Sciences & Technologie – N°13, Juin (2000), pp. 15-17.

RESOLUBILITE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS LIPSCHTZIENS

Soumis le 31/01/2000 – Accepté le 17/05/2000

Résumé

Nous montrons la résolubilité locale d'opérateurs différentiels linéaire du premier ordre à deux variables et à coefficients Lipschitziens, vérifiant la condition (P) de Trèves-Nirenberg, en modifiant légèrement la technique utilisée pour le même but par Hounie J. [3].

Mots Clés : *Résolubilité locale, Opérateurs différentiels.*

Abstract

We prove local solvability of first order linear differential operators in two variables with Lipschitz coefficients, satisfying the Trèves-Nirenberg condition (P), by slightly modifying the proof of Hounie J. [3].

Keyswords **:** *Local solvability, differential operators.*

Classification AMS: 35A.

C. BOUZAR
F. OUYEKENE
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Université d'Oran (Algérie)

الملخص

نبرهن على وجود حلول محليا للمؤثرات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى ذات متغيرين بمعاملات ليبتشيزية، التي تحقق الشرط (P) Nirenberg-Trèves بإدخال تعديل طفيف على برهان Hounie [3] في نفس الإطار.

الكلمات المفتاحية: *للمؤثرات التفاضلية، الحلول المحلية*

Nirenberg et Trèves [5] ont donné une condition, appelée condition ($\mathcal{P}$), équivalente à la résolubilité locale de tout opérateur différentiel linéaire du premier ordre à coefficients réguliers. Trèves [6], avec la même condition, obtint la résolubilité locale dans l'espace L^2. Si on considère un opérateur différentiel M dans R^2, alors il s'écrit, après un changement de variable local :

$$M = \frac{\partial}{\partial t} - ib(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + a(t,x), \quad i^2 = -1 \qquad (1)$$

où b est une fonction à valeurs réelles. Dans ce cas, la condition ($\mathcal{P}$) signifie que la fonction b a un signe constant. Hounie [3] a considéré l'opérateur différentiel M dans le voisinage $]-1,+1[\times R$ de l'origine de R^2 avec a une fonction mesurable bornée et b une fonction positive, continue et Lipschitzienne en x i.e. vérifiant :

$$\exists k > 0, \forall (t,x),(t,y) \in]-1,+1[\times R, \quad |b(t,x) - b(t,y)| \le k|x-y| \qquad (2)$$

Il obtint alors un théorème de résolubilité locale dans l'espace L^2 pour l'opérateur M. Nous allons prouver le même résultat pour l'opérateur M. La différence se situe dans une légère modification de la méthode. D'abord, on prouve une estimation à priori à partir de laquelle on obtiendra le résultat de résolubilité. Jacobowitz [4] a montré que la régularité de la fonction b est optimale en exhibant une fonction b continue Höldérienne telle que l'opérateur M associé ne pourrait être résoluble. Ceci montre la limite de la suffisance de la condition ($\mathcal{P}$) quant à la régularité des coefficients. Nous avons montré [1] la nécessité de la condition ($\mathcal{P}$) directement en suivant la méthode de Grushin.

ESTIMATION A PRIORI

Soit dans R^2 l'opérateur différentiel:

$$M = \frac{\partial}{\partial t} - ib(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + a(t,x), \quad i^2 = -1,$$

où a est une fonction mesurable bornée et b une fonction positive, continue et Lipschitzienne en x i.e. vérifiant (2). On sait alors que b admet une dérivée partielle $\frac{\partial b}{\partial x}$ presque partout dans $]-1,+1[\times R$ qui vérifie:

$$\|b_x\|_{L^\infty} = \sup_{(t,x)\in]-1,+1[\times R} \left|\frac{\partial b}{\partial x}(t,x)\right| \le k \qquad (3)$$

Théorème 1. *Il existe une constante $c > 0$ et un voisinage ω de l'origine de R^2, tels que :*

$$\|u\| \le c\|Mu\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(\omega) \qquad (4)$$

Preuve. On désigne par $\|.\|$ et $(.,.)$ la norme et le produit scalaire de l'espace L^2. On suppose que la fonction u s'annule pour $\tau|t| > 1$, où τ sera précisé ultérieurement. Soit $\omega = \{(t,x), \quad \tau|t| < 1, \ x \in R\}$. Considérons dans $L^2(R)$ l'opérateur P^+ défini par :

$$P^+u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)d\xi$$

L'opérateur P^+ est un projecteur orthogonal dans $L^2(R)$ du fait que:

1. L'opérateur P^+ est un opérateur borné de $L^2(R)$ dans $L^2(R)$. En fait, l'opérateur P^+ est un opérateur pseudodifférentiel à symbole la fonction d'Heaviside $H(\xi)$.
2. On a $(P^+u,v) = (u,P^+v)$; en effet :

$$\begin{aligned}(P^+u,v) &= \int P^+u(x)\overline{v(x)}dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi)\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi \\ &= \int u(x)\overline{\left(\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{v(\xi)d\xi}\right)}dx \\ &= (u,P^+v)\end{aligned}$$

3. Et $(P^+)^2 = P^+$ (Facile à vérifier).

Posons $P^- = I - P^+$, donc P^- est aussi un projecteur orthogonal dans $L^2(R)$ et alors :

$$\|P^+u\|^2 + \|P^-u\|^2 = \|u\|^2, \quad \forall u \in L^2(R).$$

Remarquons que :

$$P^-u(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)d\xi$$

Démontrons l'inégalité (2.1) pour $v = P^+u$ et $w = P^-u$. On définit le sous-espace $\mathcal{S}^+$ (resp. $\mathcal{S}^-$) de l'espace de Schwarz $\mathcal{S}$ par $\{u \in \mathcal{S} : supp\hat{u} \subset R_+\}$(resp. $\{u \in \mathcal{S} : supp\hat{u} \subset R_-\}$). Nous avons le lemme suivant qui donne une certaine inégalité de Garding [3].

Lemme. *Il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$Re\int b(x)D(x)\overline{u(x)}dx \ge -c\|b'\|_\infty\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{S}^+.$$

Ce lemme est valable pour $b \le 0$ et $u \in \mathcal{S}$. On a:

$$\begin{aligned}2\,Re\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}Mv\bar{v}\,dx\,dt &= r\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}|v|^2dx\,dt \\ &+ 2\,Re\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}b(t,x)D_x v\bar{v}\,dx\,dt \\ &+ 2\,Re\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}a(t,x)|v|^2dx\,dt\end{aligned}$$

D'après le lemme :

$$2\,Re\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}bt,xD_x v\bar{v}\,dx\,dt \ge -2ec\|b_x'\|_{L^\infty}\|v\|^2.$$

En effet :

$$\mathrm{Re}\int b(t,x)D_x v\bar{v}\,dx \ge -c\sup_{x\in R}|b_x'(t,x)|\int|v(t,x)|^2dx$$

$$2\,\mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} e^{-\tau t}\int b(t,x)D_x v\bar{v}\,dx\,dt \ge -$$

$$2ce\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(\sup_{x\in R}|b_x'(t,x)|\int|v(t,x)|^2dx\right)dt \ge -2ce\|b_x'\|_{L^\infty}\|v\|^2$$

On a aussi :

$$2\,\mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}a(t,x)|v|^2dx\,dt \ge -2\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}|a(t,x)||v|^2dx\,dt$$

$$\ge -2e\|a\|_{L^\infty}\|v\|^2.$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}Mv\bar{v}\,dx\,dt &\ge \\ \tau\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}|v|^2dx\,dt &- 2e\left(c\|b_x'\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)\|v\|^2 \\ &\ge \left(\tau e^{-1} - 2(c+1)e\left(\|b_x'\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)\right)\|v\|^2\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$2\,Re\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}Mv\bar{v}\,dx\,dt \le 2e\|Mv\|\,\|v\|,$$

d'où :

$$2e\|Mv\| \ge \left(\tau e^{-1} - 2(c+1)e\left(\|b_x'\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)\right)\|v\|, \quad \forall v \in \mathcal{S}^+ \quad (5)$$

Pour $w = P^-u \in \mathcal{S}$, on considère l'intégrale :

$$2\,Re\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\int e^{-\tau t}Mw\bar{w}\,dx\,dt$$

et on obtient l'estimation :

$$2e\|Mw\| \ge \left(\tau e^{-1} - 2(c+1)e\left(\|b_x'\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)\right)\|w\|, \quad \forall w \in \mathcal{S} \quad (6)$$

On choisit $\tau > 2e^2(c+1)\left(\|b_x'\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)$, et en faisant la somme des carrés de (5) et (6), on a alors :

$$4e^2\left(\|Mv\|^2 + \|Mw\|^2\right) \ge \left(\tau e^{-1} - 2e(c+1)\left(\|b_x'\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)\right)^2\|u\|^2 \quad (7)$$

D'autre part :

$$Mv = MP^+u = P^+Mu - \left[bD_x, P^+\right]u - \left[P^+, a\right]u$$
$$Mw = MP^-u = P^-Mu - \left[bD_x, P^-\right]u - \left[P^-, a\right]u$$

P^+ et P^- sont des opérateurs pseudodifférentiels classiques d'ordre 0, alors, grâce au théorème de Calderòn [2], $\left[bD_x, P^+\right], \left[bD_x, P^-\right]$ sont bornés dans L^2, de norme $\le c\|b_x'\|_{L^\infty}$, et puisque P^+ et P^- sont des projecteurs dans L^2, alors $\|P^+\| \le 1, \|P^-\| \le 1$, et alors :

$$\left\|\left[P^+, a\right]u\right\| \le 2\|a\|_{L^\infty}\|u\|$$
$$\left\|\left[P^-, C\right]u\right\| \le 2\|a\|_{L^\infty}\|u\|$$

En effet :

$$\left\|\left[P^+, a\right]u\right\| = \left\|P^+(au) - a\left(P^+u\right)\right\| \le \left\|P^+(au)\right\| + \left\|a\left(P^+u\right)\right\|$$

$$\leq \|au\| + \|a\|_{L^\infty}\|P^+u\|$$
$$\leq 2\|a\|_{L^\infty}\|u\|$$

Et donc :

$$\|Mv\|^2 \leq 2\left(\|P^+Mu\|^2 + \left(2\|a\|_{L^\infty} + c\|b'_x\|_{L^\infty}\right)^2\|u\|^2\right)$$
$$\leq 2\left(\|P^+Mu\|^2 + c'^2\left(\|a\|_{L^\infty} + \|b'_x\|_{L^\infty}\right)^2\|u\|^2\right)$$
$$\|Mw\|^2 \leq 2\left(\|P^-Mu\|^2 + \left(2\|a\|_{L^\infty} + c\|b'_x\|_{L^\infty}\right)^2\|u\|^2\right)$$
$$\leq 2\left(\|P^-Mu\|^2 + c''^2\left(\|a\|_{L^\infty} + \|b'_x\|_{L^\infty}\right)^2\|u\|^2\right)$$

Et par suite :

$$\|Mv\|^2 + \|Mw\|^2 \leq 2\left(\|P^+Mu\|^2 + \|P^-Mu\|^2 + \left(c'^2 + c''^2\right)\left(\|a\|_{L^\infty} + \|b'_x\|_{L^\infty}\right)^2\|u\|^2\right)$$
$$\leq 2\left(\|Mu\|^2 + c'''^2\left(\|b'_x\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)^2\|u\|^2\right).$$

Cette dernière et (7) donnent :

$$8e^2\left(\|Mu\|^2 + c'''^2\left(\|b'_x\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)^2\|u\|^2\right) \geq$$
$$\left(\tau e^{-1} - 2e(c+1)\left(\|b'_x\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)\right)^2\|u\|^2$$

En posant $\alpha = \sqrt{8ec'''}\left(\|b'_x\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)$ et $\beta = 2e(c+1)\left(\|b'_x\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right)$, on a :

$$8e^2\|Mu\|^2 \geq \left((\tau-\beta)^2 - \alpha^2\right)\|u\|^2$$

Si on choisit :

$$\tau > 2e(c+1)\left(\|b'_x\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\right) + \alpha,$$

alors $(\tau-\beta)^2 - \alpha^2 > 0$, et donc :

$$\frac{8}{\left((\tau-\beta)^2 - \alpha^2\right)}\|Mu\|^2 \geq \|u\|^2,$$

d'où $\|u\| \leq k\|Mu\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(\omega)$.

EXISTENCE DE SOLUTIONS

Soit M^* l'adjoint formel dans L^2 de l'opérateur M; il est donné par:

$$M^* = -\frac{\partial}{\partial t} - ib\frac{\partial}{\partial x} + \bar{a}(t,x)$$

Il est du même type que M, alors il vérifie la même estimation à priori (4), i.e. il existe une concentration $k' > 0$ et ω un voisinage de l'origine de R^2 tels que :

$$\|u\| \leq k'\|M^*u\|, \quad \forall u \in C_0^\infty \qquad (8)$$

Théorème 2. *Il existe* ω *de l'origine dans* R^2, *tel que pour tout* $f \in L^2(\omega)$, *il existe un* $u \in L^2(\omega)$, *vérifiant :*

$$Mu(t,x) = f(t,x), \quad dans\ \omega.$$

Preuve. D'après le théorème 1, il existe $c > 0$ tel que $\|u\| \leq \|M^*u\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(\omega)$. Posons :

$$E = \{M^*\varphi : \varphi \in C_0^\infty(\omega)\}$$

E est un sous-espace de $L^2(\omega)$; on définit alors l'application :

$$l : E \rightarrow C$$
$$M^*\varphi \mapsto (f,\varphi)$$

On a, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|l(M^*\varphi)| = |(f,\varphi)| \leq \|f\|.\|\varphi\|,$$

et puisque $f \in L^2(\omega)$, alors:

$$|l(M^*\varphi)| \leq c\|\varphi\|.$$

L'inégalité (8) donne :

$$|l(M^*\varphi)| \leq c\|M^*\varphi\|,$$

i.e. l est une forme linéaire continue sur E muni de la topologie induite par $L^2(\omega)$, et d'après le théorème de Hahn-Banach, l'application l se prolonge en une application linéaire continue L sur $L^2(\omega)$, donc il existe, grâce au théorème de Riesz, $u \in L^2(\omega)$ tel que $\mathrm{L}(\omega) = (u,\psi)$, pour tout $\psi \in L^2(\omega)$, en particulier pour tout $\psi \in E$:

$$\mathrm{L}(\psi) = \mathrm{L}(M^*\varphi) = l(M^*\varphi)$$

i.e.

$$(u, M^*\varphi) = (f,\varphi)$$

d'où :

$$(Mu,\varphi) = (f,\varphi), \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\omega),$$

ce qui donne $Mu = f$ dans ω au sens des distributions.

REFERENCES

[1]- Bouzar C., Ouyekène F., Construction de Grushin pour des opérateurs de type Mizohata, *Les Annales de l'Académie Universitaire de Constantine*, T.1 (1999), pp.13-16.

[2]- Calderòn A.P., Commutateur of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci.,* 53 (1965), pp. 1092-1099.

[3]- Hounie J. Local solvability of first order linear operators with Lipschitz coefficients, *Duke Math. J.,* vol.62, N°2 (1991), pp. 467-477.

[4]- Jacobowitz H., A non solvable complex vector field with Hölder coefficients, *Proc. Of Amer. Math. Soc.,* Vol.116, N°3 (1992), pp. 787-795.

[5]- Nirenberg L., Trèves F., Solvability of a first order linear partial differential equation, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, vol.16 (1963), pp. 331-351.

[6]- Trèves F., Local solvability in L^2 of first order linear P.D.E.S., *Amer. J. Math.,* 90, (1971), pp. 369-380. □