Sciences & Technologie – N°15, Juin (2001), pp. 13-15.

FACTORISATION DES ENTIERS VOISINS A CEUX D'UN SYSTEME D'ENTIERS INFINIMENT GRANDS ($N_1, N_2,\ldots, N_m$) OÙ m EST LIMITE

reçu le 30/06/1999 – Accepté le 07/01/2001

Résumé

Supposons que ($N_1, N_2,\ldots, N_m$) soit un système d'entiers infiniment grands avec m limité. Dans le cadre de l'Analyse Non standard, on démontre dans ce travail qu'il existe un autre système d'entiers ($N_1 - r_1, N_2 - r_2,\ldots, N_m - r_m$) tels que pour $1\leq i \leq m$: la composante $N_i - r_i$ est le produit de deux entiers infiniment grands m_i et n_i, de facteurs premiers deux à deux distinct. De plus, l'ordre de perturbation r_i est, en valeur absolue, assez petit devant m_i, n_i et devant un entier infiniment grand R choisi au préalable.

Mots clés *: Analyse non standard, factorisation, facteurs premiers.*

Abstract

Suppose that ($N_1, N_2,\ldots, N_m$) are m unlimited natural numbers and that m is limited. In this work and in the frame of the non standard analysis, we prove the existence of m integers ($N_1 - r_1, N_2 - r_2,\ldots, N_m - r_m$) such that for $1\leq i \leq m$, the component $N_i - r_i$ is equal to the product of two unlimited integers m_i and n_i, has an unlimited number of prime factors which are all distincts. Furthermore, the order of perturbation r_i is in absolute value, enough small ahead m_i, n_i and an unlimited integer R chosen beforehand arbitrarily.

Key words: non standard analysis, factorisation, prime factors.

1991 Mathematics Subject Classification: 11A51, 11B75.

A. BOUDAOUD
Département de Mathématiques
Centre Universitaire de M'Sila
Ichbilia 28000 M'Sila, Algérie

ملخص

نفرض أن ($N_1, N_2,\ldots, N_m$) جملة من أعداد طبيعية غير محدودة حيث m محدود. مستعملين نظرية التحليل الغير معياري نبرهن في هاته المقالة على أنه توجد جملة من أعداد طبيعية ($N_1-r_1, N_2- N_m-r_m$ ($r_2,\ldots,$ حيث من أجل $1 \leq i \leq m$ تكون المركبة N_i-r_i: جداء لعددين طبيعين m_i و n_i ، تحوي في تفكيكها عددا غير محدود من الأعداد الأولية المختلفة مثنى مثنى، زيادة على ذلك فإن مقدار اللاضطراب r_i بالقيمة المطلقة صغير جدا أمام m_i و n_i وأمام عدد طبيعي غير محدود R مختار مسبقا بصورة كيفية.

الكلمات المفتاحية: *تحليل الغير معياري، أعداد أولية.*

Le problème traité dans cet article est le suivant: étant donné un système d'entiers "grands" ($N_1, N_2,\ldots, N_m$) où m "n'est pas grand" et soit R un entier "grand" inférieur au $Min(N_1, N_2,\ldots, N_m)$. Existe-t-il un autre système d'entiers relatifs ($r_1, r_2,\ldots, r_m$) tel que pour $i = 1,2,\ldots,m$:

$$N_i - r_i = n_i . m_i \tag{1}$$

où n_i , m_i sont deux entiers "grands", r_i est "assez petit" devant R, n_i et m_i et le produit $n_i.m_i$ contient un nombre infiniment grand de facteurs premiers deux à deux distincts. La réponse à cette question signifie, en plus, que les $N_i - r_i$ sont "proches" comme nous le voulons des N_i car les perturbations r_i sont assez petites devant R qui est à son tour choisi arbitrairement inférieur au $Min(N_1, N_2,\ldots\ldots N_m)$. Dans la suite, on se placera dans le cadre de l'Analyse Non Standard car c'est dans celui-ci que l'on peut donner un sens aux mots entre guillemets ci-dessus mentionnés.

La réponse au problème posé nous fournit des connaissances supplémentaires sur la factorisation des entiers ($N_1 - r_1, N_2 - r_2,\ldots, N_m - r_m$) ($m \geq 1$) se trouvant voisins à ceux d'un système ($N_1, N_2,\ldots, N_m$). Dans la littérature de la théorie des nombres, on s'intéresse seulement au cas unidimensionnel (m =1) où on étudie, plutôt que la factorisation d'un entier N, des questions sur le nombre de facteurs premiers des entiers pris inférieurs ou égaux à x [1, 2, 4] et d'autres sujets qui sont en liaison avec le nombre de facteurs premiers [6] et on donne généralement des formules asymptotiques et des résultats concernant tous les entiers de l'intervalle $[1, x[$. De plus, l'introduction de la méthode non standard, malgré qu'elle puisse être utile dans ce genre de problèmes, n'est pas usitée. Ces remarques motivent le contenu de cet article, où, dans le paragraphe 2, on donne une réponse positive au problème posé.

1- RAPPEL ET NOTATIONS

Au cours de ce travail, nous nous somme placés dans la théorie I.S.T. (Internal Set Theory) proposée par E. Nelson [7] (pour plus de détails se rapporter à [5]). Les définitions et notations suivantes devraient suffire pour rendre compréhensible la mathématique non standard utilisée dans cet article. Dans la théorie I.S.T., les réels sont de deux types

1/ Ceux qui sont -en valeur absolue- supérieurs à tout nombre standard; on les appelle les infiniment grands.

2/ Ceux qui sont -en valeur absolue- inférieurs à un nombre standard; on les appelle les limités.

Les limités sont infiniment petits ou appréciables:

- un limité est un infiniment petit s'il est -en valeur absolue- inférieur à tout standard positif.
- Un limité est un appréciable s'il n'est pas infiniment petit.

Notations

1) un entier (resp. entier relatif) signifie un nombre naturel de N (resp. de Z).

2) soient n et q deux entiers tels que $1 \leq q \leq n$. On notera par $n!(q)$ l'entier $1.2.3\ldots(q-1).(q+1)\ldots(n-1).n$.

3) $\|x\|$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche.

4) Pour x réel limité, x^0 désigne le standard le plus proche de x.

5) $n \cong +\infty$ signifie que n est un entier infiniment grand.

Théorème 1.1 [3]: *Pour $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ un système de réels dont au moins un est irrationnel, il existe une infinité d'entiers q telle que :*

$$q^{1/m}.(\|q.\alpha_1\|,\|q.\alpha_2\|,\ldots,\|q.\alpha_m\|) < \frac{m}{m+1} \qquad (2)$$

2- RESULTAT PRINCIPAL

Théorème 2.1 : *Pour $(N_1, N_2,\ldots, N_m)$ un système d'entiers infiniment grands avec m standard et R un entier infiniment grand qui vérifie $R < Min\,(N_1, N_2,\ldots, N_m)$, il existe un m-uplet d'entiers relatifs $(r_1, r_2,\ldots, r_m) \in Z^m$ et des couples $(n_i, m_i)_{i=1,2\ldots,m}$ d'entiers infiniment grands tels que pour i = 1,2,…,m:*

$$\begin{cases} N_i - r_i = n_i.m_i \\ \dfrac{r_i}{n_i} \cong \dfrac{r_i}{m_i} \cong \dfrac{r_i}{R} \cong 0. \end{cases}$$

de plus, le produit $n_i.m_i$ contient un nombre infiniment grand de facteurs premiers deux à deux distincts.

Démonstration.

On a $\frac{t}{R} \cong 0$ pour tout entier standard t alors, d'après le principe de Robinson, il existe un entier infiniment grand γ tel que $\frac{\gamma}{R} \cong 0$. Prenons l'entier infiniment grand n qui vérifie:

$$n! < Min\left(\sqrt{Min(N_1,N_2,\ldots,N_m)},\gamma\right) \qquad (3)$$

De la division euclidienne des N_i par $n!$, on a pour $i = 1,2,\ldots, m$:

$$N_i = Q_i.n! + R_i \qquad (4)$$

où R_i est strictement inférieur à $n!$. De (3), on a $Q_i \geq n!$.

Posons, pour $i = 1,2,\ldots, m$: $A_i = \frac{R_i}{n!}$, alors $A_i \in [0,\ 1[$.

D'autre part, $A_i = A_i^0 + \phi_i$, avec ϕ_i infiniment petit, on distingue deux cas:

1^er^) cas: $(A_1^0, A_2^0,\ldots, A_m^0) = \left(\frac{s_1^1}{s_2^1}, \frac{s_1^2}{s_2^2},\ldots,\frac{s_1^m}{s_2^m}\right)$ où $\frac{s_1^i}{s_2^i}$ est un rationnel standard pour chaque *i.*

Dans ce cas:

$$\frac{R_i}{n!} = \frac{s_1^i}{s_2^i} + \phi_i$$

d'où : $R_i = s_1^i.n!(s_2^i) + n!.\phi_i$.

Alors pour $i = 1,2,\ldots, m$ et de (4) on a :

$$N_i = Q_i.n! + s_1^i.n!\left(s_2^i\right) + n!.\phi_i = n!\left(s_2^i\right).\left[Q_i.s_2^i + s_1^i\right] + n!.\phi_i$$

Posons $n_i = n!\left(s_2^i\right), m_i = Q_i.s_2^i + s_1^i$ et $r_i = n!.\phi_i$.

Alors : $\qquad N_i = n_i.m_i + r_i$.

n_i et m_i sont évidement des entiers infiniment grands. D'autre part:

$$\frac{r_i}{n_i} = \frac{n!.\phi_i}{n!\left(s_2^i\right)} = s_2^i.\phi_i \cong 0$$

car s_2^i est un standard. $\left|\frac{r_i}{m_i}\right| = \left|\frac{n!.\phi_i}{Q_i.s_2^i + s_1^i}\right| \leq \frac{n!.|\phi_i|}{Q_i}$ et comme $Q_i \geq n!$, on a $\frac{n!.|\phi_i|}{Q_i} \cong 0$,et par conséquent $\frac{r_i}{m_i} \cong 0$.

De plus $\left|\frac{r_i}{R}\right| = \left|\frac{n!.\phi_i}{R}\right|$, et du fait que $n! \leq \gamma < R$, on a: $\left|\frac{n!.\phi_i}{R}\right| < \frac{|n!.\phi_i|}{n!} \cong 0$. Ceci signifie que : $\frac{r_i}{R} \cong 0$.

Le produit $n_i.m_i$ contient un nombre infiniment grand de facteurs premiers deux à deux distincts car $n_i = n!(s_2^i)$ et $n \cong +\infty$.

Pour le cas où l'un des $\frac{s_1^i}{s_2^i}$ est nul, la conclusion du théorème découle en prenant $n_i = n!$, $m_i = Q_i$ et $r_i = n!.\phi_i$. Ceci termine la démonstration pour ce cas.

2^ème^) cas : L'un au moins des A_i^0 est irrationnel.

Dans ce cas, et d'après le théorème 1.1, et le principe du transfert, il existe une suite standard de *m-u*plets:

$$\left(\frac{p_{1,j}}{q_j}, \frac{p_{2,j}}{q_j},\ldots,\frac{p_{m,j}}{q_j}\right)_{j\in N} \qquad (5)$$

telle que pour $i = 1,2,\ldots, m$:

$$\begin{cases} A_i^0 = \dfrac{p_{i,j}}{q_j} + \phi_j^i \\ \left|\phi_j^i\right| < \dfrac{m}{m+1} \cdot \dfrac{1}{q_j . q_j^{1/m}} \end{cases} \quad (6)$$

D'où :

$$\left|\phi_j^i\right| < \frac{1}{q_j . q_j^{1/m}}. \quad (7)$$

On sait que $t.\underset{1\le i\le m}{MAX}\left|\phi_i\right| \cong 0$ pour tout entier standard t. En appliquant le lemme de Robinson, il existe un entier $w \cong +\infty$ tel que $t.\underset{1\le i\le m}{MAX}\left|\phi_i\right| \cong 0$ pour tout $t \le w$.

Prenons un m-uplet $\left(\dfrac{p_{1,\tilde{j}}}{q_{\tilde{j}}}, \dfrac{p_{2,\tilde{j}}}{q_{\tilde{j}}}, ..., \dfrac{p_{m,\tilde{j}}}{q_{\tilde{j}}}\right)$ comme approximant de $(A_1^0, A_2^0, ..., A_m^0)$ et tel que: $q_{\tilde{j}} \cong +\infty$, $q_{\tilde{j}} \le Min(w,n)$(ceci est possible dès le moment que la suite (5) des solutions est standard et $Min(w,n) \cong +\infty$). De (4), on a:

$$\begin{aligned} N_i &= Q_i.n! + R_i \\ &= Q_i.n! + n!.\left(A_i^0 + \phi_i\right) \\ &= Q_i.n! + n!\left(\frac{p_{i,\tilde{j}}}{q_{\tilde{j}}} + \phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right) \\ &= Q_i.n! + n!\left(q_{\tilde{j}}\right)p_{i,\tilde{j}} + n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right) \\ &= n!\left(q_{\tilde{j}}\right)\left[Q_i.q_{\tilde{j}} + p_{i,\tilde{j}}\right] + n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right) \end{aligned}$$

Posons $n_i = n!.\left(q_{\tilde{j}}\right), m_i = Q_i.q_{\tilde{j}} + p_{i,\tilde{j}}$ et $r_i = n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right)$. Alors: $N_i = n_i .m_i + r_i$ où n_i et m_i sont infiniment grands.

D'autre part: $\dfrac{r_i}{n_i} = \dfrac{n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right)}{n!\left(q_{\tilde{j}}\right)} = q_{\tilde{j}}.\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right)$

De (7) on a: $\left|q_{\tilde{j}}.\phi_{\tilde{j}}^i\right| < \dfrac{1}{q_{\tilde{j}}^{1/m}} \cong 0$

et comme $q_{\tilde{j}} \le Min(w,n)$ alors $q_{\tilde{j}}.\phi_i \cong 0$; par conséquent $q_{\tilde{j}}.\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right) \cong 0$, ainsi $\dfrac{r_i}{n_i} \cong 0$.

$$\left|\frac{r_i}{m_i}\right| = \left|\frac{n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right)}{Q_i.q_{\tilde{j}} + p_{i,\tilde{j}}}\right| < \frac{\left|n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right)\right|}{Q_i} \cong 0$$

car $Q_i \ge n!$ et $\phi_{\tilde{j}}^i \cong 0$. D'où: $\dfrac{r_i}{m_i} \cong 0$.

$\left|\dfrac{r_i}{R}\right| = \left|\dfrac{n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right)}{R}\right|$ et du fait que $n! < R$, on a :

$$\left|\frac{n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right)}{R}\right| < \frac{\left|n!\left(\phi_{\tilde{j}}^i + \phi_i\right)\right|}{n!} \cong 0.$$

D'où : $\dfrac{r_i}{R} \cong 0$.

Le produit $n_i .m_i$ contient un nombre infiniment grand de facteurs premiers deux à deux distincts car $n_i = n!(q_{\tilde{j}})$ et $n \cong +\infty$. Le cas où l'un des $\dfrac{p_{i,\tilde{j}}}{q_{\tilde{j}}}$ est nul, la conclusion du théorème découle en prenant, comme précédemment, $n_i = n!$, $m_i = Q_i$ et $r_i = n!.\phi_i$. Ceci termine la démonstration pour ce cas et ainsi celle du théorème. ■

REFERENCES

[1]- Balazard M., Delange H. et Nicolas J.L." Sur le nombre de facteurs premiers des entiers", C.R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, (1988), pp. 511-514,.

[2]- Balazard M., "Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier", Ann. Inst. Fourier, Grenoble 40, 2, (1990), pp. 255-270.

[3]- Cassels J.W.S., "An introduction to diophantine approximation", Cambridge at the University Press, (1957).

[4]- Hildebrand A. and Tenenbaum G., "On the number of prime factors of an integer", *Duke Mathematical Journal,* Vol. 56 N° 3.

[5]- Lutz R. and Goze M., "Non standard analysis: A practical guide with applications", Lecture note in Math. N°881, Springer Verlag, (1981).

[6]- Nicolas J.L. et Robin G., "Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de *N*", *Canad. Math. Bull.*, Vol. 26, 4, (1983).

[7]- Nelson E., "Internal set theory: A new approach to non stantard analysis", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83 (1977), pp. 1165-1198. □