APPLICATION TOTALEMENT ET BIEN CONTINUES DANS LES *R*-ESPACES

Soumis le 24/04/1999 – Accepté le 07/06/2000

Résumé

Dans le présent article, nous nous intéressons à l'étude de quelques propriétés de deux classes d'applications présentant d'autres particularités en plus de la continuité et qu'on a nommé applications totalement continues et bien continues. Ces applications sont définies sur les *r*-espaces dus à Zuzcak généralisant les espaces topologiques usuels.

Mots clés: *r-espaces, applications totalement continues, applications bien continues.*

Abstract

In this paper, we are interested in the study of two class of applications which have other properties in addition of continuity. They are called complete continuity and good continuity. These applications are defined in *r*-spaces which are introduced by Zuzcak, and they generalize usual topological spaces.

Key words: *r-espaces, complete continuity, good continuity.*

Classification AMS: 54A05, 54A20, 54F65, 54G99

D. AZZAM
Centre Universitaire de Jijel
Institut des Sciences Exactes
Jijel (Algérie)

K. BETTINA
Institut de Mathématiques
U.S.T.H.B. Bab Ezzouar
Alger (Algérie)

ملخص

في هذه المقالة، نحاول دراسة بعض خصائص صنفي من التطبيقات لها خواص أخرى زيادة عن الإستمرار و قد أسميناها بالتطبيقات المستمرة كليا و الجد مستمرة.
هذه التطبيقات معرفة على ر-فضاءات الناتجة عن زوزشاك "Zuzcak" و هي عبارة عن تعميم للفضاءات الطبولوجية.

كلمات المفتاح: *ر-فضاءات، تطبيقات المستمرة كليا و الجد مستمرة.*

Soit X un ensemble non vide et θ_1, θ_2 deux topologies sur X. Sachant que la réunion de deux topologies n'est pas obligatoirement une topologie, l'espace $X, \theta_1 \cup \theta_2$ n'est donc pas un espace topologique.

Les travaux de I. Zuzcak [5, 6, 7] ont portés sur une généralisation des espaces topologiques usuels qu'il a nommé *r*-espaces, les espaces de la forme $\left(X, \bigcup_{i=1}^{n} \theta_i\right)$ ou les θ_I sont des topologies usuelles, présentant des exemples de *r*-espaces.

Dans le présent article, on étudie deux classes d'application entre les *r*-espaces présentant d'autre particularités en plus de la continuité que nous nommons applications totalement continues et applications bien continues. Celle ci ne sont pas connues en topologie du faite que dans un espace topologique un sous-ensemble donné ne peut avoir qu'un seul intérieur et une seule fermeture, par contre dans un *r*-espace il peut avoir plusieurs intérieurs et fermetures.

NOTATIONS ET REMARQUES

Soit X un ensemble non vide, $P(X)$ l'ensemble des parties de X et soit $D \subseteq P(X)$ vérifiant les axiomes suivants:

1) $\varnothing, X \in D$,

2) Pour tout sous-ensemble A de X et pour tout $B \in D^A = \{M \in D / M \subseteq A\}$, il existe un élément maximal C de D^A tel que $B \subseteq C \subseteq A$, l'élément maximal étant pris au sens de l'inclusion;

- D est appelée *r-topologie*, le couple (X, D) est appelé r-espace et les éléments de D sont appelés ouverts.
- La classe D définit la relation σ sur $P(X)$ d'une façon unique; $A \sigma B$ ssi A est un élément maximal de l'ensemble $\{M \in D / M \subseteq B\}$. La relation σ est appelée relation d'intérieur et si $A \sigma B$, alors A est appelé intérieur de B.
- Un sous-ensemble A de X est appelé fermé si son complémentaire $(X - A)$ est un ouvert.

- On note Γ la classe des fermés de X.
- Nous dirons que B est une fermeture de A ssi $(X-B)\sigma(X-A)$, ou que B est un élément minimal de l'ensemble $\{M \in \Gamma / A \subseteq M\}$.
- On appelle voisinage d'un point $x \in X$, tout ouvert de X contenant x. Si V est un ouvert de X, le sous-ensemble $W = V \bigcup \{x\}$ est appelé prévoisinage de x.
- Soient A, B deux sous-ensembles de X tels que $B \in D$; on dit que le point $x \in X$ est un point adhérent à A suivant B ssi $V \bigcap A \neq \varnothing$ pour tout voisinage V de x contenant le prévoisinage $B \bigcup \{x\}$ de x.
- Soient X, Y deux *r-espaces*, Γ_1, Γ_2 les classes de tous les fermés de X, Y respectivement et f une application définie de X dans Y; nous dirons que f est continue ssi $f^{-1}(B) \in \Gamma_1$ pour tout $B \in \Gamma_2$.

Introduisons dans ce qui suit la propriété qu'on note (*P1*) qui va nous permettre l'étude des applications totalement et bonnes continues et leurs mutuelles relations.

Propriété (P1)

Soient $(X,D_1),(Y,D_2)$ deux *r-espaces*, f une application contine définie de X dans Y, A et B deux sous-ensembles de Y vérifiant $A \bigcap B = \varnothing$ et $B \in D_2$.

Si pour un point $x \in X$, $f(x)$ est un point adhérent à A suivant B alors x est un point adhérent $f^{-1}(A)$ suivant $f^{-1}(B)$.

Remarque

Nous pouvons interpréter (P1) comme suit:
Si pour tout voisinage W de $f(x)$ contenant B, $W \bigcap A \neq \varnothing$, alors pour tout voisinage V de x contenant $f^{-1}(B)$, $V \bigcap f^{-1}(A) \neq \varnothing$.

APPLICATIONS TOTALEMENT CONTINUES

Définition

Soients $(X,D_1),(Y,D_2)$ deux *r-espaces*, f une application contine définie de X dans Y, f est dites totalement continue au point $x \in X$ si et seulement si pour tous sous-ensembles A, B de Y tel que $A \bigcap B = \varnothing$ et $B \in D_2$, f vérifie la propriété (P1). Nous dirons que f est totalement contine sur X ssi elle est totalement continue en tout point $x \in X$.

Théorème 1

Soient $(X,D_1),(Y,D_2)$ deux r-espaces, f une application contine définie de X dans Y; alors f est totalement continue au point $x \in X$ ssi elle vérifie la propriété (P2) *ci-dessous:*

Si pour tous sous ensembles A, B de Y tel que $A \bigcap B = \varnothing$ et $B \in D_2$, il existe un voisinage V_x de x contenant $f^{-1}(B)$ et vérifiant $V_x \bigcap f^{-1}(A) = \varnothing$, alors il existe un voisinage $W_{f(x)}$ de $f(x)$ contenant B et vérifiant:

$$W_{f(x)} \bigcap A = \varnothing \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(P2)}$$

Démonstration

Le théorème résulte de ce que (P2) est la contraposée de (P1).

APPLICATIONS BIEN CONTINUES

Définition

Soient $(X,D_1),(Y,D_2)$ deux *r-espaces*, f une application contine définie de X dans Y; f est dites bien continue si pour tous sous-ensembles A, B de Y telle que B est une fermeture de A, $f^{-1}(B)$ est une fermeture de $f^{-1}(A)$ ……………(P3)

Lemme

Soient $(X,D_1),(Y,D_2)$ deux r-espaces, f une application contine définie de X dans Y; alors f est bien continue, ssi pour tout sous-ensembles A, B de Y tel que A est un intérieur de B, $f^{-1}(A)$ est un intérieur de $f^{-1}(B)$.

Démonstration

Si A est un intérieur de B alors $(Y-A)$ est une fermeture de $(Y-B)$ et donc $f^{-1}(Y-A)$ *est une fermeture de* $f^{-1}(Y-B)$ *c'est-à-dire* $\left(X - f^{-1}(A)\right)$ *est une fermeture de* $\left(X - f^{-1}(B)\right)$*, d'où* $f^{-1}(A)$ *est un intérieur de* $f^{-1}(B)$.

Remarque

Considérons la restriction à un espace topologique (X,θ). Dans ce cas, un point $x \in X$ est adhérent à une partie A suivant un ouvert B disjoint de A ssi $V \bigcap A \neq \varnothing$ pour tout voisinage V de x contenant B ce qui équivaut à dire que x est un point adhérent à A.
Si f est une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y, alors f est totalement continue ssi pour tout sous ensemble A de X

$$\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}\overline{(A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(*)}$$

et cette propriété équivaut à la bonne continuité de f.

On conclut alors que dans la classe des espaces topologiques la totale continuité d'une application f équivaut à sa bonne continuité; elles équivalent toutes les deux à la propriété (*). (On note $\overline{A}$ l'adhérence de A).

RELATIONS ENTRE CES CLASSES D'APPLICATIONS

Corollaire

(corollaire 3 de [7]). *Soient $(X,D_1),(T,D_2)$ deux r-espaces, f une application définie de X dans Y, si f est bien continue alors f est continue.*

Démonstration

Pour montrer que *f* est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque de tout fermé *Y* est un fermé de *X*. Soit *A* un fermé de *Y*. D'après la définition d'une fermeture, *A* étant donné, *A* est sa propre (et unique) fermeture. D'après (P3), $f^{-1}(A)$ est donc une fermeture de $f^{-1}(A)$ et donc $f^{-1}(A)$ est un fermé de *X*.

La bonne continuité entraîne la continuité; par contre, l'implication inverse est fausse. Nous allons illustrer ceci par un exemple.

Soient:
$X = \{x_1, x_2, x_3\}, D_1 = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, X\}$
$Y = \{y_1, y_2, y_3\}, D_2 = \{\varnothing, \{y_1\}, \{y_2, y_3\}, Y\}$
et soit *f* une application définie de *X* dans *Y* comme suit:
$f(x_1) = f(x_2) = y_1$
$f(x_3) = y_2$
Il est aisé de voir que *f* est continue.
Posons $A = \{y_1\}$ et $B = \{y_1, y_2\}$.
On voit bien que A est un intérieur de *B*.
Par contre:
$f^{-1}(A) = f^{-1}(\{y_1\}) = \{x_1, x_2\}$
$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{y_1, y_2\}) = X$
$\{x_1, x_2\}$ n'est pas un intérieur de X, et par suite, f n'est pas bien continue.

Théorème 2

Soient $(X, D_1), (Y, D_2)$ deux r-espaces, f une application continue définie de X dans Y. Si f est totalement continue, alors elle est bien continue.

Démonstration

Soient *M*, *N* deux sous-ensembles de *Y* tel que *M* soit un intérieur de *N*. Supposons que $f^{-1}(M)$ n'est pas un intérieur de $f^{-1}(N)$, donc il existe au moins $S \in D_1$ tel que S soit un intérieur de $f^{-1}(N)$ et $f^{-1}(M) \subset S \subseteq f^{-1}(N)$ et par suite $S \cap f^{-1}(Y - N) = \varnothing$.

Soit $x \in S - f^{-1}(M)$, $S \in D_1$ et $x \in S$ donc S est un voisinage de *x*; comme f est totalement continue, il existe alors un voisinage $W_{f(x)}$ de $f(x)$ contenant *M* et vérifiant $W_{f(x)} \cap (Y - N) = \varnothing$, d'où $f(x) \in N$. On a alors $M \subset W_{f(x)} \subseteq N$ et donc la contradiction avec le fait que *M* est un intérieur de *N*.

Remarque

La bonne continuité n'entraîne pas nécessairement la totale continuité, comme le montre l'exemple suivant:

Exemple

Soient:
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,
$D_1 = \{\varnothing, \{x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_3, x_4, x_5\}, X\}$
$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}, D_2 = \{\varnothing, \{y_3\}, \{y_3, y_4\}, X\}$, et soit f une application de X dans Y définie comme suit:
$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_{21}, f(x_3) = y_3, f(x_4) = f(x_5) = y_4$.

On pose $A = \{y_1\}$, $B = \{y_3\}$ et $x = x_2$; $f(x) = y_2$ est un point adhérent à *A* suivant *B*; en effet, $W \cap A \neq \varnothing$, pour tout voisinage *W* de $f(x)$ puisque $W = Y$ est le seul ouvert contenant y_2 et *B*.

Par contre, $x \in \{x_2, x_3, x_4\} = V \in D$, $f^{-1}(B) \subset V$ et $V \cap f^{-1}(A) = \varnothing$, et donc x n'est pas adhérent à $f^{-1}(A)$ suivant $f^{-1}(B)$.

En conséquence, f n'est pas totalement continue. Par ailleurs, il est aisé de voir qu'elle est bien ciontinue.

Cet exemple montre en outre que l'implication "f bien continue $\Rightarrow f$ totalement continue" peut être fausse même avec *f* surjective et *Y* espac topologique.

REFERENCES

[1]- Appert A., A folow up to the article: On the best primitive term in topology, in proceedings of the seminar on the history of mathematics 3, Inst. Henri Poincaré, Paris (1982).
[2]- Bourbaki N., Eléments de mathématiques, Topologie générale , chapitres 1 à 4, Hermann, Paris (1971).
[3]- Fuchs L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon Press , New York (1963) .
[4]- Kelley J.L., General topology, Van Norstrand Company, New York (1955).
[5]- Zuzcak I., Generalized topological spaces, *Math Slova*, 33, N°3 (1983), pp. 249-256.
[6]- Zuzcak I., Bases in *r-espaces*, *Math Slova*, 35, N°2 (1985), pp. 175-184 .
[7]- Zuzcak I., Homeomorphism and continuity of *r-espaces*, *Math Slova*, 34, N°4 (1984), pp. 345- 354. □