hat{G}_{AR}(f) = \frac{\sigma_e^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi fk} \right|^2} \quad (2)$$

L'estimation de la densité spectrale d'un processus AR consiste à calculer les coefficients  $a_k (k=1, \dots, p)$  et la variance  $\sigma_e^2$ . La mise en oeuvre du modèle AR est réalisée par la résolution des équations de Yule-Walker [3]. Ces équations sont données par :

$$R_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i R_{xx}(k-i) & k > 0 \\ \sum_{i=1}^p a_i R_{xx}(-i) + \sigma_e^2 & k = 0 \end{cases} \quad (3)$$

La détermination des paramètres AR du système d'équations (3) est obtenue par le choix et la résolution du système de  $p$  équations pour  $k > 0$ . Pour déterminer  $\sigma_e^2$ , on utilise le cas où  $k = 0$ . L'algorithme récursif de Levinson permet de déterminer les paramètres AR et  $\sigma_e^2$  en mettant en relation les coefficients AR et les valeurs des coefficients d'autocorrélation estimées à partir des données. Cette procédure s'effectuant en deux temps n'est pas la meilleure méthode. En se basant sur la récursivité de Levinson, Burg a développé une approche permettant de calculer les paramètres AR directement à partir des données [8], [12]:

$$\begin{cases} a_{pk} = a_{p-1,k} + a_{pp} a_{p-1,p-k}^* & k = 1, \dots, p \\ \sigma_p^2 = (1 - |a_{pp}|^2) \sigma_{p-1}^2 \end{cases} \quad (4)$$

où  $a_{pk}$  est le  $k$  ième coefficient dans la  $p$  ième itération,  $p$  étant l'ordre optimal.

Burg a estimé les paramètres AR d'un processus stationnaire au sens large en minimisant la somme de l'erreur quadratique progressive et de l'erreur quadratique rétrograde résumées dans un seul critère:

$$E_p = \sum_{n=p}^{N-1} |e_p^p(n)|^2 + \sum_{n=p}^{N-1} |e_p^r(n)|^2 \quad (5)$$

où  $e_p^p(n)$  est l'erreur de prédiction progressive d'ordre  $p$  (les  $p$  valeurs précédentes) définie par :

$$e_p^p(n) = x(n) - \hat{x}(n) = \sum_{k=0}^p a_{pk} x(n-k), \quad p \leq n \leq N-1 \quad (6)$$

$N$  est le nombre d'échantillons, et  $e_p^r(n)$  est l'erreur de prédiction rétrograde d'ordre  $p$  (les  $p$  valeurs futures) définie par :

$$e_p^r(n) = x(n-p) - \hat{x}(n-p) = \sum_{k=0}^p a_{pk}^* x(n+k-p), \quad p \leq n \leq N-1 \quad (7)$$

La substitution de (4) dans (6) et (7) résulte en les expressions itératives suivantes [13]:

$$\begin{cases} e_p^p(n) = e_{p-1}^p(n-1) + a_{pp}^* e_{p-1}^r(n) \\ e_p^r(n) = e_{p-1}^r(n) + a_{pp} e_{p-1}^p(n-1) \end{cases} \quad (8)$$

En substituant l'équation (8) dans (5) et en utilisant le critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne  $\frac{\partial E_p}{\partial a_{pp}} = 0$ ,

il vient :

$$a_{kk} = \hat{K}_k = \frac{-2 \sum_{i=k}^{N-1} e_{k-1}^p(i-1) e_{k-1}^r(i)}{\sum_{i=k}^{N-1} (|e_{k-1}^p(i-1)|^2 + |e_{k-1}^r(i)|^2)} \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

La procédure de l'estimation de la densité spectrale par la technique itérative de Burg est résumée ci-dessous.

- Initialisation :

- Calcul de l'erreur quadratique moyenne initiale :

$$R_{xx}(0) = \sigma_0^2$$

- Calcul des erreurs de prédiction à l'ordre 0 :

$$e_0^p(n) = x(n) \quad n = 1, \dots, N-1$$

$$e_0^r(n) = x(n) \quad n = 1, \dots, N-1$$

- Calcul des coefficients de réflexion :

Equation (9)

- Calcul de la récursivité de Levinson :

$$\begin{cases} a_{kj} = a_{k-1,j} + a_{kk} a_{k-1,k-j}^* & j = 1, \dots, k-1 \\ \sigma_k^2 = (1 - |a_{kk}|^2) \sigma_{k-1}^2 \end{cases}$$

- La mise à jour des erreurs des prédictions :

$$\begin{aligned} e_k^p(n) &= e_{k-1}^p(n-1) + a_{pp} e_{k-1}^r(n) & n = k, k+1, \dots, N-2 \\ e_p^r(n) &= e_{k-1}^r(n) + a_{kk} e_{k-1}^p(n-1) & n = k+1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Calcul de la densité spectrale :

- Equation (2)

où les coefficients AR  $a_k, k = 0, \dots, p$  sont remplacés par  $a_{pk}, k = 0, \dots, p$  et  $\sigma_e^2$  est remplacé par  $\sigma_k^2, k = p$ .

## RESULTATS ET DISCUSSIONS

L'étude de l'estimateur AR est basée sur ses performances à détecter une sinusoïde pure de faible puissance et à séparer deux sinusoïdes pures de fréquences très voisines et de même amplitude en fonction du rapport signal sur bruit et de l'ordre  $p$ . Ces trois sinusoïdes pures sont additionnées à du bruit blanc gaussien. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par les méthode du périodogramme et du corrélogramme (Blackman-Tuckey) [3] définies respectivement par :

$$\hat{G}_{per}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (10)$$

$$\hat{G}_{BT}(f) = \sum_{n=-M}^M \hat{R}_x(m) w(m) e^{-j2\pi fm} \quad (11)$$

où  $w(n)$  est une fenêtre réelle paire définie pour  $|m| \leq M (M \leq N-1)$ .

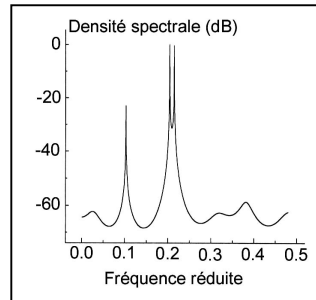
Les équations (10) et (11) supposent que la suite des données  $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$ , est issue d'un processus aléatoire stationnaire ergodique. L'équation (10) est générée avec une FFT de 2048 points. La densité spectrale, estimée par l'équation (11), utilise  $N$  coefficients d'autocorrélation et est générée avec une FFT de 2048 points.

Les amplitudes des trois sinusoïdes sont 0.1, 1.0 et 1.0 respectivement, et leurs fréquences réduites sont 0.10, 0.20 et 0.21 respectivement. Le nombre d'échantillons du processus et la puissance du bruit blanc sont variables.

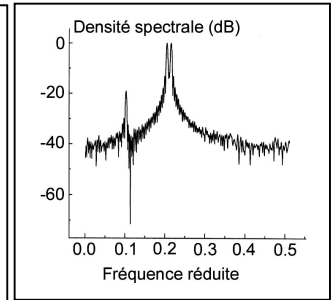
### Performance de l'estimateur AR pour N = 256, S/B = 10, 30 et 30 dB

Les figures 1.a et 1.b montrent que les performances de l'estimateur AR sont visiblement meilleures que celles du périodogramme. Les pics sont étroits et par conséquent l'estimateur AR possède un bon pouvoir séparateur. Une amélioration des performances du périodogramme est obtenue par la technique du corrélogramme. La figure 1.c montre que l'utilisation d'une fenêtre rectangulaire permet un lissage effectif de la densité spectrale, une très bonne résolution fréquentielle et un très faible pouvoir de

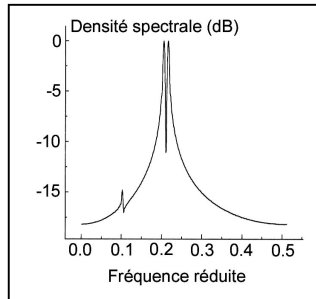
détection. Une amélioration du pouvoir de détection est réalisée par l'utilisation d'une fenêtre de Hamming au détriment de la résolution (fig. 1.d).



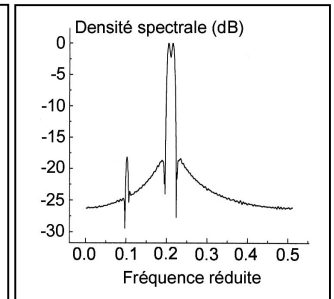
**Figure 1a:** Estimateur AR (p = 16).



**Figure 1b:** Périodogramme.



**Figure 1c:** Corrélogramme (fenêtre rectangulaire).

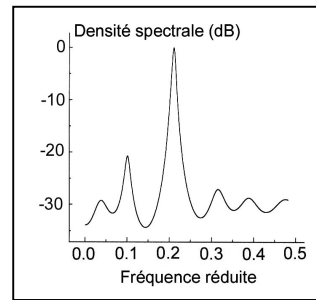


**Figure 1d:** Corrélogramme (fenêtre de Hamming).

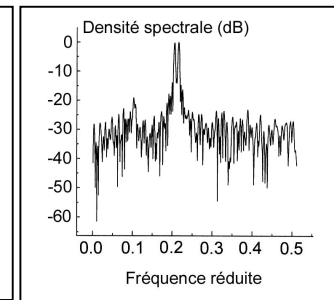
**Figure 1:** Densité spectrale. N = 256, S/B = 10, 30, 30 dB.

### Performance de l'estimateur AR pour N = 256, S/B = -10, 10 et 10 dB

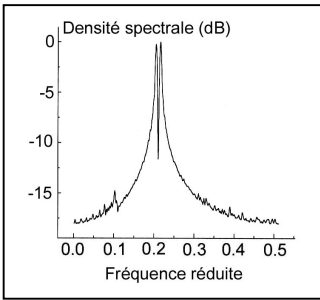
La finesse d'analyse spectrale de l'estimateur AR est très sensible au bruit (fig. 2.a). Les figures 2.b et 2.c montrent que lorsque la détection est assurée, les pouvoirs séparateurs du périodogramme et du corrélogramme ne sont pas altérés. L'utilisation de la fenêtre de Hamming peut détecter le signal de très faible rapport S/B (fig. 2.d).



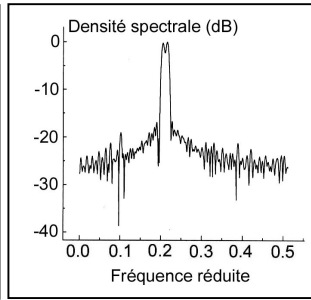
**Figure 2a:** Estimateur AR (p = 16).



**Figure 2b:** Périodogramme.



**Figure 2c:** Corrélogramme (fenêtre rectangulaire).

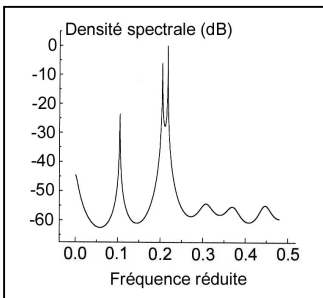


**Figure 2d:** Corrélogramme (fenêtre de Hamming).

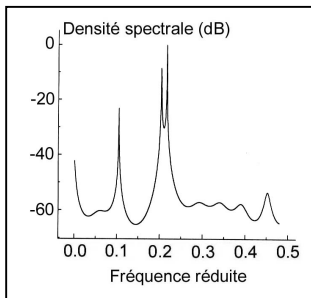
**Figure 2:** Densité spectrale.  $N = 64$ ,  $S/B = -10, 10, 10$  dB.

**Performance de l'estimateur AR pour  $N = 64$ ,  $S/B = 10, 30$  et  $30$  dB**

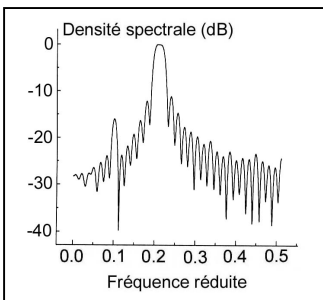
Les figures 3.a et 3.b montrent que les trois composantes spectrales correspondant aux fréquences réduites des trois sinusoïdes ont des réponses très pointues pour un rapport signal sur bruit approprié. Les maxima de la densité spectrale associées aux trois fréquences réduites sont donc bien localisés. L'estimateur AR est donc apte à séparer deux composantes spectrales de fréquences très voisines. La résolution spectrale du périodogramme est égale à 0.015625 qui est supérieure à l'écart des fréquences entre les deux sinusoïdes localisées à 0.20 et à 0.21. Ainsi, le périodogramme de la figure 3.c ne permet pas de distinguer entre ces deux composantes fréquentielles. Leur séparation nécessite un nombre d'échantillons  $N$  tel que  $1/N \leq 0.01$ . En plus, le signal de faible rapport S/B de la figure 3.c n'est pas correctement détecté (ce pic a été élargi). Le corrélogramme ne permet pas d'améliorer la finesse d'analyse (fig. 3.d).



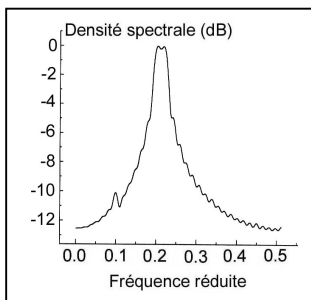
**Figure 3a:** Estimateur AR ( $p = 16$ ).



**Figure 3b:** Estimateur AR ( $p = 20$ ).



**Figure 3c:** Périodogramme.



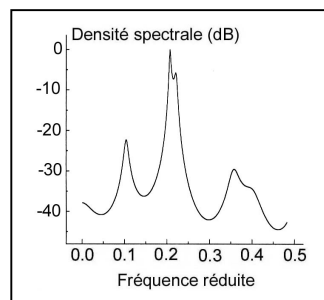
**Figure 3d:** Corrélogramme (fenêtre rectangulaire).

**Figure 3:** Densité spectrale.  $N = 64$ ,  $S/B = 10, 30, 30$  dB.

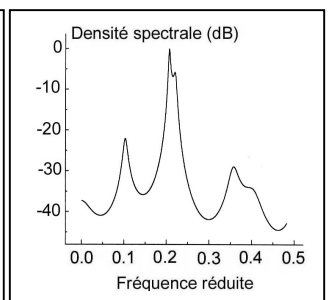
**Comportement de l'estimateur AR en fonction de l'ordre  $p$  ( $N = 64$ ,  $S/B = -5, 15$  et  $15$  dB)**

Nous allons examiner, dans cette section, le comportement de l'estimateur AR en fonction de l'ordre  $p$  du modèle et du rapport signal sur bruit. Les densités spectrales de la figure 4 montrent que la résolution augmente avec l'ordre pour un faible rapport S/B.

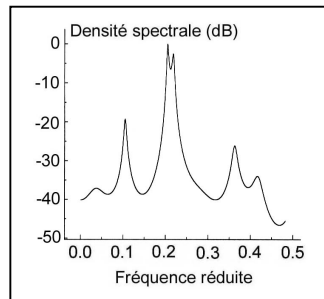
Les figures 3.a et 4.d montrent que la résolution de l'estimateur AR décroît avec la décroissance du rapport S/B. La comparaison des figures 3.b et 4.h révèle qu'une surestimation de l'ordre du modèle dégrade sérieusement le pouvoir de détection en présence d'un fort bruit additif (présence de pics fictifs).



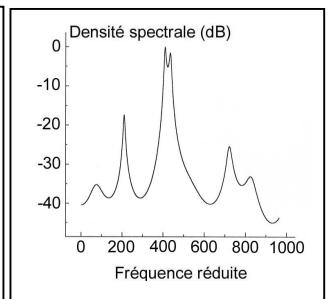
**Figure 4a:** Estimateur AR ( $p = 13$ ).



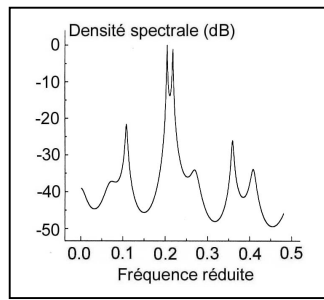
**Figure 4b:** Estimateur AR ( $p = 14$ ).



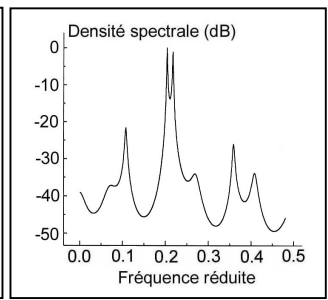
**Figure 4c:** Estimateur AR ( $p = 15$ ).



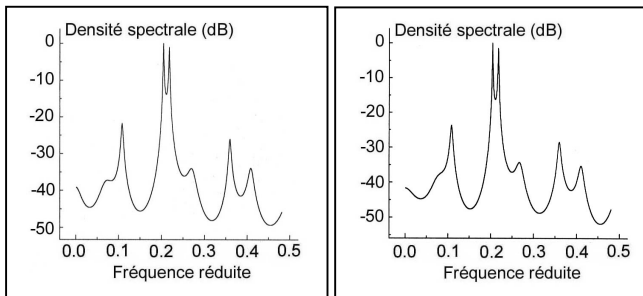
**Figure 4d:** Estimateur AR ( $p = 16$ ).



**Figure 4e:** Estimateur AR ( $p = 17$ ).



**Figure 4f:** Estimateur AR ( $p = 18$ ).



**Figure 4g:** Estimateur AR  
( $p = 19$ ).

**Figure 4h:** Estimateur AR  
( $p = 20$ ).

**Figure 4:** Densité spectrale.  $N = 64$ ,  $S/B = -5, 15, 15$  dB).

## CONCLUSION

Cet article met en évidence les avantages et les inconvénients de l'analyse spectrale par la méthode AR par rapport au périodogramme et au corrélogramme. Pour les signaux de durée moyenne, l'analyse spectrale par la méthode AR est plus sensible au niveau de bruit. Pour les signaux de courte durée, l'estimateur AR est de loin le meilleur en qualité de détection et de finesse d'analyse, pourvu que le rapport signal sur bruit soit supérieur à 10 dB. Pour un faible rapport signal sur bruit, une amélioration du pouvoir séparateur de l'estimateur AR est réalisée en augmentant l'ordre  $p$  du modèle AR. Néanmoins, le pouvoir de détection se dégrade sérieusement.

## REFERENCES

[1]- Satorios E.H., Zeidler J., "Maximum entropy spectral Analysis of multiple sinusoids in noise", *Geophysics*, Vol. 43, Oct., (1978), pp. 1111-1118.

- [2]- Marple L., "A new autoregressive spectrum analysis algorithm", *IEEE Trans. on acoustics, speech and signal processing*, Vol. ASSP-28, N°4, Aug. (1980).
- [3]- Kay S.M., "Modern spectral estimation: theory and application", Prentice Hall (1988).
- [4]- Kay S.M., Demeure, "The high resolution spectral estimator : a subjective entity", *Proc. IEEE*, Vol. 72, Dec. (1984), pp. 1815-1816.
- [5]- Srinivasan T., "Performance evaluation of certain ARMA models in power spectral density estimation", *IEEE Sixth SP Workshop on statistical signal and array conference proceedings*, 7-9 Oct. (1992).
- [6]- Amin M.G., "Introducing the spectral diversity", *IEEE Trans. signal processing*, Vol. 41 Iss: 1, Jan. (1993), pp. 185-193.
- [7]- Bekka R.E., Khelil K., Chikouche D., Boucenna A., "Comparaison entre la Méthode de Prony d'Analyse Spectrale et l'Approche de la FFT", CNPA-96, Sétif, 3-5 Déc. (1996).
- [8]- Kay S.M., Marple S.L., "Spectrum analysis-a modern prespective", *Proc. IEEE ASSP*, Vol. 69, N°11 (1981), pp. 1380-1419.
- [9]- Khelil K., Bekka R.E., Chikouche D., Boucenna A., "L'application des méthodes d'analyse spectrale à la détection des signaux brefs", COMAEI-96, Tlemcen, 3-5 Déc. (1996).
- [10]- Baldeweck T., Laugier P., Herment A., Berger G., "Application of autoregressive spectral analysis for ultrasound attenuation estimation : interest in highly attenuating medium", *IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and frequency control*, Vol. 42, N°1, Jan. (1995).
- [11]- Makhoul J., "Linear prediction : a tutorial review", *Proc. IEEE*, Vol. 63, N°4 (1981), pp. 561-580.
- [12]- Burg J.P., "Maximum entropy spectral analysis", *Proc. 37th society of exploration geophysicists*, Oklahoma City, Oct. 31, (1967).
- [13]- Giordona A.A., Hsu F.M., "Least square estimation with applications to digital signal processing", John Wiley & Sons, (1985). □