Sciences & Technologie – N°14, Décembre (2000), pp. 11-14.

THEOREME DE POINT FIXE: APPLICATION A L'EXISTENCE DE L'EQUILIBRE POUR LES MODELES DYNAMIQUES

Reçu le 18/04/1999 – Accepté le 02/10/2000

Résumé

Dans leur article, Idzik et Simonsen [5] ont démontré l'existence de l'équilibre avec production pour le modèle Arrow-Debreu avec une infinité dénombrable de périodes (appelé modèle dynamique). Les préférences des consommateurs sont représentées par des fonctions d'utilité présentant des externalités (1). Leur approche est basée sur la théorie du jeu [1], [2], [3], [4], [6],...

Dans cet article, on étend le résultat [5] à des préférences intransitives (correspondance de préférences) avec externalités. Nous donnons une démonstration rapide basée sur le théorème de point fixe de Gale et Mas-Collel [4].

***Mots clés**: Modèle Arrow-Debreu non durable - Modèle Arrow-Debreu durable - Quasi-équilibre - Equilibre.*

Abstract

In their publication, Idzik and Semonsen [5] have prooved the existence of equilibrium production for the Arrow-Debreu model with an infinite countably periods (called dynamic model). The consumer preferences are represented by utility functions where exhibit externalities. Their approach is based on the game theory [1], [2], [3], [4], [6],...

In this paper, we extend the result [5] to the intransitive preferences (correspondence of preferences) with externalities. We gave a rapid proof based on fixed point theorem of Gale and Mas-Collel [4].

***Key words**: Non durable model of Arrow-Debreu - durable model of Arrow-Debreu - Quasi-equilibrium - equilibrium.*

Classification: AMS 1991, C62, D51.

M. DEGHDAK
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mentouri
25000 Constantine (Algérie)

ملخص

برهن Idzik و Simonsen [5] عن وجود توازن الإنتاج بالنسبة لنموذج Arrow-Debreu مع عدد غير منتهي (قابل للعد) من الدورات (يُسمى النموذج الديناميكي). اختيارات المستهلكين ممثلة بدلالة منفعة تتعلق بعوامل خارجية. اعتمد [5] على نظرية اللعبة [1], [2], [3], [4], [5], [6]...

في هذا المقال نعمم [5] إلى اختيارات غير متعدية تتعلق بعوامل خارجية و نعطي برهانا مبسطا يعتمد على نظرية النقطة الثابتة لـ Gale و Mas-Collel [4].

***الكلمات المفتاحية**: نموذج Arrow-Debreu غير دائم - نموذج Arrow-Debreu دائم - شبه التوازن - توازن.*

I- LE MODELE

Comme dans [5], pour simplifier, on considère dans notre modèle un seul consommateur et un seul producteur. La généralisation à un nombre fini de consommateurs et de producteurs ne pose aucune difficulté. Définissons le modèle considéré dans cet article.

Soit $T = \{0,1,...,t,...\}$ l'ensemble des dates.

$\forall t \in T$, le consommateur a un ensemble de consommation $X_t \subset R^l$.

$\forall t \in T$, le producteur a un ensemble de production $Y_t \subset R^l$.

Pour chaque période $t \in T$, les préférences du consommateur sont représentées par une correspondance de préférence $P_t : Z \to X_t$ où:

$$Z = \prod_{t\in T} X_t \times \prod_{t\in T} Y_t \times \prod_{t\in T} P^t \text{ avec } P^t = P^1 = \left\{ p \in R^l : \sum_{i=1}^{l} p_i, \quad p_i \geq 0 \right\}.$$

$\forall t \in T$, $\forall (x,y,p) \in Z$, $P_t(x,y,p)$ est interprété comme l'ensemble des éléments préférés à x_t par le consommateur lorsque ses consommations $x_{t'} \in \prod_{t \neq t'} X_t$, la production y et le prix p sont fixés.

Pour tout $t \in T$, désignons respectivement par $\alpha_t : Z \to \mathbb{R}$ et par $v_t : Z \to \mathbb{R}$ la fonction revenu du consommateur à la période t et la fonction valeur de production du producteur à la période t.

(1) La fonction d'utilité du consommateur dépend des consommations des autres consommateurs, de la production et du prix du marché.

$\forall t \in T$, $\forall(x,y,z) \in Z$, $v_t(x,y,z)$ mesure la valeur de la production y_t du producteur à la période t lorsque la consommation x, la production $y_t \in \prod_{t \neq t'} Y_t$ et le prix p sont fixés. Enfin, si , $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_l) \in R^l$ et $m = (m_1,...,m_l) \in R^l$, on notera par $\lambda \circ m = (\lambda_1 m_1,...,\lambda_l m_l) \in R^l$ et par $\lambda \cdot m$ le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Soit $\mu_t \circ y_t$ et $\vartheta_t \circ x_t$ respectivement la quantité de la production mise à la disposition du marché par le producteur à la période t ($\mu_t^i > 0,\ i = 1,...,l$) et la quantité de consommation achetée par le consommateur à la période t ($\vartheta_t^i > 0,\ i = 1,...,l$). On suppose que $\mu = (\mu_t)_{t \in T}$ et $\vartheta = (\vartheta_t)_{t \in T}$ sont fixés dans le modèle.

Le modèle Arrow-Debreu avec une infinité dénombrable de périodes s'écrit alors:

$$\mathcal{E} = (X_t, P_t, \alpha_t, Y_t, v_t)_{t \in T} .$$

Selon [5], on dit que le modèle $\mathcal{E}$ est non durable si l'on a l'inéquation suivante:

$$\sum_{r=0}^{t} \alpha(x,y,p) - \sum_{r=0}^{t-1} p_r(\vartheta_r \circ x_r) \le p_t(\mu_t \circ y_t). \qquad (1)$$

Cette inéquation signifie que la richesse du consommateur (son stock monétaire) à la période t ne dépasse pas la valeur de la production mise à la disposition du marché à cette période t.

Le modèle $\mathcal{E}$ est dit durable si l'on a l'inéquation:

$$\sum_{r=0}^{t} \alpha_r(x,y,p) - \sum_{r=0}^{t-1} p_r(\vartheta_r \circ x_r) \le p_t\left(\sum_{r=0}^{t} \mu_r \circ y_r - \sum_{r=0}^{t-1} \vartheta_r \circ x_r \right) \qquad (2)$$

L'inéquation (2) signifie que la richesse du consommateur n'excède pas la valeur (en termes de prix p_t) de la production à la période t, produite durant la période 0 et t.

II- QUASI-EQUILIBRE ET EQUILIBRE

On appelle quasi-équilibre pour le modèle non durable $\mathcal{E}$ tout élément $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in Z$ vérifiant les conditions suivantes:

a) $\forall t \in T,\ \mu_t \circ \bar{y}_t \ge \vartheta_t \circ \bar{x}_t$;

b) $\forall\ t \in T,\ v_t\left(\bar{x}, y_t, \bar{y}'_{t'}, \bar{p}\right) \le v_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ où $\bar{y}'_{t'} \in \prod_{t \neq t'} Y_{t'}$;

c) $\forall t \in T,\ \bar{x}_t \in \gamma_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ et $P_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) \cap \delta_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) = \varnothing$

où:

$$\delta_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) = \left\{ z_t \in X_t : \bar{p}_t(\vartheta_t \circ z_t) < \sum_{r=0}^{t} \alpha_r(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) - \sum_{r=0}^{t-1} \bar{p}_r(\vartheta_r \circ \bar{x}_r) \right\}.$$

et:

$$\gamma_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) = \{ z_t \in X_t : \bar{p}_t(\vartheta_t \circ z_t) \le \sum_{r=0}^{t} \alpha_r(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) - \sum_{r=0}^{t-1} \bar{p}_r(\vartheta_r \circ \bar{x}_r).$$

On appelle équilibre pour le modèle $\mathcal{E}$, tout élément vérifiant les conditions a), b) ci-dessus et la condition c') suivante:

c') $\forall t \in T, \bar{x}_t \in \gamma_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ et $P_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) \cap \delta_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) = \varnothing$

La condition a) signifie que pour chaque période t, l'offre est supérieure ou égale à la demande.

La condition b) signifie que pour toute période t, le producteur optimise (dans son ensemble de production Y_t) sa fonction valeur de production v_t .

La condition c) est une condition de maximisation pour toute période t des préférences P_t du consommateur sous sa contrainte budgétaire γ_t et la richesse du consommateur à la période t définie par:

$$\sum_{r=0}^{t} \alpha_r(x,y,p) - \sum_{r=0}^{t-1} p_r(\vartheta_r \circ x_r)$$

On appelle quasi-équilibre pour le modèle durable $\mathcal{E}$ tout élément $(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) \in Z$ vérifiant les conditions b), c) ci-dessus et la condition a') suivante:

a') $\sum_{r=0}^{t} \vartheta_r \circ \bar{x}_r - \sum_{r=0}^{t} \mu_r \circ \bar{y}_r$.

La condition a') signifie que la demande à la période t n'excède pas l'offre à cette période t.

III- EXISTENCE DU QUASI-EQUILIBRE POUR LE MODELE NON DURABLE

Pour démontrer l'existence du quasi-équilibre pour le modèle non durable $\mathcal{E}$, on fait (sur $\mathcal{E}$) les hypothèses suivantes:

A.1. $\forall t \in T,\ X_t$ est un sous-ensemble convexe compact de R^l ;

A.2. $\forall t \in T,\quad \forall(x,y,p) \in Z,\ \gamma_t(x,y,p) \neq \varnothing$**;**

A.3. $\forall t \in T,\ \forall(x,y,p) \in Z$ **,** $x_t \notin CoP_t(x,y,p)$ où Co est l'enveloppe convexe de $P_t(x,y,p)$;

A.4. $\forall t \in T,\ P_t$ a ses sections inférieures ouvertes:

$\forall y \in X_t,\ P_t^{-1}(y) = \{z \in Z : y \in P_t(z)\}$ (par définition);

A.5. $\forall t \in T,\ \alpha_t$ est une fonction continue;

A.6. $\forall t \in T,\ Y_t$ est un sous-ensemble convexe et compact de R^l ;

A.7. $\forall t \in T,\ v_t$ est une fonction continue et concave par rapport à y_t .

Les hypothèses A.1, A.2, A.5, A.6 et A.7 sont empruntées à [5]. A l'exception des hypothèses A.1 et A.6 (hypothèses fortes), les hypothèses A.2, A.5 et A.7 sont standards.

L'hypothèse A.3 est plus faible que l'irréflexivité ($x_t \notin P_t(x,y,p)$).

L'hypothèse A.4 est une hypothèse de continuité des préférences P_t .

Rappelons maintenant le théorème de Gale et Mas-Collel généralisé dans Florenzano [4] sur lequel s'appuie l'existence de l'équilibre pour le modèle $\mathcal{E}$:

Théorème III.1: *Soit* $X=\prod_{i\in I} X^i$ *le produit d'un nombre fini ou dénombrable de sous-ensembles* X^i*, convexes et compacts d'un espace euclidien de dimension finie. Soit pour tout* $i\in I$, $\varphi^i : X\to X^i$ *une correspondance (l'ensemble de ses valeurs est éventuellement vide) à valeurs convexes et semi-continue inférieurement (sci). Alors:*

$$\exists \bar{x}\in X \text{ tel que } \forall i\in I,\ \bar{x}^i\in\varphi^i(\bar{x}) \quad \text{ou} \quad \varphi^i(\bar{x})=\varnothing .$$

Théorème III.2: *Sous les hypothèses A.1, ..., A.7,* $\mathcal{E}$ *admet un quasi-équilibre.*

Démonstration:
Pour tout $t\in T$, considérons les correspondances $\varphi_t^{(0)},\varphi_t^{(1)},\varphi_t^{(2)}$, définies par:

$$\varphi_t^{(0)} : Z\to P^1$$
$$(x,y,p)\to\varphi_t^{(0)}(x,y,p)= \left\{q_t\in P^1 : (q_t-p_t)(\vartheta_t\circ x_t-\mu_t\circ y_t)>0\right\};$$

$$\varphi_t^{(1)} : Z\to Y_t$$
$$(x,y,p)\to\ \varphi_t^{(1)}(x,y,p)=\left\{z_t\in Y_t : v_t(x,z_t,z'_{t'},p)>v_t(x,y,p)\right\}$$
$$\text{où } z'_{t'}\in\prod_{t'\neq t} Y_t .$$

$$\varphi_t^{(2)} : Z\to X_t$$

$$(x,y,p)\to\varphi_t^{(2)}(x,y,p)=\begin{cases}\delta_t(x,y,p) & ,x_t\notin\gamma_t(x,y,p);\\ \delta_t(x,y,p)\cap CoP_t(x,y,p) & ,x_t\in\gamma_t(x,y,p).\end{cases}$$

Vérifions que ces correspondances satisfassent aux conditions du théorème III.1.

$\forall t\in T$, il est facile de voir que les correspondances $\varphi_t^{(0)},\varphi_t^{(1)},\varphi_t^{(2)}$ sont irréflexives et à valeurs convexes.

$\forall t\in T$, $\varphi_t^{(0)}$ est sci (car elle est à graphe ouvert par continuité du produit scalaire).

$\forall t\in T$, $\varphi_t^{(1)}$ est sci (car elle est à graphe ouvert d'après A.7).

Enfin, $\forall t\in T,\varphi_t^{(2)}$ est sci (d'après la scs γ_t et de la sci de δ_t). D'où il existe $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\in Z$ tel que :

$$\varphi_t^{(0)}(\bar{x},\bar{y},\bar{p})=\varnothing ,\quad \varphi_t^{(1)}(\bar{x},\bar{y},\bar{p})=\varnothing ,\quad \varphi_t^{(2)}(\bar{x},\bar{y},\bar{p})=\varnothing$$

c'est-à-dire:

$$\forall q_t\in P^1 : (q_t-\bar{p}_t)(\vartheta_t\circ\bar{x}_t-\mu_t\circ\bar{y}_t)\le 0 \qquad (3)$$

$$\forall z_t\in Y_t : v_t(\bar{x},z_t,z'_{t'},\bar{p})\le v_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}),\quad z'_{t'}\in\prod_{t'\neq t} Y_t ;$$

avec:

$$\forall t\in T,\bar{x}_t\in\gamma_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) \text{ et } P_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\cap\delta_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})=\varnothing .$$

On voit donc que les conditions a) et b) dans II sont vérifiées. Il reste à montrer la condition a) de II, i.e, $\forall t\in T,\mu_t\circ\bar{y}_t\ge\vartheta_t\circ\bar{x}_t$. Puisque le modèle $\mathcal{E}$ est non durable et $\forall t\in T,\bar{x}_t\in\gamma_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$, on en déduit de (3) la relation suivante:

$$\forall q_t\in P^l : q_t(\vartheta_t\circ\bar{x}_t-\mu_t\circ\bar{y}_t)\le 0$$

Cette dernière relation signifie que $\vartheta_t\circ\bar{x}_t-\mu_t\circ\bar{y}_t$ appartient au polaire de R_+^l et donc $\le\vartheta_t\circ\bar{x}_t-\mu_t\circ\bar{y}_t\,0$. ■

IV- EXISTENCE DU QUASI-EQUILIBRE POUR LE MODELE DURABLE

Théorème IV.1: *Sous les hypothèses du théorème III.2, le modèle durable* $\mathcal{E}$ *admet un quasi-équilibre.*

Démonstration:
La démonstration est presque la même que celle du théorème III.2; il suffit de remplacer $\varphi_t^{(0)}$ par $\varphi'_t : Z\to P^l$ définie par:

$$(x,y,p)\to\varphi'_t(x,y,p)= \left\{q_t\in P^l : (q_t-p_t)\left(\sum_{r=0}^{t}\vartheta_r\circ x_r-\sum_{r=0}^{t}\mu_r\circ y_r\right)>0\right\}. \quad ■$$

V- PASSAGE DU QUASI-EQUILIBRE A L'EQUILIBRE

Pour passer du quasi-équilibre à l'équilibre dans les théorèmes III.2 et IV.1, on fait les hypothèses supplémentaires suivantes:

A.8. $\forall t\in T,\forall(x,y,p)\in Z,\ P_t(x,y,p)$ est ouvert dans X_t et convexe;

A. 9. $\forall t\in T,\forall(x,y,p)\in Z,\ \delta_t(x,y,p)\neq\varnothing$.

L'hypothèse A.8 est une hypothèse standard pour passer du quasi-équilibre à l'équilibre.

Théorème V.1: *Sous les hypothèses postulées dans les théorèmes III.2 et IV.1 et les hypothèses A.8 et A.9, le modèle durable et non durable* $\mathcal{E}$ *admet un équilibre.*

Démonstration:
Soit $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ le quasi-équilibre obtenu dans les théorèmes III.2 et IV.1. Si $z_t\in\gamma_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\cap P_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$, on a:

$$x'_t\in\delta_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\Rightarrow\alpha x'_t+(1-\alpha)z_t\in\delta_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p}),\quad\forall 0<\alpha\le 1.$$

D'après A.8, on a: $\alpha x'_t+(1-\alpha)z_t\in\delta_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\cap P_t(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$, ce qui contredit la définition de $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$. ■

Remarque:

Par troncature du modèle $\mathcal{E}$ [2] (voir, [3], [4]), on peut supposer dans les théorèmes III.2 et IV.1, que X_t et Y_t sont convexes et fermés et les ensembles réalisables $\widetilde{X}_t$ et $\widetilde{Y}_t$ du consommateur et du producteur sont compacts:

$$\widetilde{X}_t = \{x_t \in X_t : \vartheta_t \circ x_t - \mu_t \circ y_t \le 0, \quad \forall y_t \in Y_t\};$$
$$\widetilde{Y}_t = \{y_t \in Y_t : \vartheta_t \circ x_t - \mu_t \circ y_t \le 0, \quad \forall x_t \in X_t\}.$$

REFERENCES

[1]- Arrow K.J and Debreu G., "Existence of an equilibrium for a competitive economy", *Econometrica*, 22, (1954), pp. 265-290.

[2]- Flam, S.D., "Equilibria in noncooperative games and competitive economies", *Tamkang J. Math.*, 12, (1981), pp. 47-57.

[3]- Florenzano M., "Equilibre général transitif et intransitif "Problèmes d'existence"", Monographies du Séminaire d'Econométrie, Editions du CNRS, Paris, France, (1981).

[4]- Florenzano M., "Quasiequilibria in Abstract Economies. Application to the Overlapping Generations Model", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 182, (1994), pp. 616-636.

[5]- Idzik A. and Simonsen P.B., "Non-durable and durable economic process in a dynamic model of production and consumption", Ed. Academia publishing house of Czechoslovak Academy of Sciences (1988).

[6]- Makarov V.L. and Rubinov A.M., "Mathematical theory of economic dynamics and equilibria", Ed. Springer-Verlag, New York (1977). □

[2] C'est le modèle $\mathcal{E}'$ obtenu à partir de $\mathcal{E}$ en interceptant les ensembles de consommation et de production du modèle $\mathcal{E}$ par des ensembles compacts.