Sciences & Technologie – N°13, Juin (2000), pp. 7-10.

CALCUL PAR ELEMENT FINI MIXTE DE LA FORME OPTIMALE DE L'ARCHE

Soumis le 30/01/1999 – Accepté le 24/04/2000

Résumé

L'objectif de ce travail est d'optimiser des fonctionnelles liées à la forme de l'Arche et soumises à des contraintes. La méthode des éléments finis mixtes est très avantageuses pour ce type de problème en mécanique des structures. L'Arche se comporte d'une manière régulière par rapport à la forme ce qui conduit à la mise en œuvre de l'algorithme du gradient projeté.

Mots clés *: Equations de l'Arche, Eléments finis mixtes, Optimisation, Structures.*

Abstract

The objective of this work is to optimize same kind of objectives functions subject to contraints and related to Arch forms. Mixed finite element method is advantageous in this type of structural problem. Because the Arch behaves like smooth structure with it middly form, the solution is also smooth with the form, then the gradient of objective function is very easy to calculate. So, we can apply the gradient algorithm.

Key words *: Arch equations, Mixed finite element, Optimisation.*

Classification AMS: 65D05, 65D15, 65K10, 65N22, 65N30.

A. AYADI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mentouri
Constantine, Algérie
H. MEKIAS
S. REKAB
Institut de Mathématiques
Université de Sétif
Sétif (Algérie)

ملخص

الهدف من هذا العمل إيجاد القيم المثلى للتوابع المرتبطة بشكل الجسم و ضمن حواجز. إن طريقة العناصر المنتهية المزدوجة لها أهميتها في مثل هذه المسائل المتعلقة بالميكانيك البنيوية. إن الجسم المقتر: هنا يتصرف بشكل منتظم التجاه شكله بما يسمح بإستخدام خوارزم التابع التدرجي الاسقاطبي.

الكلمات المفتاحية: معادلات الجسم المقوص ، العناصر المزدوجة النتهية، المثل، البناءات.

Le problème variationnel de l'Arche en déplacement :
Soit : $\varphi : I \subset \Re \to \Re$ (la forme de l'Arche), alors :

$$A(\varphi;u,v) = l(v) \quad \forall v \in V = H_0^1 \times H_0^2 \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} A(\varphi;u,v) = \int_I [c.\varepsilon(u).\varepsilon(v) + d.k(u).k(v)] S(x)dx \\ l(\varphi;v) = \int (f,v) S(x)dx, \quad v \in V \end{cases}$$

où :

$$c = Eeb, \qquad d = Eb\frac{e^3}{12}$$

avec :
E : module d'Young
b : profondeur de l'Arche
e : épaisseur de l'Arche

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(x) = \dfrac{d\varphi(x)}{dx} & \text{(Dérivée par rapport à x)} \\ S(x) = \sqrt{1 + (\dot{\varphi})^2} & \text{(Longueur de la courbe de l'Arche)} \\ \dfrac{1}{R} = -\dfrac{\ddot{\varphi}}{S^3} \end{cases}$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{S} \\ \frac{\dot{\varphi}}{S} \end{Bmatrix} : \quad \text{Le vecteur normal.}$$

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} -\frac{\dot{\varphi}}{S} \\ \frac{1}{S} \end{Bmatrix} : \quad \text{Le vecteur tangent.}$$

$$\begin{cases} \varepsilon(v) = \frac{1}{S}\dot{v}_1 + \frac{1}{R}v_2 & \text{(tenseur des déformations de la menbrane)} \\ k(v) = \frac{1}{S}\dot{\theta}(v) & \text{(tenseur des déformations de la flexion)} \\ \theta(v) = \frac{1}{R}v_1 - \frac{1}{S}\dot{v}_2 & \text{(rotation de la normale)} \end{cases}$$

$\vec{v} = v_1\vec{t} + v_2\vec{n}$ (le vecteur de déplacement)

L'approximation du vecteur déplacement $\vec{v}$ par la méthode des éléments finis nécessite l'approximation de l'espace H_0^1 par l'espace des fonctions continus C^0, l'espace H_0^2 par l'espace des fonctions une fois dérivable C^1 et l'approximation de la forme de l'Arche par les fonctions splines d'ordre cinq, ce qui rend l'implémentation sur ordinateur très lourde.

La formulation variationnelle mixte (contraintes, déplacements) réduit l'ordre de la dérivation en déplacement et en forme, Lods [7] et donne de bonnes précisions sur les contraintes.

Une régularité suffisante de la solution de (1.1) par rapport à la forme de l'Arche conduit à l'utilisation de l'algorithme du gradient projeté dans la recherche de sa forme optimale avec contraintes. Les données sont suffisamment régulières ce qui implique une régularité suffisante de la solution de Ayadi [1-3].

Dans la section 2, on introduit la formulation variationnelle mixte, on donne un théorème d'existence et d'unicité, et on termine par l'approximation de la solution et l'estimation de l'erreur.

Dans la section 3, on étudie le problème de régularité de la solution par rapport à la forme de l'Arche et le problème d'optimisation de cette dernière.

La quatrième section est consacrée à la simulation numérique par la méthode des éléments finis mixtes, du vecteur de déplacement, tenseur de déformation, la rotation de la normale d'une part, et d'autre part à la simulation numérique de la forme de l'Arche par les fonctions B-splines.

FORMULATION MIXTE DE L'ARCHE.

Problème continu

On va définir la géométrie de l'Arche et on donne sa formulation variationnelle mixte :

Définition 1. *Soit* $\varphi : I =]0,1[\to \Re$ *une fonction de* $W^{1,\infty}(I)$ *telle que :*

$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

où $W^{1,\infty}(I)$ *est l'espace des fonctions définies sur l'intervalle I et dont les dérivées au sens faible jusqu'à l'ordre 1 appartient à* $L^\infty(I)$. *Soit b un réel positif, on définit l'ensemble Y par :*

$$Y = \{(x,y,z) \in \Re^3 ;\ \text{tel que } x \in I, z = \varphi(x) \text{ et } y \in]0,b[\}.$$

L'Arche est une structure tridimentionnelle de faible épaisseur e construite autour de sa surface moyenne Y et elle est définie par :

Pour $v \in V,\ \varphi \in W^{3,\infty} = \{\varphi \in L^\infty / \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \dddot{\varphi} \in L^\infty\}$

Soit le vecteur déplacement $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ *sur la base conique* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *alors :*

$$\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = u_1\vec{t} + u_2\vec{n}$$

où $\begin{pmatrix}u_1 \\ u_2\end{pmatrix}$ est le vecteur déplacement sur la base locale $\vec{t}, \vec{n}$.

Soient :

$$\Lambda = \{\varphi \in W^{1,\infty}(I), \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$$

$$V = \left(H_0^1(I)\right)^3 \times L^2(I)$$

$$\begin{cases} C(\varphi; w, w^*) = \int_I \left\{c\varepsilon.\varepsilon^* + \frac{d}{s(\varphi)^2}\theta.\theta^*\right\} S(\varphi)dx,\ w \text{ et } w^* \in V,\ V \in \Lambda \\ B(\varphi; w, \tau) = \int_I \left\{\tau_1(\dot{\alpha} - \theta\dot{\varphi} - \varepsilon) + \tau_2(\dot{\beta} + \theta - \dot{\varphi}\varepsilon)\right\}dx,\ w \in V, \tau \in \Gamma, \varphi \in \Lambda \\ F(\varphi, w) = \int_I (f_1(\varphi)\alpha + f_2(\varphi)\beta) S(\varphi)dx \end{cases}$$

$$\Gamma = \left(L^2(I)\right)^2$$

On définit les formes bilinéaires et linéaires par :

où $w = (\alpha, \beta, \theta, \varepsilon)$, $w^* = (\alpha^*, \beta^*, \theta^*, \varepsilon^*)$

et le problème mixte est :

Pour $\varphi \in \Lambda$, trouver :

$w = (\alpha, \beta, \theta, \varepsilon) \in V$ solution de :

$$\begin{cases} C(\varphi; u, v) + B(\varphi; \lambda, v) = F(\varphi; v), & \forall v \in V \\ B(\varphi; \tau, u) = 0, & \forall \tau \in \Gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

Théorème 1. *Si le vecteur force* (f_1, f_2) *est dans* Γ *et* $\varphi \in \Lambda$*, le problème* (2.1) *admet une solution unique* $w \in V$.

Démonstration. La forme bilinéaire *C* est coercitive sur le noyau de l'opérateur *B* et l'opérateur *B* est stable, alors les hypothèses du théorème de Brezzi sont satisfaites d'où l'existence et l'unicité de la solution, Lods [7].

Problème approché

On se place dans un espace de dimension finie :

$$S_{k,t} = \left\{\sum \gamma_j B_{j,k,t}(x); \gamma_j \in \Re \text{(l'ensemble des nombres réels)}\right\}$$

et les $B_{j,k,t}(x)$ sont définies par :

$$B_{(j,1,t)}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad t_j \le x \le t_{j+1}, & j = 1, m-1 \\ 1 & si \quad t_j \le x \le t_{j+1}, & j = m, \quad (t_m < t_{m+1}) \\ 0 & autrement \end{cases}$$

pour $k \ge 2$:

$$B_{j,k,t}(x) = \begin{cases} \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1,t}(x) + \frac{t_{j+1-x}}{t_{j+k} - t_{j+1}} B_{j+1,k-1,t}(x), & j = 1, m-1 \\ \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1,t}(x), & j = m \end{cases}$$

les $(t_j)_{j=1,m}$ est une suite des valeurs réelles.

et soit:

$$I_h = \bigcup IC \text{ et } I_i = [x_i, x_{i+1}]$$

$$V_h^1 = \{ \ v \in C^0(I);\ v_{|I_i} \in P_1 \text{ (polynôme d'ordre 1)} \ \text{et} \ v(0) = v(1) = 0 \ \ et \ \ i = 1, n \ \}$$

$$V_h^2 = \left\{ v \in L^2(I);\ v_{|I_i} \in P_0 \ (polynôme\ d'ordre0)\ et\ i = 1, n \right\}$$

$$V_h = \left(V_h^1\right)^3 \times V_h^2$$

Alors pour $\varphi_S \in S_{k,t}$ et $w_h \in V_h$ et $\lambda_h \in V_h^2 \times V_h^2$, le problème approché est :

$$\begin{cases} C(\varphi_S; w_h, v) + B(\varphi_S; \lambda_h, v) = F(\varphi; v), & \forall v \in V_h \\ B(\varphi_S; \tau, u_h) = 0, & \forall \tau \in V_h^2 \times V_h^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

L'existence et l'unicité de la solution approchée ne pose aucune difficulté.

Estimation d'erreur

$\varphi \in W^{3,\infty};\ \varepsilon \in H^1;\ \alpha, \beta, \theta \in H^2$ alors on a les estimations, Brezzi [4] :

$$\|\varphi - \varphi_S\|_{W^{1,\infty}} \le c s^2 \|\varphi\|_{W^{3,\infty}}, \quad s \text{ est le plus grand pas.}$$

$$\begin{cases} \|\alpha - \alpha_h\|_{H_0^1} \le c_2 h \|\alpha\|_{H^2}, & h \ \ est\ le\ pas\ de\ discrétion \\ \|\beta - \beta_h\|_{H_0^1} \le c_3 h \|\beta\|_{H^2}, \\ \|\theta - \theta_h\|_{H_0^1} \le c_0 h \|\theta\|_{H^2}, \\ \|\varepsilon - \varepsilon_h\|_{L_2} \le c_1 h \|\varepsilon\|_{H^3}. \end{cases}$$

OPTIMISATION

Différentiabilité

Les fonctions $\varphi \to C(\varphi;.,.)$, $\varphi \to B(\varphi;.,.)$ et $\varphi \to F(\varphi;.,.)$ sont Fréchet-différentiable, Ayadi [1], Chenais [5].

Etant donné une fonctionnelle $J : \Phi \times V \to \Re$, on cherche $\varphi^* \in \Phi \subset \Lambda$ tel que :

$$j(\varphi) = J\left(\varphi^*; u_{\varphi^*\lambda^*}\right) = \underset{\varphi\in\Phi}{Min}\ J\left(\varphi; u_\varphi, \lambda_\varphi\right)$$

où $\left(u_\varphi, \lambda_\varphi\right)$ est une solution de (2.1) et Φ est un ouvert de Λ, alors :

Théorème 2. *Si* $J(\varphi, u, \lambda)$ *est différentiable, le gradient de* $j(\varphi)$ *par rapport à* φ *est donné par :*

$$\begin{cases} \frac{dj(\varphi)}{d\varphi}.s = \frac{\partial J}{\partial \varphi}\left(\varphi; u_\varphi, \lambda_\varphi\right).s - \frac{\partial C}{\partial \varphi}\left(\varphi; u_\varphi^*, u_\varphi\right).s - \\ \frac{\partial B}{\partial \varphi}\left(\varphi; \lambda_\varphi^*, u_\varphi\right).s - \frac{\partial B}{\partial \varphi}\left(\varphi; \lambda_\varphi, u_\varphi^*\right).s + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\left(\varphi; u_\varphi^*\right).s \end{cases}$$

où $\left(u_\varphi^*, \lambda_\varphi^*\right)$ *est la solution de (2.1) avec une nouvelle fonction F définie par :*

$$F(\varphi, v) = -\frac{\partial J}{\partial u}\left(\varphi; u_\varphi, \lambda_\varphi\right).$$

SIMULATION NUMERIQUE

Simulation numérique de la solution

Dans cette partie, o, s'intéresse au calcul numérique de la solution du problème approché (2.1).

Soit la forme d'Arche :

$$\varphi(x) = x \times (1 - x)$$

et le champ de force :

$$F = \left(f_1, f_2, 0, 0\right)$$

avec :

$$\begin{cases} f_1 = -c\left[\frac{\dot\varepsilon}{S} - \frac{\varepsilon}{S^3}\ddot\varphi\dot\varphi\right] + \frac{d}{S}\left[\frac{k}{S^3}\ddot\varphi + \left(\frac{\dot k}{S}\right)\dot\varphi\right] \\ f_2 = -c\left[\frac{\varepsilon}{S^3}\ddot\varphi + \frac{\dot\varepsilon}{S}\dot\varphi\right] + \frac{d}{S}\left[\frac{\dot k}{S^3}\ddot\varphi\dot\varphi - \left(\frac{\dot k}{S}\right)\dot\varphi\right] \end{cases}$$

et :

$E = 10^6\ kg/cm^2$ (module d'Young)

$b = 1\ cm$ (profondeur de l'Arche)

$e = 0.1\ cm$ (épaisseur de l'Arche)

$G = 10\ \ kg/cm^2$ (densité de charge)

La solution exacte est :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{G}{SEb^3}\dot\varphi\varphi^2 \\ \beta = \frac{-G}{SEb^3}\varphi^2 \\ \theta = \frac{2G}{Sb^3}\dot\varphi\varphi \\ \varepsilon = \frac{G}{SEb^3}\ddot\varphi\varphi^2 \end{cases}$$

On calcule la solution approchée par la méthode des éléments finis mixtes, avec un nombre de degrés de liberté total (NDLT) égal à 33, 51 et 87 respectivement.

L'estimation de l'erreur (la différence entre la solution exacte et la solution approchée) est calculée par les deux normes ; $\|.\|_{L^\infty}$ et la norme relative ($\frac{\|erreur\|_{L^\infty}}{\|solution\|_{L^\infty}}$). Les résultats sont présentés dans les tableaux suivants :

La 1ère composante du vecteur déplacement α		
NDLT	Erreur L^∞	Erreur relative
33	0.82671×10^{-05}	0.64543×10^{-01}
66	0.25785×10^{-05}	0.13708×10^{-01}
132	0.64462×10^{-06}	0.26216×10^{-02}

La 1ème composante du vecteur déplacement β		
NDLT	Erreur L^∞	Erreur relative
33	0.82975×10^{-04}	0.14902×10^{-00}
66	0.20745×10^{-04}	0.29804×10^{-01}
132	0.51912×10^{-05}	0.59608×10^{-02}

La rotation θ du vecteur normal		
NDLT	Erreur L^∞	Erreur relative
33	0.26770×10^{-03}	$0.15981 \times 10^{+00}$
66	0.89231×10^{-04}	0.39955×10^{-01}
132	0.29743×10^{-04}	0.99901×10^{-02}

Tenseur de déformation ε		
NDLT	Erreur L^∞	Erreur relative
33	0.15071×10^{-03}	$0.12265 \times 10^{+00}$
66	0.37680×10^{-04}	0.24532×10^{-01}
132	0.94721×10^{-05}	0.49067×10^{-02}

Simulation numérique de l'optimisation.

Dans cette section, on optimise les deux fonctionnelles objectifs :

$$\begin{cases} j_1(\varphi) = \int_I \left(\alpha^2 + \beta^2\right) dx \\ j_2(\varphi) = -G \int_I \beta dx \end{cases}$$

par rapport à la forme de l'Arche φ soumise à des contraintes d'inégalitées, et pour le cas de charge :

$F(\varphi; w) = -G \int_I \beta dx$ (G : la densité de charge)

La forme de l'Arche est approchée, à chaque itération, par les B-splines en 5 points : 0, 0.2, 0.5, 0.8 et 1 pour chaque forme initiale :

1) $\varphi_0(x) = x \times (1 - x)$ (parabolique)

2) $\varphi_0(x) = 1 \ sur \ ]0,1[\ et \ \varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0$

(poutre légèrement courbée)

3) $\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \ sur \ ]0.2, 1[\ et \ \varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0 \\ \varphi_0(0.2) = 2 \end{cases}$

(Spline non symétrique)
respectivement.

Les valeurs initiales et finales de chaque fonctionnelle ainsi que le nombre des itérations, pour chaque forme initiale, sont présentées dans les tableaux suivants :

Optimisation de la fonctionnelle $j_1(\varphi)$

	Coût initial	Coût final	Itération
Parabolique	0.35313x10^{-3}	0.23506x10^{-3}	09
Poutre légèrement courbée	0.16146x10^{-2}	0.23505x10^{-3}	11
Spline non symétrique	0.17536x10^{-2}	0.23507x10^{-3}	15

Optimisation de la fonctionnelle $j_2(\varphi)$.

	Coût initial	Coût final	Itération
Parabolique	0.16694x10^{-8}	0.66968x10^{-9}	11
Poutre légèrement courbée	0.37061x10^{-7}	0.66967x10^{-9}	15
Spline non symétrique	0.46708x10^{-7}	0.66966x10^{-9}	31

CONCLUSION

Ce travail a été réalisé par Habbal [6] en utilisant la formulation variationnelle en déplacement, les difficultés numériques rencontrées dans son calcul sont multiples : manque de précision sur la rotation et le tenseur de déformation, l'implémentation est très lourde (l'approximation est faite par des polynômes de degrés plus élevés, et la forme de l'Arche est approchée par des B-splines d'ordre 5) ; et enfin la fonctionnelle à optimiser est également moins précise. Face à ces inconvénients, nous avons formuler le problème en formulation variationnelle mixte, les résultats numériques sont surprenants : la rotation de la normale et le tenseur de déformation sont meilleurs et l'optimisation de la fonctionnelle est satisfaisante.

Ces résultats nous encouragent à généraliser à d'autres problèmes structurels et à d'autres fonctionnelles qui ne sont pas Fléchet-différentiables.

REFERENCES

[1]- Ayadi A., La différentiabilité de la solution d'une formulation variationnelle mixte abstraite par rapport aux variables de conception et le calcul du gradient d'une fonctionnelle coût, Revue Sciences & Technologie, Série C, N°6, pp.46-66, Univ . Mentouri, Constantine, Algérie (1995).

[2]- Ayadi A., La formulation mixte en optimisation d'une poutre sans cisaillement, Maghreb Math. Rev., Vol. 4, N°2, December 95, pp. 41-54, Algérie (1995).

[3]- Ayadi A., Calcul numérique de la forme optimale d'une poutre avec cisaillement, Revue Sciences & Technologie, Série C, N°10, pp.1-10, Univ. Mentouri, Constantine, Algérie (1998).

[4]- Brezzis H., Analyse fonctionnelle, théorie et application, Collection Mathématiques appliquées, pour la maîtrise, Masson (1993).

[5]- Chenais D., Rousselet B. and Beridic T., Design sensitivity for Arch structures, Journal of Optimisation Theory and Application, Vol. 58(2), pp. 225-239 (1988).

[6]- Habbal A., Optimisation non différentiable de formes d'Arche, Nouvelle Thèse, Université de Nice (1990).

[7]- Lods V., Gradient discret et gradient continu discrétisé en contrôle optimal à paramètre distribués, Nouvelle Thèse, Université de Nice, France (1992). ☐