Sciences & Technologie – N°16, Décembre (2001), pp. 13-16.

CALCUL FONCTIONNEL POUR DEUX OPERATEURS NON BORNES

Reçu le 19/03/2001 - Accepté le 02/12/2001

Résumé

Ce travail est consacré à la construction du calcul fonctionnel dans le cas de deux opérateurs fermés non bornés définis sur des espaces de Banach.

***Mots clés**: Espace des vecteurs du type exponentiel, spectre simultané, calcul fonctionnel.*

Abstract

In this paper, we build a functional calculus in the case of two unbounded closed operators defined on Banach spaces.

***Key words**: Exponential vector spaces type, joint spectrum, functional calculus.*

T. ZERZAIHI
Département de Mathématiques
Centre Universitaire de Jijel
B.P. 98, Ouled Aissa
18000, Jijel, Algérie

ملخص

تهدف هذه المقالة لدراسة الحساب التابعي في حالـة مـؤثرين مغلقين غيـر محـدودين و معـرفين على فضاءات "بناخ".

***الكلمات المفتاحية**: فضاء الأشعة الأسية، الطيف المشترك، الحساب التابعي.*

Ce travail est consacré au calcul fonctionnel dans le cas de deux opérateurs fermés non bornés. On montre que ce calcul constitue la base principale d'une méthode de résolution de certains problèmes aux limites. On appliquera ensuite cette méthode à la résolution concrète de certaines classes de problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles.

Soit A: $X \to X$, un opérateur fermé non borné, où X est un espace de Banach, l'espace $D_A^\nu(X) = \{x \in X,\ \|A^k x\| \le C\nu^k,\ k \in N\}$ est appelé espace des vecteurs de type exponentiel $\le \nu$, où $\nu > 0$, $C = C(x, \nu) > 0$ est une constante. Il est démontré dans [4] que:

a) $D_A^\nu(X)$ est de Banach pour la norme $\|x\|_\nu = \underset{k \ge 0}{Sup} \dfrac{\|A^k x\|}{\nu^k}$

b) $A_\nu = A/D_A^\nu(X)$ est borné et $D_A^\nu(X)$ est invariant par rapport à A.

c) $D_A^1(X) \subset D_A^2(X) \subset \ldots \subset D_A^k(X) \subset D_A^{k+1}(X) \subset \ldots \subset X$,avec injections canoniques continues.

d) L'espace $\bigcup_{\nu \ge 1} D_A^\nu(X)$ muni de la topologie $Lim\ ind\, D_A^\nu(X)$ quand $\nu \to \infty$ est notée, $Exp_A(X)$, i.e.

$$Exp_A(X) = Lim\ ind D_A^\nu(X), \text{ quand } \nu \to \infty.$$

1- CALCUL FONCTIONNEL

Soient A: $X \to X$, B: $Y \to Y$, où A et B sont fermés non bornés, X et Y sont deux espaces de Banach. Pour établir le calcul fonctionnel, dans ce cas, on a besoin de la notion du produit tensoriel d'opérateurs et d'espaces de Banach, ainsi que la notion de spectre simultané.

1.1- Décomposition de l'espace $X \otimes Y$

Soit la suite croissante des espaces de Banach $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_k \subset X_{k+1} \subset \ldots$, avec $\|x\|_{k+1} \le \|x\|_k$ pour tout $x \in X_k$, on définit les espaces

$$\ell_1(X_k, X) = \left\{ x \in X, x = \sum_{k\geq 0} x_k, x_k \in X_k, \sum_{k\geq 0} \|x_k\| \prec \infty \right\}$$

$$\|x\|_{\ell_1} = \underset{\sum x_k}{Inf} \sum_{k\geq 0} \|x_k\|$$

et

$$X_\infty = \bigcup_{k\geq 1} X_k$$

$$\|x\|_\infty = Lim \|x\|_k \quad \text{quand } k \to \infty$$

Si $\overline{Exp_A X} = X$ et $\overline{Exp_B Y} = Y$, alors on a l'égalité suivante (cf. [4]):

$$\ell_1(X_k, X) = X_\infty$$

Théorème 1. *Soient X et Y deux espaces de Banach,* A: $X \to X$, et B:$Y \to Y$, *deux opérateurs fermés non bornés. Si* $\overline{Exp_A X} = X$, $\overline{Exp_B Y} = Y$, $X^{**} = X$ *et* $Y^{**} = Y$, *alors on a l'égalité algébrique et topologique suivante*

$$\ell_1\left(D_A^\nu(X) \tilde{\otimes} D_B^\nu(Y), X \tilde{\otimes} Y\right) = X \tilde{\otimes} Y \qquad (1)$$

où $X \tilde{\otimes} Y$ *désigne le completé de* $X \otimes Y$.

Démonstration. Comme on a par hypothèse $\overline{Exp_A X} = X$ et $\overline{Exp_B Y} = Y$, on déduit, d'après les propriétés du produit tensoriel, que

$$\overline{Exp_A X \otimes Exp_B Y} = X \otimes Y$$

Et comme, d'après [8], on a déjà l'égalité

$$Exp_A X \tilde{\otimes} Exp_B Y = \underset{\nu\to\infty}{Lim\, ind} D_A^\nu(X) \tilde{\otimes} D_B^\nu(Y),$$

on obtient que $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_A^\nu(X) \tilde{\otimes} D_B^\nu(Y)$ est dense dans $X \tilde{\otimes} Y$, d'où $\overline{Exp_A X \otimes Exp_B Y} = X \tilde{\otimes} Y$.

Pour démontrer (1), il suffit (cf.[4]) d'établir que

$$\underset{\nu\to\infty}{Lim} \|u\|_{D_A^\nu(X) \otimes D_B^\nu(Y)} = \|u\|_{X\otimes Y},$$

pour tout $u \in \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_A^\nu(X) \tilde{\otimes} D_B^\nu(Y)$.

Soit $u \in D_A^\nu(X) \tilde{\otimes} D_B^\nu(Y)$, donc u peut s'écrire sous la forme $u = \sum_{k\geq 1} x_k \otimes y_k$, avec $x_k \in D_A^\nu(X), y_k \in D_B^\nu(Y)$ et

$$\|u\|_{D_A^\nu(X) \otimes D_B^\nu(Y)} = \underset{\sum x_k \otimes y_k}{Inf} \|x_k\|_{D_A^\nu(X)} \|y_k\|_{D_B^\nu(Y)}. \qquad (2)$$

Mais il est démontré dans [4] que

$$\underset{\nu\to\infty}{Lim} \|x\|_{D_A^\nu(X)} = \|x\|_X.$$

D'où, par passage à la limite dans (2), on obtient

$$\underset{\nu\to\infty}{Lim} \|u\|_{D_A^\nu(X) \otimes D_B^\nu(Y)} = \underset{\sum_k x_k \otimes y_k}{Inf} \|x_k\| \cdot \|y_k\| = \|u\|_{X\otimes Y}.$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Théorème 2. *Soient A:* $X \to X$, *B:*$Y \to Y$ *deux opérateurs fermés non bornés, X et Y sont deux espaces de Banach. Dans ces conditions, on a les deux résultats suivants:*

a) Les deux opérateurs

$$\alpha_\nu = A_\nu \otimes I, \beta_\nu = I \otimes B_\nu : D_A^\nu(X) \tilde{\otimes} D_B^\nu(Y) \to D_A^\nu(X) \tilde{\otimes} D_B^\nu(Y)$$

sont bornés et $\alpha_\nu \circ \beta_\nu = \alpha_\nu \circ \beta_\nu$.

b) $\sigma_S(\alpha_\nu, \beta_\nu) = \sigma(A_\nu) \times \sigma(B_\nu)$.

où $\sigma_S(\alpha_\nu, \beta_\nu)$ *est le spectre simultané de* (α_ν, β_ν) *dans le bicommuttant S de l'ensemble* $\{\alpha_\nu, \beta_\nu\}$.

Démonstration.

a) Comme A_ν et B_ν sont bornés (cf.[7]), alors α_ν et β_ν le sont aussi car

$$\alpha_\nu(x \otimes y) = A_\nu x \otimes y \text{ et } \beta_\nu(x \otimes y) = x \otimes B_\nu y.$$

Grâce à la commutativité, on a

$$(\alpha_\nu \circ \beta_\nu) x \otimes y = (\beta_\nu \circ \alpha_\nu) x \otimes y = A_\nu x \otimes B_\nu y$$

b) D'après la définition du spectre simultané dans une algèbre de Banach (cf.[5]) et le théorème spectral, on a

$$\sigma_S(\alpha_\nu, \beta_\nu) \subset \sigma(\alpha_\nu) \times \sigma(\beta_\nu).$$

Mais d'après [6], on a: $\sigma(\alpha_\nu) = \sigma(A_\nu)$ et $\sigma(\beta_\nu) = \sigma(B_\nu)$. d'où:

$$\sigma_S(\alpha_\nu, \beta_\nu) \subset \sigma(A_\nu) \times \sigma(B_\nu).$$

En ce qui concerne l'autre inclusion, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \sigma(\alpha_\nu) \times \sigma(\beta_\nu)$, il existe alors, d'après la définition, deux fonctionnelles multiplicatives $m_1 \in M_{A_\nu}$ et $m_2 \in M_{B_\nu}$ telles que

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (m_1(\alpha_\nu), m_2(\beta_\nu))$$

où M_{A_ν} est l'ensemble de toutes les fonctionnelles multiplicatives définies sur le bicommuttant *S* de l'ensemble $\{\alpha_\nu, \beta_\nu\}$. Sur *S*, on définit une fonctionnelle multiplicative de la manière suivante

$$m(A_\nu \otimes B_\nu) = m_1(A_\nu) \cdot m_2(B_\nu),$$

et comme:

$$m(\alpha_\nu) = m(A_\nu \otimes I) = m_1(A_\nu) = \lambda_1$$

$$\text{et } m(\beta_\nu) = m(I \otimes B_\nu) = m_2(B_\nu) = \lambda_2,$$

alors $(\lambda_1, \lambda_2) = (m(\alpha_\nu), m(\beta_\nu))$, ce qui signifie que $(\lambda_1, \lambda_2) \in \sigma_S(\alpha_\nu, \beta_\nu)$,

$$\text{d'où } \sigma_S(\alpha_\nu, \beta_\nu) = \sigma(A_\nu) \times \sigma(B_\nu),$$

ainsi, le théorème est démontré. ■

2- APPLICATION AUX EQUATIONS OPERATORIELLES

On sait que dans le cas borné (cf.[3]), si φ est une fonction analytique dans un voisinage de $\sigma(A_\nu) \times \sigma(B_\nu)$, on peut alors définir l'opérateur

$$\varphi(A_\nu, B_\nu) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_{A_\nu}} \int_{\Gamma_{B_\nu}} \varphi(\lambda, \mu) R(\lambda, A_\nu) R(\mu, B_\nu) d\lambda d\mu,$$

où Γ_{A_ν} et Γ_{B_ν} sont des contours qui contiennent $\sigma(A_\nu)$ et $\sigma(B_\nu)$ respectivement.

Soit φ une fonction analytique dans un voisinage de $\bigcup_{\nu\geq 1}[\sigma(A_\nu)\times\sigma(B_\nu)]$ et $\varphi(\alpha,\beta)$ un opérateur défini sur $(Exp_{A^*}X^*\otimes Exp_{B^*}Y^*)^*$. On note la restriction de $\varphi(\alpha,\beta)$ à $X\tilde{\otimes}Y$ par $\varphi(A,B)$. De plus, on définit le domaine de définition de $\varphi(A,B)$ comme suit

$$D[\varphi(A,B)]=\{u\in X\tilde{\otimes}Y;\varphi(\alpha,\beta)u\in X\tilde{\otimes}Y\}$$

et pour $u\in D[\varphi(A,B)]$ on a

$$\varphi(A,B)u=\varphi(\alpha,\beta)u.$$

Théorème 3. *Soient $A: D(A)\subset X\to X$ et $B: D(B)\subset Y\to Y$ deux opérateurs fermés non bornés définis sur des espaces de Banach et soit φ une fonction analytique sur un voisinage de $\bigcup_{\nu\geq 1}[\sigma(A_\nu)\times\sigma(B_\nu)]$, si on suppose que*

$$\overline{Exp_A X}=X,\quad \overline{Exp_{A^*}X^*}=X^*,\quad X^{**}=X,$$
$$\overline{Exp_B Y}=Y,\quad \overline{Exp_{B^*}Y^*}=Y^*,\quad Y^{**}=Y,$$

alors l'ensemble de définition de l'opérateur $\varphi(A,B)$: $X\tilde{\otimes}Y\to X\tilde{\otimes}Y$ est défini comme suit:

$$D[\varphi(A,B)]=\left\{\begin{array}{l}u\in X\tilde{\otimes}Y, u=\sum_{\nu\geq 1}u_\nu, u_\nu\in D_A^\nu(X)\tilde{\otimes}D_B^\nu(Y),\\ \sum_{\nu\geq 1}\|u_\nu\|_\nu<+\infty \; et \; \sum_{\nu\geq 1}\|\varphi(A_\nu,B_\nu)u_\nu\|<+\infty\end{array}\right\}, \quad (3)$$

De plus si $u\in D[\varphi(A,B)]$, alors

$$\varphi(A,B)u=\sum_{\nu\geq 1}\varphi(A_\nu,B_\nu)u_\nu \quad (4)$$

Démonstration. A partir de la définition de $\varphi(A,B)$, on déduit que si $u\in D_A^\nu(X)\otimes D_B^\nu(Y)$ alors $\varphi(A,B)u=\varphi(A_\nu,B_\nu)u$; par conséquent, si u vérifie (3) et comme $\varphi(A,B)$ est fermé, on a l'égalité (4). Inversement, soit $u\in D[\varphi(A,B)]$. D'après le théorème 1, on a

$$u=\sum_{\nu\geq 1}u_\nu, u_\nu\in D_A^\nu(X)\tilde{\otimes}D_B^\nu(Y) \text{ et } \sum_{\nu\geq 1}\|u_\nu\|_\nu<+\infty. \quad (5)$$

Mais on a aussi

$$\varphi(A,B)u=\sum_{\nu\geq 1}y_\nu, y_\nu\in D_A^\nu(X)\tilde{\otimes}D_B^\nu(Y) \text{ et } \sum_{\nu\geq 1}\|y_\nu\|_\nu<+\infty. \quad (6)$$

Maintenant, il faut trouver $\omega\in D_A^\nu(X)\otimes D_B^\nu(Y)$, tel que

$$u=\sum_{\nu\geq 1}\omega_\nu, \sum_{\nu\geq 1}\|\omega_\nu\|_\nu<+\infty. \text{et} \sum_{\nu\geq 1}\|\varphi(A_\nu,B_\nu)\omega_\nu\|<+\infty. \quad (7)$$

Pour cela, soit $(\lambda_0,\mu_0)\notin\sigma(A)\times\sigma(B)$; par conséquent, $(\lambda_0,\mu_0)\notin\sigma(A_\nu)\times\sigma(B_\nu)$, pour tout $\nu\geq 1$. En vertu du résultat sur le théorème spectral (cf. [3]), on déduit que

$$\varphi(\lambda_0,\mu_0)\notin\varphi[\sigma(A_\nu)\times\sigma(B_\nu)]=\sigma[\varphi(A_\nu,B_\nu)].$$

Donc

$$[\varphi(\lambda_0,\mu_0)I-\varphi(A,B)]u=\sum_{\nu\geq 1}[\varphi(\lambda_0,\mu_0)u_\nu-y_\nu]:=\sum_{\nu\geq 1}y_\nu^{(\lambda_0,\mu_0)} \quad (8)$$

En utilisant (5) et (6), on obtient que

$$\sum_{\nu\geq 1}\left\|y_\nu^{(\lambda_0,\mu_0)}\right\|_\nu<+\infty \quad (9)$$

Posons maintenant,

$$\omega_\nu=R(\varphi(\lambda_0,\mu_0),\varphi(A,B))y_\nu^{(\lambda_0,\mu_0)}, \quad (10)$$

où R désigne la résolvante. A partir de (8), on aura: $u=\sum_{\nu\geq 1}\omega_\nu$. Comme (9) et (10) sont vérifiées, on obtient

$$\sum_{\nu\geq 1}\|\omega_\nu\|_\nu\leq\|R(\varphi(\lambda_0,\mu_0),\varphi(A,B))\|\cdot\sum_{\nu\geq 1}\left\|y_\nu^{(\lambda_0,\mu_0)}\right\|_\nu<+\infty.$$

Et enfin

$$\begin{aligned}\varphi(A_\nu,B_\nu)\omega_\nu&=\varphi(A,B)\omega_\nu\\&=\varphi(A,B)R(\varphi(\lambda_0,\mu_0),\varphi(A,B))y_\nu^{(\lambda_0,\mu_0)}\\&=\varphi(\lambda_0,\mu_0)R[\varphi(\lambda_0,\mu_0),\varphi(A,B)]y_\nu^{(\lambda_0,\mu_0)}-y_\nu^{(\lambda_0,\mu_0)}\\&=\varphi(\lambda_0,\mu_0)\omega_\nu-y_\nu^{(\lambda_0,\mu_0)},\end{aligned}$$

et donc, on a

$$\sum_{\nu\geq 1}\|\varphi(A_\nu,B_\nu)u_\nu\|_\nu<+\infty. \blacksquare$$

3- EXEMPLE

L'exemple suivant est classique, il montre l'application du calcul fonctionnel à la résolution des problèmes aux limites. Soit l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y) \quad (1.1)$$

avec les conditions

$$u(0,y)=u(T_1,y) \quad (1.2)$$
$$u(x,0)=u(x,T_2) \quad (1.3)$$

Pour le problème (1.1)-(1.3), on a le théorème suivant qui résume le résultat de l'étude.

Théorème 4. *Si $\frac{T_1}{T_2}\neq\frac{k}{m}$, k, $m\in Z^*$ et si $\frac{T_1}{T_2}$ est un nombre algébrique réel de premier ordre, alors pour toute $f\in L_2[(0,T_1)\times(0,T_2)]$ telle que $\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}f(x,y)dxdy=0$, l'équation* (1.1) *possède une solution unique $u\in H^1(0,T_1)\tilde{\otimes}H^1(0,T_2)$ qui vérifie les conditions* (1.2) et (1.3).

Démonstration.

On pose $A=\frac{\partial u}{\partial x}$ avec $D(A)=\{u\in L_2(0,T_1)$ et $u(o)=u(T_1)\}$.

De même $B=\frac{\partial u}{\partial y}$ avec $D(B)=\{u\in L_2(0,T_2)$ et $u(o)=u(T_2)\}$.

D'autre part, on note:

$$\alpha = A \otimes I,\ \beta = I \otimes B,$$

où $\alpha,\beta: L_2(0,T_1)\tilde{\otimes} L_2(0,T_2) \to L_2(0,T_1)\tilde{\otimes} L_2(0,T_2)$.

Il est à noter que, d'après le théorème de Fubini, on a

$$L[(0,T_1)\times(0,T_2)] = L[(0,T_1)\tilde{\otimes} L(0,T_2).$$

D'après la définition du spectre, on a

$$\sigma(A) = \left\{\frac{2\pi k}{T_1} i, k \in Z\right\},\ \sigma(B) = \left\{\frac{2\pi m}{T_2} i, m \in Z\right\}.$$

L équation (1.1) peut s'écrire alors sous la forme

$$\alpha u - \beta u = f \qquad (1.1)'$$

or

$D_A^k[L_2(0,T_1)] =$ {l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\le k$},

$D_B^m[L_2(0,T_2)] =$ {l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\le m$}.

C'est-à-dire que $u_m(y) = \sum_j b_j \exp(i\frac{2\pi j}{T_2} y)$ pour $u_m(y) \in D_B^m[L_2(0,T_2)]$. Sur l'espace

$$D_A^k[L_2(0,T_1)] \tilde{\otimes} D_A^m[L_2(0,T_2)]$$

l'équation (1.1)' s'écrit sous la forme

$$\alpha_k u_{k,m} - \beta\, u_{k,m} = f_{k,m}. \qquad (1.1)''$$

Vu les résultats concernant le cas borné (c.f.[4]), on obtient que:

$$u_{k,m}(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_{A_k}} \int_{\Gamma_{B_m}} \frac{R(\lambda, A_k) R(\mu, B_m) f_{k,m}(x,y)}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu.$$

Comme $f_{k,m} \in D_A^{\nu}[L_2(0,T_1)] \tilde{\otimes} D_B^m[L_2(0,T_2)]$, on peut écrire $f(x,y)$ de la manière suivante:

$$f(x,y) = \sum_{k,m} a_{k,m} exp\left(i\frac{2\pi m}{T_1} x\right) exp\left(i\frac{2\pi m}{T_2} y\right) = \sum_{k,m} f_{k,m}(x,y)$$

Après calcul, on obtient

$$u_{k,m}(x,y) = \frac{a_{k,m} exp\left(i\frac{2\pi k}{T_1} x\right) exp\left(i\frac{2\pi m}{T_2} y\right)}{2\pi\left(\frac{k}{T_1} - \frac{m}{T_2}\right)}$$

et si $\sum_{k,m} u_{k,m}$ converge normalement dans $L_2(0,T_1)\tilde{\otimes} L_2(0,T_2)$, alors, d'après le théorème 3, on a

$$u(x,y) = \sum_{k,m} u_{k,m}(x,y)$$

est la solution unique du problème (1.1)-(1.3). La convergence normale de la série en question est assurée lorsque $\left(\frac{k}{T_1} - \frac{m}{T_2}\right)$ est assez grand, ce qui est vérifié quand on suppose que $\frac{T_1}{T_2}$ est un nombre algébrique réel de premier ordre [1], car il existe, dans ce cas, une constante C = C(T_1,T_2) > 0 telle que l'inégalité

$$\left|\frac{T_1}{T_2} - \frac{k}{m}\right| > \frac{c}{m}$$

soit satisfaite pour tout $(k,m) \in$ Z × N*.■

REFERENCES

[1]- Chidlovski A.B., "Nombres transcendants", Nauka, Moscou, (1987).

[2]- Dash A.T., "Joint spectra tensor products", *Bull. Austral. Math. Soc*., Vol.32, (1985), pp.119-128.

[3]- Dunford N. and Schwartz J., "Linear operators. Part 1, General theory", Intersciences Publishers, New York, (1958).

[4]- Radyno Y.V., "Vecteurs de type exponentiel dans le calcul fonctionnel et dans les équations différentielles", *Diff. Equations*, T.21, n°9, (1985), pp.1559-1569.

[5]- Slodkowski Z. and Zelasko W., "On joint spectra of commuting families of operators", *Studia Mathematica*, T.L. (1974), pp.127-148.

[6]- Takashi I., "On the spectra of tensor products of linear operators in Banach spaces", *Journal Fur Mathematik*, Band 244, (1970), pp.119-153.

[7]- Taylor J.L., "The analytical functional calculus for several commuting operators", *Acta Mathematica*, 125, (1970), pp.1-38.

[8]- Zerzaihi T., "Le calcul opératoriel dans le produit tensoriel des espaces localement convexes", *Vesti Académie des Sciences de Biélorussie*, n°1, (1990), pp.115-116.

[9]- Zerzaihi T. et Radyno Y.V., "Fonctions d'opérateurs commutatifs non bornés", *Doklady Académie des Sciences de Biélorussie*, T.33, n°8, (1989), pp.684-686.

□