Sciences & Technologie A – N°22, Décembre (2004), pp. 7-12

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE ET VARIETES SPECTRALES ASSOCIEES A UNE CLASSE D'EQUATIONS D'EVOLUTION A NON LINEARITE POLYNOMIALE

Reçu le 10/09/2004 – Accepté le 31/12/2004

Résumé

D'après [1], le comportement de la solution des équations de la forme $u_t + Au + f(u) = 0$ (A est un opérateur linéaire non borné, $f(u)$ est un opérateur non linéaire) est exactement de type exponentiel lorsque $t \to +\infty$.

L'objet de ce travail est de mieux caractérisé ce comportement en donnant un début de développement asymptotique de la solution lorsque $t \to +\infty$ et $f(u)$ est un polynôme, qui nous permet de construire, à partir de l'espace des données initiales, un ensemble de sous variétés analytiques emboîtées. Cette suite de sous variétés spectrales non linéaires déterminera complètement le comportement asymptotique de la solution.

Mots clés: *Equation à non linéarité polynomiale, comportement asymptotique, développement asymptotique, variétés spectrales non linéaires.*

Abstract

In the previous [1], the asymptotic behaviour of the solution of equation $u_t + Au + f(u) = 0$, (A is an unbounded operator and $f(u)$ is nonlinear operator) is exactly of the exponential type when $t \to +\infty$.

The aim of this work is to well characterize this behaviour, to give the first steps of an asymptotic expansion of the solution when $f(u)$ is a polynomial; which permits to construct in the space of initial data, a set of analytic manifolds. The sequence of spectral nonlinear manifolds will determine completely the asymptotic behavior of the solution.

Keywords: *Nonlinear evolution equation, asymptotic behavior, asymptotic expansion, spectral nonlinear manifold.*

M.Z. AISSAOUI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie
Université 8 Mai 45 Guelma
Guelma (Algérie)

ملخص

حسب [1]، فان سلوك حلول المعادلات من شكل $u_t + A(u) + f(u) = 0$، (A تطبيق خطي غير محدود و $f(u)$ تطبيق غير خطي) هي حلول آسية تماما عندما $t \to +\infty$.

إن الهدف من هذه الدراسة هو تحديد وبصفة مدققة سلوك حلول المعادلة المذكورة وذلك بإعطاء الخطوة الأولى من نشر مماسي عندما يكون $f(u)$ كثير حدود مما يسمح بإنشاء مجموعة من التشكيلات الجزئية التحليلية المتداخلة. هذه المتتالية من التشكيلات الجزئية الغير خطية تحدد تماما السلوك المماسي للحلول.

الكلمات المفتاحية: *المعدلات التطورية الغير خطية، السلوك المماسي، النشر المماسي، التشكيلات التحليلية الغير خطية.*

1- INTRODUCTION

Considérons le problème

$$\begin{cases} u_t + Au + f(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \qquad (1.1)$$

- A est un opérateur linéaire non borné de domaine $D(A)$;
- $f(u) = \sum_{n \geq 2}^{2p+1} a_n u^n$, $p \geq 1$, $a_{2p+1} > 0$, a_n assez régulier,

dans $\Omega \times \Re$ (Ω ouvert borné), associées à des conditions aux bords usuelles.

D'après [1], et pour $u \neq 0$, la solution $u(t)$ est exactement de type exponentiel, lorsque $t \to +\infty$ ce qui nous permet de mieux caractériser la décroissance de la solution et servira à la construction à partir de l'espace des données initiales d'un ensemble de sous variétés analytiques emboîtées. Cette suite de sous variétés spectrales non linéaires ainsi construite déterminera complètement le comportement asymptotique de la solution.

Remarque 1

Notre étude s'étend à certains problèmes de types (1.1) avec second membre telle que

$u_t + Au + f(u) = g(x)$

où $g(x)$ indépendante du temps, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} - \Delta\omega + 3u_\infty^2\omega + 3u_\infty\omega^2 + \omega^3 = 0 \quad \Omega\times\left]0,T\right[\\ \omega(0) = \omega_0 \quad \Omega; \quad \omega = 0 \quad \partial\Omega\times\left]0,T\right[\end{cases},$$

où $\omega = u - u_\infty$ avec u et u_∞ solution respectivement des équations

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u^3 = g(x) \quad \Omega\times\left]0,T\right[\\ u(0) = u_0 \quad \Omega; \quad u = 0 \quad \partial\Omega\times\left]0,T\right[\end{cases},$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u_\infty + u_\infty^3 = g \quad \Omega \\ u_\infty = 0 \quad \partial\Omega \end{cases},$$

Nous retrouvons alors le problème (1.1), avec :

$$\begin{cases} Au = -\Delta u + 3u_\infty^2 u \\ f(u) = 3u_\infty u^2 + u^3 \end{cases}.$$

2- NOTATIONS ET RAPPELS

Soient V et H deux Hilbert spectrales tels que :

$V \to H$ *avec injection compact*, (2.1)

V *est dense* H . (2.2)

Nous notons par $\|.\|$ et $|.|$ les normes correspondantes.

Soit A un opérateur non borné sur H de domaine

$D(A) = \{u \in V, Au \in H\}$. (2.3)

En munissant $D(A)$ de la norme de graphe, A est alors un isomorphisme de $D(A)$ dans H ; ainsi, il existe une suite de valeurs propres de A

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \tag{2.4}$$

distinctes de multiplicité finie.

En outre, si R_j désigne la projection orthogonale sur les espaces propres associées à λ_j, alors :

$$R_j R_k = 0 \;\; si \;\; i \neq j, \;\; R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots. = I \tag{2.5}$$

On note par

$$0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots. < \Lambda_j < \ldots., \tag{2.6}$$

La suite des valeurs propres de multiplicité m_k, et par $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe non linéaire défini par :

$$S(t): V \to V, \;\; u_0 \to S(t)u_0 \tag{2.7}$$

On considère aussi l'espace de Fréchet, noté $\Im_A$, contenant A :

$$\Im_A = R_1 H \oplus R_2 H \oplus \ldots\ldots, \tag{2.8}$$

dont la topologie est celle de la convergence des composantes.

On étend l'opérateur A et le semi-groupe linéaire $\left\{e^{-\Lambda t}\right\}_{t\geq 0}$ de manière évidente à $\Im_A$.

3- DEBUT DE DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

Considérons le problème décrit par les équations du système (1.1) avec $f(u)$ de type polynomial :

$$\begin{cases} u_t + Au + f(u) = 0 \\ f(u) = \displaystyle\sum_{n=2}^{2p+1} a_n u^n, \quad p \geq 1 \end{cases}, \tag{3.1}$$

avec a_n assez régulier et $a_{2p+1} > 0$.

Ainsi $f(u)$ s'écrit aussi :

$$f(u) = \sum_{n=2}^{2p+1} f_n(u), \quad avec \;\; f_n(u) = a_n u^n. \tag{3.2a}$$

Chaque f_n est un opérateur gradient homogène de degré n dont la fonctionnelle associée s'écrit :

$$F_n(u) = \frac{1}{(n+1)}(f_n(u), u). \tag{3.2b}$$

Nous remarquons que notre cadre abstrait développé dans [1] s'étend trivialement au cas $f(u)$ de type (3.1) ; en particulier :

Pour $n_0 = \min\{n, \; 2 \leq n \leq 2p+1; \; a_n \neq 0\}$

$$\begin{cases} R_\Lambda u \approx u(t) = O(e^{-\Lambda t}) \quad t > t_0 \\ f(u) = O(e^{-n_0\Lambda t}) \end{cases}. \tag{3.3}$$

Le *théorème* suivant nous donne un début de développement asymptotique de la solution lorsque $t \to +\infty$.

Théorème 3.1

Soit λ une valeur propre de A .

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t} R_\Lambda u(t) \;\; \textit{existe pour} \;\; \lambda_1 \leq \lambda \leq n_0\Lambda(u_0) \tag{3.4}$$

$$U_\lambda = 0 \;\; si \;\; \lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda(u_0) \tag{3.5}$$

$$U_\lambda \neq 0 \;\; sinon \tag{3.6}$$

De plus, nous avons :

i) Pour $\lambda_1 \leq \lambda < \Lambda(u_0)$:

$$R_\lambda u(t) = \frac{e^{-n_0\Lambda(u_0)t}}{(n_0\Lambda - \lambda)} R_\lambda f_{n_0}(U_\Lambda) + O(e^{-n_0\Lambda t}). \tag{3.7}$$

ii) Pour $\Lambda \leq \lambda < n_0\Lambda$:

$$R_\lambda u(t) = e^{-\lambda t}U_\Lambda + \frac{e^{-n_0\Lambda t}}{(n_0\Lambda - \lambda)} R_\lambda f_{n_0}(U_\Lambda) + O(e^{-n_0\Lambda t}) \tag{3.8}$$

iii) Pour $\lambda = n_0\Lambda$:

$$R_\lambda u(t) = -te^{-n_0\Lambda t} R_\lambda f_{n_0}(U_\Lambda) + O(e^{-n_0\Lambda t}). \tag{3.9}$$

iv) Pour $\lambda > n_0\Lambda$:

$$R_\lambda u(t) = \frac{e^{-n_0\Lambda t}}{(\lambda - n_0\Lambda)} R_\lambda f_{n_0}(U_\Lambda) + O(e^{-n_0\Lambda t}). \tag{3.10}$$

Avant la démonstration du théorème, nous donnons le corollaire suivant :

Corollaire 3.1

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Lambda \geq \lambda_i$, $i \geq 2$ *est :*

$$Pour\ \ j=1,....,i-1,\ \ \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_j} R_{\Lambda_j} u(t) = 0 \tag{3.11}$$

Démonstration du théorème 3.1

Reprenons l'équation :

$$\frac{du}{dt} + Au + f(u) = 0\,,\ \ f(u) \text{ donnée par (3.1).} \tag{3.12}$$

Appliquons R_λ à (3.12) et multiplions par $e^{\lambda t}$, il vient :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} R_\lambda u(t)\right) = -e^{\lambda t} R_\lambda f(u)\,, \tag{3.13}$$

qui s'intègre :

$$e^{\lambda t} R_\lambda u(t) = R_\lambda u_0 - \int_0^t e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u(\sigma))d\sigma\,, \tag{3.14}$$

Or, d'après (3.3), $|f(u)| \leq c_0 e^{-n_0\Lambda t}$, d'où :

$$\int_0^t e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u(\sigma))d\sigma \ \text{ converge pour } \lambda < n_0\Lambda\,. \tag{3.15}$$

Nous notons alors :

$$U_\lambda = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t} R_\Lambda u(t)\,. \tag{3.16}$$

Soit $\lambda < \Lambda$, nous avons :

$$e^{\lambda t} R_\lambda u(t) = e^{(\lambda-\Lambda)t} e^{\Lambda t} \left|u(t)\right| R_\lambda \frac{u(t)}{|u(t)|}\,.$$

Compte tenu de (3.3), il résulte que $e^{\Lambda t}\left|u(t)\right| R_\lambda \dfrac{u(t)}{|u(t)|}$ soit borné et nous déduisons :

$$e^{\lambda t} R_\lambda u(t) \to 0 \ \ quand\ \ t \to +\infty\,. \tag{3.17}$$

Par ailleurs $U_\Lambda \neq 0$ résulte de [1].

Nous allons maintenant montrer *i*), *ii*), *iii*) et *iv*).

i) Pour $\lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda(u_0)$:

L'intégrale de (3.13) entraîne

$$e^{\lambda t} R_\lambda u(t) = U_\lambda + \int_t^{+\infty} e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u(\sigma))d\sigma\,, \tag{3.18}$$

Cependant, pour $\lambda < n_0\Lambda$ et compte tenu de (3.3), nous allons estimer

$$\left|\int_t^{+\infty} e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u(\sigma))d\sigma - \int_t^{+\infty} e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u_\Lambda e^{-\Lambda\sigma})d\sigma\right| \leq \ ....$$

$$....\ \sum_{n=n_0}^{2p+1}\left\{\int_t^{+\infty} e^{(\lambda-n_\Lambda)}\left|R_\lambda\left(f_n(ue^{\Lambda\sigma}) - f_n(U_\Lambda)\right)\right| d\sigma\right\}, \tag{3.19}$$

Or, nous avons :

$$\left|f_n(ue^{\Lambda\sigma}) - f_n(U_\Lambda)\right| = \left|a_n\left\{(ue^{\Lambda\sigma})^n - U_\Lambda^n\right\}\right| \leq c_3\left|ue^{\Lambda\sigma} - U_\Lambda\right| \tag{3.20}$$

et en posant

$$\varepsilon_n(\sigma) = \left|R_\lambda\left(f_n(ue^{\Lambda\sigma}) - f_n(U_\Lambda)\right)\right|\,, \tag{3.21}$$

nous déduisons :

$$\varepsilon_n'(\sigma) = \sup_{n\geq n_0}\left\{\varepsilon_n(\sigma)\right\} \to 0 \ \text{ quand } \sigma \to +\infty\,, \tag{3.22}$$

Alors, il en résulte de l'équation

$$\left|\int_t^{+\infty} e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u)d\sigma - \int_t^{+\infty} e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u_\Lambda e^{-\Lambda\sigma})d\sigma\right| \leq \ ....$$

$$.....\ \varepsilon'(t)\frac{e^{(\lambda-n_0\Lambda)t}}{(n_0\Lambda-\lambda)}\,, \tag{3.23}$$

Or, $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon'(t) \to 0$,

c'est-à-dire

$$\left|\int_t^{+\infty} e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u)d\sigma - \int_t^{+\infty} e^{(\lambda-n_0\Lambda)} R_\lambda f_{n_0}(u_\Lambda)d\sigma\right| \leq \ \ ....$$

$$....\ \ \varepsilon'(t)\frac{e^{(\lambda-n_0\Lambda)}}{(n_0\Lambda-\lambda)} + \sum_{n=n_0+1}^{2p+1}\left|\int_t^{+\infty} e^{(\lambda-n\Lambda)\delta} R_\lambda f_n(U_\Lambda)d\sigma\right| \tag{3.24}$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\int_t^{+\infty} e^{\lambda\sigma} R_\lambda f(u)d\sigma = \frac{e^{-(n_0\Lambda-\lambda)}}{(n_0\Lambda-\lambda)} R_\lambda f_{n_0}(U_A) + \mathrm{O}(e^{-(n_0\Lambda-\lambda)t}) \tag{3.25}$$

Reportons (3.25) dans l'équation (3.18), nous déduisons :

$$R_\lambda u(t) = e^{-\lambda t} U_A + \frac{e^{-n_0\Lambda t}}{(n_0\Lambda-\lambda)} R_\lambda f_{n_0}(U_A) + \mathrm{O}(e^{-n_0\Lambda t}) \tag{3.26}$$

De cette dernière inégalité résulte *i*) et *ii*).

iv) Pour $\lambda > n_0\Lambda$:

Appliquons R_λ à l'équation (3.12) et multiplions par $e^{n_0\Lambda t}$, il vient :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{n_0\Lambda t} R_\lambda u(t)\right) = (n_0\Lambda-\lambda)e^{n_0\Lambda t} R_\lambda u(t) - \ e^{n_0\Lambda t} R_\lambda f(u) \tag{3.27}$$

Par ailleurs

$$e^{n_0\Lambda t} R_\lambda f(u) = R_\lambda f_{n_0}(U_A) + \mathrm{O}(1) \qquad \left(\mathrm{O}(1) = c_4 e^{-t}\right)$$

Alors, en posant $r(t) = e^{n_0\Lambda t} R_\lambda u(t)$, nous avons l'équation

$$\frac{d}{dt} r(t) = -(\lambda - n_0\Lambda) r(t) - R_\lambda f_{n_0}(U_A) + \mathrm{O}(1)\,, \tag{3.28}$$

qui s'intègre

$$r(t) = r(0)e^{-(\lambda-n_0\Lambda)t} - \frac{R_\lambda f_n(U_A)}{(\lambda-n_0\Lambda)} + \frac{R_\lambda f_{n_0}(U_A)}{(\lambda-n_0\Lambda)} \times \ \ .....$$

$$e^{-(\lambda-n_0\Lambda)t} + e^{-(\lambda-n_0\Lambda)t}\int_0^t e^{-(\lambda-n_0\Lambda)s}\mathrm{O}(1)ds\,, \tag{3.29}$$

Il s'ensuit d'après

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-(\lambda-n_0\Lambda)t}\int_0^t e^{-(\lambda-n_0\Lambda)s}\mathrm{O}(1)ds \to 0\,,$$

que

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = \frac{R_\lambda f_{n_0}(U_A)}{(\lambda-n_0\Lambda)}\,. \tag{3.30}$$

D'où :

$$R_\lambda u(t) = -\frac{e^{-n_0\Lambda t}}{(\lambda-n_0\Lambda)} R_\lambda f_{n_0}(U_A) + \mathrm{O}(e^{-n_0\Lambda t})\,, \tag{3.31}$$

et *iv*) est prouvé.

iii) Pour $\lambda = n_0\Lambda$:

Ce cas résulte trivialement de *iv*). En effet, (3.28) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} r(t) = -R_\lambda f_{n_0}(U_\Lambda) + \mathrm{O}(1)\,, \mathrm{O}(1) = ce^{-t} \tag{3.32}$$

L'intégration de (3.32) entraîne :

$$R_\lambda u(t) = -tR_\lambda f_{n_0}(U_\Lambda)e^{-n_0\Lambda t} + \mathrm{O}(e^{-n_0\Lambda t})\,. \tag{3.33}$$

Ainsi s'achève la preuve du théorème 3.1.

4- VARIETES SPECTRALES NON LINEAIRES

Nous commençons par définir les sous-variétés spectrales linéaires concernant le problème suivant :

$$\frac{d\omega}{dt} + A\omega + G_{u,v}(\omega) = 0\,, \tag{3.34}$$

$$\omega(0) = 0\,, \tag{3.35}$$

où :

$$G_{u,v}(\omega) = \sum_{n=n_0}^{2p+1} u_n\omega\left(\sum_{i=1}^{n-1} u^{n-(i+1)}v^i\right), \tag{3.36}$$

et u, v satisfait

$$u, v \in C([0,+\infty), V)\cap L^2(0,+\infty; D(A))\,, \tag{3.37}$$

$$\|u\| \le e^{-\gamma t}\,,\ \|v\| \le e^{-\gamma t}\,,\ \gamma > 0\,,\ t \ge 0\,. \tag{3.38}$$

Remarque 3.1

L'équation (3.34) – (3.36) est linéaire, elle est obtenue en posant $\omega = u - v$, u et v sont solution de l'équation (3.1).

Ainsi, d'après [1], le problème (3.34) – (3.36) possède une solution unique

$$\omega \in C_b([0,+\infty), V)\cap L^2(0,+\infty; D(A))\,, \tag{3.39}$$

D'autre part, l'équation (3.35) se met sous la forme :

$$\left|\frac{d\omega}{dt} + A\omega\right| \le \eta(t)\,\|\omega\|\,, \tag{3.40}$$

avec :

$$\eta(t) = \mathrm{O}(e^{-\gamma t})\,,\ \gamma > 0 \tag{3.41}$$

Et par conséquent

$$\omega(t) \approx e^{-\tilde\Lambda(\omega_0)t}\ ;\ \tilde\Lambda(\omega_0) \in \sigma(A)\,, \tag{3.42}$$

$$\left|R_\Lambda\tilde\omega(t)\right| \le c_4e^{-\gamma t}\,, \gamma > 0\,, (\Lambda < \tilde\Lambda(\omega_0))\,, t > t(\Lambda)\,, \tag{3.43}$$

où $\tilde\omega(t) = \dfrac{\tilde S(t)\omega_0}{|S(t)\omega_0|}$, $\tilde S(t): V \to V$ le semi-groupe engendré par l'équation (3.34).

En outre, nous avons le lemme suivant:

Lemme 3.1

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde\Lambda(\omega_0) \ge \Lambda_k$ $(k \ge 2)$ *est que*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_j t}R_{\Lambda_j}\omega(t) = 0 \quad \forall j = 1,2,\dots, k-1 \tag{3.44}$$

Preuve du Lemme 3.1

Nous commençons à montrer que la limite dans (3.44) existe pour $\lambda_j \le \tilde\Lambda(\omega_0)$.

En effet, soit $\lambda \in \sigma(A)$, alors de (3.34), nous avons :

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}R_\lambda\omega(t) = e^{-\lambda t}R_\lambda G_{u,v}(\omega)\,, \tag{3.45}$$

qui s'intègre

$$e^{\lambda t}R_\lambda\omega(t) = R_\lambda\omega_0 - \int_0^t e^{\lambda t}R_\lambda G_{u,v}(\omega)dt\,, \tag{3.46}$$

Cependant, de (3.39) et (3.43), nous déduisons que l'intégrale dans (3.47) converge pour $\lambda_j \le \tilde\Lambda(\omega_0)$.

Soit alors :

$$\omega_\lambda = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}R_\lambda\omega(t) = R_\lambda\omega_0 - \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}R_\lambda G_{u,v}(\omega)dt \tag{3.47}$$

Compte tenu des résultats précédents $\omega_{\tilde\Lambda(\omega_0)} \ne 0$.

Soit $\lambda \le \tilde\Lambda(\omega_0)$, nous avons :

$$e^{\lambda t}\left|R_\lambda\omega(t)\right| = e^{(\lambda-\tilde\Lambda)}e^{\tilde\Lambda t}\left|\omega(t)\right| R_\lambda\frac{\omega(t)}{|\omega(t)|}\,. \tag{3.48}$$

En utilisant (3.43) et (3.44), nous déduisons que $e^{\tilde\Lambda t}|\omega(t)|R_\lambda\dfrac{\omega(t)}{|\omega(t)|}$ est bornée. D'où $\omega_\lambda \equiv 0$.

Nous allons maintenant définir les sous-variétés de V qui caractérisent la décroissance de $\omega(t)$ quand $t \to +\infty$.

Posons :

$$\tilde M_1 = \left\{\omega \in V/R_{\Lambda_1}\omega - \int_0^{+\infty} e^{\Lambda_1 t}R_{\Lambda_1}G_{u,v}(\tilde S(t)\omega)dt = 0\right\} \tag{3.49}$$

et pour $k \ge 2$ (par induction) :

$$\tilde{M}_k = \left\{ \omega \in \tilde{M}_{k-1}, R_{\Lambda_k} \omega - \int_0^{+\infty} e^{\Lambda_k t} R_{\Lambda_k} G_{u,v}(\tilde{S}(t)\omega) dt = 0 \right\} \quad (3.50)$$

D'après le Lemme 3.1, $\widetilde{M}_k$, $k = 1,2,...$ ($\widetilde{M}_0 = V$) sont bien définies et nous avons

$$\widetilde{\Lambda}(\omega_k) = \Lambda_k \Leftrightarrow \omega \in \widetilde{M}_{k-1} \setminus \widetilde{M}_k, k = 1,2,..... \quad (3.51)$$

D'ailleurs, de la définition des $\widetilde{M}_k, k = 0,1,2,.....$, nous obtenons

$$\widetilde{M}_{k+1} \subset \widetilde{M}_k, k = 0,1,2,..... \quad (3.52)$$

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{M}_k \subset \widetilde{M}_k, t \geq 0 \quad (3.53)$$

***Proposition* 3.1**

$\widetilde{M}_k, k = 1,2,.....$ a une codimension maximale dans V, plus précisément $Co\dim_V \widetilde{M}_k = m_1 + m_2 + ... + m_k$, $k = 1,2,...$

***Lemme* 3.2**

Soit H un espace de Hilbert réel, X un sous-espace fermé de H et R la projection orthogonale dans H ayant le rang k. Supposons que $|Ru| < |u|$ $\forall u \in X,\ u \neq 0$, alors

$$Co\dim_H X \geq k.$$

Preuve du Lemme 3.2

Notons par Q la projection orthogonale de $X^{\perp}$. Nous allons montrer que $Q_{|RH}$ est injective.

Soit $v = Ru$ tel que $Qv = 0$. Si $v \neq 0$, il s'ensuit que $|v|^2 = |Ru|^2 < |v|^2$ (absurdité) et par conséquent $v = 0$ et $Q_{|RH}$ est injective.

Nous déduisons de ce qui précède que

$$Co\dim X = rg(Q) \geq rg(R) = k. \quad (3.54)$$

Reprenons la preuve de la Proposition 3.1.

Considérons la première sous-variété linéaire M_1. Nous déduisons d'après (3.43) qu'il existe $t > 0$ et $c_5 > 0$ (indépendant de $\omega \in \widetilde{M}_1$) tel que

$$\left| R_{\Lambda_1} \tilde{S}(t)\omega \right| \leq c_5 e^{-\gamma t},\ \forall t > t_1,\ \forall \omega \in \widetilde{M}_1. \quad (3.55)$$

Ainsi, il existe en particulier $t_1^* > 0$ tel que

$$\left| R_{\Lambda_1} \tilde{S}(t_1^*)\omega \right| \leq \frac{1}{2} \left| \tilde{S}(t_1^*)\omega \right|,\ \forall \omega \in \overline{\widetilde{M}}_1. \quad (3.56)$$

où $\overline{\widetilde{M}}_1$ désigne la fermeture de $\widetilde{M}_1$ dans H.

Soit H_1 le complément orthogonale de $\overline{\widetilde{M}}_1$ dans H, nous avons

$$\widetilde{S}(t_1^*)H = \widetilde{S}(t_1^*)H_1 + \widetilde{S}(t_1^*)\overline{\widetilde{M}}_1, \quad (3.57)$$

D'après (3.56) et en utilisant le Lemme 3.2, nous déduisons

$$Co\dim_H \widetilde{S}(t_1^*)\overline{\widetilde{M}}_1 \geq m_1. \quad (3.58)$$

Supposons maintenant que

$$Co\dim_V \widetilde{M}_1 = Co\dim_H \overline{\widetilde{M}} < m_1. \quad (3.59)$$

Il résulte alors que $\dim H_1 < m_1$ et, grâce à (3.57), $\widetilde{S}(t_1^*)H$ n'est pas dense dans H ce qui est équivalent à la non unicité rétrograde du problème de Cauchy associé à l'équation adjoint de (3.34), mais ceci est absurde en vertu du théorème de l'unicité rétrograde; par conséquent, nous avons $Co\dim \widetilde{M}_1 \geq m_1$ et, puisque $Co\dim \widetilde{M}_1 \leq m_1$, il vient

$$Co\dim_V \widetilde{M}_1 = m_1. \quad (3.60)$$

Nous procédons par preuve sur k ; nous supposons que $\widetilde{M}_j$ est de codimension $m_1 + ... + m_j$, $j = 1,2,...,k-1$ et, à l'aide de (3.43), nous déduisons qu'il existe $t_2^* > 0$ tel que

$$\left| \left(R_{\Lambda_1} + ... + R_{\Lambda_k} \right) \widetilde{S}(t_2^*)\omega \right| \leq \frac{1}{2} \left| \widetilde{S}(t_2^*)\omega \right|, \forall \omega \in \overline{\widetilde{M}}_k \quad (3.61)$$

Soit alors H_K le complément orthogonal de $\overline{\widetilde{M}}_k$ dans H ; il vient

$$S(t_2^*)H = S(t_2^*)H_k + S(t_2^*)\overline{\widetilde{M}}_k. \quad (3.62)$$

D'après (3.61) et le Lemme 3.2, nous avons :

$$Co\dim_H S(t_2^*)\overline{\widetilde{M}}_k \geq m_1 + ... + m_k. \quad (3.63)$$

En procédant d'une façon similaire au cas ($k = 1$), nous obtenons

$$Co\dim_V \widetilde{M}_k = m_1 + ... + m_k, \quad (3.64)$$

ce qui achève la *Preuve*.

Le *Théorème* suivant définit les sous-variétés analytiques non linéaires qui caractérisent la décroissance de $u(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

***Théorème* 3.2**

Il existe une suite de sous-variétés analytiques non linéaires M_k, $k \geq 1$, vérifiant :

i) $V = M_0 \subset M_1 ... \subset M_k \subset M_{k+1} ...$

ii) $M_k, k \geq 1$, *est une sous-variété analytique régulière de codimension* $m_1 + ... + m_k$.

iii) $M_k, k \geq 1$, *est invariante par le semi-groupe* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *engendré par l'équation (3.1) (i.e.* $S(t)M_k \subset M_k$, $t \geq 0$*).*

iv) $u_0 \in M_k \setminus M_{k+1} \Leftrightarrow \Lambda(u_0) = \Lambda_{k+1}$, $k \geq 0$.

***Preuve du Théorème* 3.2**

Rappelons l'équation (3.14), nous avons pour $u_0 \in V$:

$$e^{\Lambda_1 t} R_{\Lambda_1} u(t) - R_{\Lambda_1} u_0 - \int_0^t e^{\Lambda_1 s} R_{\Lambda_1} f(u(s))ds = 0 . \qquad (3.65)$$

Compte tenu du *Corollaire* 3.1 ; $\Lambda(u_0) \geq \Lambda_2$ si et seulement si

$$R_{\Lambda_1} u_0 = \int_0^{+\infty} e^{\Lambda_1 t} R_{\Lambda_1} f(S(t)u_0)dt . \qquad (3.66)$$

Soit alors $\Phi_1 : V \to R_{\Lambda_1} V$ définie par

$$\Phi_1(v) = R_{\Lambda_1} v - \int_0^{+\infty} e^{\Lambda_1 t} R_{\Lambda_1} f(S(t)v)dt . \qquad (3.67)$$

Cette application est bien définie, elle est analytique. Alors, on pose :

$$M_1 = \Phi_1^{-1}(0) . \qquad (3.68)$$

En procédant par récurrence, nous pouvons définir

$$\Phi_k : M_{k-1} \to R_{\Lambda_k} V , \ k \geq 2 . \qquad (3.69)$$

donnée par

$$\Phi_k v = R_{\Lambda_k} v - \int_0^{+\infty} e^{\Lambda_k t} R_{\Lambda_k} f(S(t)v)dt . \qquad (3.70)$$

Cette application est bien définie ($v \in M_{k-1}$, $\Lambda(v) \geq \Lambda_k$), elle est analytique. On pose

$$M_k = \Phi_k^{-1}(0) . \qquad (3.71)$$

Pour démontrer le *Théorème* 3.2, nous allons procéder par récurrence en utilisant les applications Φ_k et les résultats obtenus pour le problème (3.34) - (3.36).
Φ_1 dérivée en $u \in V$ s'écrit

$$\Phi'(u)v = R_{\Lambda_1} v - \int_0^{+\infty} e^{\Lambda_1 t} R_{\Lambda_1} G_{S(t)u}(\omega(t))dt, \ \forall v \in V, \qquad (3.72)$$

où :

$$G_{S(t)u}(\omega) = \sum_{n=n_0}^{2p+1} n a_n \omega (S(t)u)^{n-1} , \qquad (3.73)$$

et $\omega(t)$ satisfait l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} + A\omega + G_{S(t)u}(\omega) = 0 \\ \omega(0) = v \end{cases} , \qquad (3.74)$$

L'équation (3.74) est le problème (3.34) - (3.36) avec $s(t)u$ au lieu de u et v, et l'estimation (3.39) est vérifiée pour $\gamma = \Lambda_1$. Par conséquent, tous les résultats établis pour l'équation (3.34) et (3.36) restent vrais pour l'équation (3.74).

Soit

$$\tilde{M}_1(u) = \left\{ v \in V, R_{\Lambda_1} v - \int_0^{+\infty} e^{\Lambda_1 t} R_{\Lambda_1} G_{S(t)u}(\omega(t))dt = 0 \right\}$$

La première sous-variété spectrale linéaire associée à l'équation (3.74), d'après la *Proposition* 3.1, $\tilde{M}_1(u)$ est de codimension m_1 dans V, c'est-à-dire $\Phi_1'(u)$ est surjective, donc $\Phi_1(u)$ est une submersion et, par conséquent, M_1 est une sous variété analytique non linéaire régulière de codimension m_1 ; ainsi *ii*) est démontré.

i) est vérifiée d'après la définition de M_1.

ii) résulte de (3.67) (*i.e. Corollaire* 3.1). L'invariance de M_1 est triviale. Ainsi s'achève la *preuve* du théorème pour $k = 1$.

Procédant par récurrence pour $j \leq k$. Soit $1 \leq l < k$ tel que M_l est une sous-variété analytique régulière de codimension $m_1 + ... + m_l$ et *i*) - *iv*) du *théorème* sont vérifiés.

D'après (3.70) :

$$\Phi_{l+1} : M_l \to R_{\Lambda_{l+1}} V ,$$

est analytique en la dérivant au point $u \in V$, il résulte :

$$\Phi_{l+1}'(u)v = R_{\Lambda_{l+1}} v - \int_0^{+\infty} e^{\Lambda_{l+1} t} R_{\Lambda_{l+1}} G_{S(t)u}(\omega(t))dt, \ \forall v \in V, \qquad (3.75)$$

où

$$\Phi_{l+1}'(u) = T_u M_l = \tilde{M}_l \to R_{\Lambda_{l+1}} \qquad (3.76)$$

($T_u M_l$: L'espace tangent en u à M_l).

M_l est la $l^{ième}$ sous-variété spectrale linéaire associée à l'équation (3.74) . D'après la *Proposition* 3.1, $\Phi_{l+1}(u)$ est surjective, donc Φ_{l+1} est une sous-variété analytique non linéaire régulière de codimension $m_1 + ... + m_{l+1}$ dans V . Ainsi *ii*) est démontré.

i) résulte de la définition de M_l alors que *iv*) est une conséquence du *Corollaire* 3.1. L'invariance de M_{l+1} est triviale. Ainsi s'achève la *Preuve du Théorème* 3.2.

REFERENCES

[1]- Aissaoui M.Z., "Asymptotic Behavior of the Solution, when $t \to +\infty$, of a Class of Nonlinear Equations", Antalya, Turkey, Dynamical Systems and Applications, Proceedings, 5-10 July (2004), pp. 21-31.

[2]- Aissaoui M.Z., "Forme normale pour une classe d'équations d'évolutions à non linéarité polynomiale" (à paraître).

[3]- Aissaoui M.Z., "Comportement asymptotique et forme normale pour une classe d'équations paraboliques abstraites", thèse de Doctorat, Université de Paris IX, Centre d'Orsay, (1987).

[4]- Foias C. and Saut. J.C., "Asymptotic behaviour as of solutions of N.S.E. and nonlinear spectral manifolds", India Univ. Math. J., T.33, 3, (1984), pp. 459-471.

[5]- Foias C. and Saut J.C., "On the smoothness of the nonlinear manifolds of N.S.E.", India Univ. Math. J., T.33, 6, (1984), pp. 911-926.

[6]- Foias C. and Saut J.C., "Linearization and normal form of the N.S.E. with potential forces", *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 4, n°1, (1987), pp. 1-47. □