

## RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK ET CALCUL DU COEFFICIENT DE VISCOSITE ELECTRONIQUE D'UN PLASMA COLLISIONNEL TOTALEMENT IONISE

Reçu le 13/08/2001 - Accepté le 28/11/2001

### Résumé

L'équation de Fokker-Planck, qui décrit les électrons d'un plasma complètement ionisé et non magnétisé, a été résolue numériquement. Les collisions électron-ion et électron-électron ont été prises en considération. La fonction de distribution électronique, développée sur la base des polynômes de Legendre, a été calculée jusqu'à la seconde anisotropie. La première anisotropie a été calculée en réduisant le problème à une équation différentielle du quatrième ordre qui peut être résolue numériquement avec les méthodes numériques standards. Les coefficients de transport induits par cette première anisotropie ont été déduits. Ils correspondent exactement à ceux établis dans la littérature par des méthodes numériques différentes, nettement plus complexes. La seconde anisotropie a aussi été calculée en réduisant le problème à une équation différentielle du second ordre en utilisant la méthode itérative. Des résultats très précis sont obtenus à partir de la cinquième itération. La viscosité électronique a été déduite et un ajustement numérique très précis de ce coefficient de transport en fonction du numéro atomique a aussi été proposé.

**Mots clés :** Equation de Fokker-Planck, plasma, coefficients de transport.

### Abstract

The Fokker-Planck equation which describes the electrons of an unmagnetized and fully ionized plasma has been solved numerically. The electron-ion and the electron-electron collisions have been considered. The distribution function expanded on the Legendre polynomial basis has been computed up to the second anisotropy. The first anisotropy has been computed by reducing the problem to an ODE's of fourth order, which can be solved numerically with standard numerical methods. The transport coefficient induced by the first anisotropy have been deduced. The results obtained are in very good agreement with the results reported in the literature computed with more complicated numerical approach. The second anisotropy has been also computed by reducing the problem to an ODE's of the second order by the use of the iterative method. Very accurate results are obtained at the fifth iteration. The coefficient of the electron viscosity has been deduced and a very precise numerical fit of this transport coefficient with respect to the atomic number has also been proposed.

**Key words:** Fokker-Planck equation, plasma, transport coefficients.

**A. BENDIB  
F. EL LEMDANI**

Laboratoire d'Electronique  
Quantique  
Faculté des Sciences  
Département de Physique  
USTHB, El-Alia  
BP32 Bab Ezzouar  
16111 Alger, Algérie

### ملخص

معادلة Fokker-Planck التي توصف إلكترونات بلازم مأن تماماً و غير مغنطس تمد حلت عدديا الاصطدامات إلكترون-أيون إلكترون- لإلكترون أوخذت في الاعتبار دالة التوزيع الإلكتروني التي نشرت على أساس كثير الحدود ل Legendre قد تم حسابها حتى ل الأنزوتوبي الثانية.

إن الأنزوتوبي الأولى قد تم حسابها بإرجاع المسألة إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الرابعة التي يمكن حلها عدديا بالطرق و الأنظمة العددية المعروفة المقننة.

معاملات النقل المنجزة من هذه النزوتوبي الأولى تم استنتاجهم أنهم متطابقين تماماً مع القيم الموجودة في المراجع و التي تم حسابها بطرق أخرى.

الأنزوتوبي الثانية تم حسابها كذلك بإرجاع المشكلة إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية باستعمال طريقة الاستنتاج المتتالي.

اللزوجة الإلكترونية قد استنتجت و تحديد دقيق للتنمية العددية لهذا المعامل بدلالة الرقم الذري قد تم اقتراحه.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة Fokker-Planck بلازما- معامل النقل.

Les équations fluides sont d'une importance considérable en physique des milieux ionisés et non chargés. Elles permettent en effet de décrire avec une grande précision de très nombreux phénomènes physiques sans faire appel aux équations cinétiques beaucoup plus complexes. Ces équations fluides sont cependant définies par des coefficients de transport (conductivité thermique, viscosité, etc.) dont seule la théorie cinétique permet leur calcul explicite.

Ce travail a pour objet de calculer les coefficients de transport d'un plasma très collisionnel et non magnétisé en résolvant numériquement l'équation de Fokker-Planck. Nous avons pris en compte dans cette équation aussi bien les interactions électron-ion que les interactions électron-électron. Dans la littérature, ces coefficients de transport collisionnels ont été calculés principalement dans trois travaux fondamentaux qui sont ceux de Spitzer-Härm [1], de Braginskii [2] et d'Epplerle [3].

Dans la référence [1], Les auteurs ont calculé, en utilisant la méthode de résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck développée par Cohen *et al.* [4], les coefficients de transport d'un plasma non magnétisé. L'approche numérique a consisté à calculer des solutions numériques dans la limite faible vitesse et grande vitesse respectivement, en fixant les termes de l'opérateur de collision électron-électron sous forme intégrale. Dans leur analyse, Spitzer et Härm ont limité le développement de l'équation de Fokker-Planck à la première anisotropie et, par conséquent, le calcul de la viscosité électronique n'a pas été présenté.

Braginskii [2] a calculé tous les coefficients de transport dans les plasma magnétisés. Il a donc étendu la validité des résultats de la référence [1] à des plasma en présence d'un champ magnétique important comparativement aux champs auto-consistants du plasma. Il a en outre calculé le coefficient de viscosité en se limitant à des plasmas de numéro atomique  $Z=1$ . L'approche utilisée est une approche numérique basée sur un développement de la fonction de distribution sur les polynômes de Laguerre (appelés aussi polynômes de Sonine) et sur les développements de Chapman-Enskog [5] valables dans les plasmas très collisionnels.

Plus récemment, Epperlein [3] a réétudié le problème de Braginskii [2] en utilisant une approche numérique plus précise. En effet, il a résolu numériquement l'équation intégral-différentielle de Fokker-Planck avec un schéma aux différences finies en discrétisant les opérateurs différentiels avec un schéma à cinq points, et les opérateurs intégrales avec la méthode de Simpson. Il a notamment mis en évidence des imprécisions importantes dans certains coefficients de transport calculés par Braginskii [2]. Cependant, comme dans la référence [1], l'analyse du problème a été limitée à la première anisotropie.

Dans ce domaine, d'autres travaux [6-8] relativement moins récents que ceux des références [1-3], ont aussi été proposés dans la littérature. Dans les références [6] et [7], les auteurs ont utilisé la méthode basée sur le développement de la fonction de distribution sur les polynômes de Laguerre à l'ordre 2 et 3 respectivement, tandis que dans la référence [8], Grad a proposé une méthode originale basée sur le développement de l'équation cinétique sur les polynômes d'Hermite. Dans ces travaux pionniers, les résultats obtenus ne sont pas suffisamment précis pour qu'ils soient rapportés dans ce travail. Une étude bibliographique très concise a été présentée par Hochstim et Massel dans la référence [9].

Dans ce travail, nous avons résolu numériquement l'équation de Fokker-Planck qui décrit un plasma non magnétisé et très collisionnel en calculant aussi bien la première que la deuxième anisotropie. L'équation de Fokker-Planck, projetée sur le premier polynôme de Legendre, a été réduite, par un changement de variable judicieux, à une équation différentielle du quatrième ordre dont la solution numérique peut être aisément obtenue à l'aide de méthodes numériques standards. Les résultats de la littérature [1-3] ont été exactement retrouvés. L'équation de Fokker-Planck, projetée sur le deuxième polynôme de Legendre, a été résolue en utilisant une méthode itérative. La viscosité calculée par Braginskii [2] pour un numéro atomique  $Z=1$ , a été retrouvée, et les résultats pour des numéros atomiques arbitraires ont été obtenus. Un ajustement numérique très précis de la viscosité par rapport au numéro atomique a aussi été proposé.

Le plan de cet article est comme suit: dans un premier paragraphe, nous avons présenté l'équation de Fokker-Planck qui constitue l'équation centrale de ce travail. Dans un deuxième paragraphe, nous avons résolu numériquement cette équation et présenté les principaux résultats obtenus. Enfin, nous avons résumé les principaux résultats dans une conclusion.

## EQUATION DE FOKKER-PLANCK

Pour décrire un plasma totalement ionisé où les interactions entre particules se font à courte distance à l'aide des interactions Coulombiennes, et à longue distance par des champs auto-consistants, on utilise habituellement l'équation de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = C_{ei}(f) + C_{ee}(f)$$

où  $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$  est la fonction de distribution électronique,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont les champs électrique et magnétique,  $e$  et  $m$  sont la charge et la masse des électrons et  $C_{ei}(f)$ ,  $C_{ee}(f)$  sont respectivement les termes de collision électron-ion et électron-électron. Les autres variables ont leur sens habituel. Il est pratique de développer cette équation (1) et donc la fonction de distribution  $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ , sur la base des polynômes de Legendre qui représentent les fonctions propres de l'opérateur  $C_{ei}$ . Dans ce travail, nous utilisons le développement jusqu'à l'ordre deux, suffisant pour calculer tous les coefficients de transport collisionnels:

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = \sum_{n=0}^2 P_n(\mu) f(v, \vec{r}, t)$$

où les  $P_n(\mu)$  sont les polynômes de Legendre et  $\mu = \frac{v_x}{v}$ .

On a donc supposé que les gradients qui induisent les anisotropies sont parallèles à l'axe  $Ox$ . En utilisant ce développement, nous avons négligé les anisotropies d'ordre supérieur ( $n>3$ ), considérées comme négligeables dans les plasmas très collisionnels. En projetant l'équation (1) sur les polynômes d'ordre un et deux et en considérant que le système est stationnaire et proche de l'équilibre thermodynamique (ce qui correspond à l'hypothèse d'un plasma très collisionnel), il résulte:

$$v \frac{\partial F_M}{\partial x} - \frac{eE}{m} \frac{\partial F_M}{\partial v} = -\frac{v_t^4}{\lambda_{ei}} \frac{1}{v^3} f_1 + C_{ee}^i(F_M, f_1) + C_{ee}^a(F_M, f_1) \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} v \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial V}{\partial x} v \frac{\partial F_M}{\partial v} = -3 \frac{v_t^4}{\lambda_{ei}} \frac{1}{v^3} f_2 + C_{ee}^i(F_M, f_2) + C_{ee}^a(F_M, f_2) \quad (4)$$

où  $F_M(v, n, T)$  est la Maxwellienne globale,  $\lambda_{ei} = 4\pi e^2 T^2 / ne^4 Z \text{Ln}\Lambda$  est le libre parcours moyen

électron-ion,  $v_t = \sqrt{\frac{T}{m}}$  est la vitesse thermique

électronique,  $n$  est la densité électronique,  $T$  est la température électronique (en unité énergie),  $V$  est la vitesse fluide du plasma, et  $\text{Ln}\Lambda$  est le logarithme Coulombien. Dans les équations (3) et (4), les termes de collision électron-électron isotrope et anisotrope sont respectivement définis par:

$$C_{ee}^i(F_M, f_n) = \frac{v_t^4}{\lambda_{ei} Z} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ I_0^0 f_n + \frac{v}{3} \frac{\partial f_n}{\partial v} (I_2^0 + J_{-1}^0) \right] \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 C_{ee}^a(F_M, f_n) = & \frac{v_t^4}{\lambda_{ei}Z} \frac{1}{v^3} \left[ 4\pi F_M f_n \frac{n(n+1)}{6} f_n (-3I_0^0 + I_2^0 \right. \\
 & \left. - 2J_{-1}^0) + \frac{v^2}{2(2n+1)} \frac{\partial^2 F_M}{\partial v^2} \left( \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)} (I_{n+2}^n + J_{-1-n}^n) \right) \right] \\
 & + \frac{v_t^4}{\lambda_{ei}Z} \frac{1}{v^3} \left[ \frac{v^2}{2(2n+1)} \frac{\partial^2 F_M}{\partial v^2} \left( -\frac{n(n-1)}{(2n-1)} (I_n^n + J_{1-n}^n) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{v}{2(2n+1)} \frac{\partial F_M}{\partial v} \left( -\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)} I_{n+2}^n - \frac{n^2-n-4}{(2n+3)} J_{-1-n}^n \right) \right] \\
 & + \frac{v_t^4}{\lambda_{ei}Z} \frac{1}{v^3} \left[ \frac{v}{2(2n+1)} \frac{\partial F_M}{\partial v} \left( \frac{n^2+3n-2}{2n-1} I_n^n + \frac{n(n-1)}{(2n-1)} J_{1-n}^n \right) \right]
 \end{aligned} \quad (6)$$

où les intégrales  $I_n^m$  et  $J_n^m$  sont définies par les expressions:

$$I_n^m = \frac{4\pi}{v^n} \int_0^v v^{m+2} f_n dv \quad (7)$$

$$J_n^m = \frac{4\pi}{v^n} \int_v^\infty v^{m+2} f_n dv \quad (8)$$

Dans l'équation (3), un terme proportionnel à  $f_2$  de magnitude relativement faible a été négligé, et dans les expressions des collisions électron-ion, les contributions inélastiques, proportionnelles au rapport des masses  $m/M$ , où  $M$  est la masse ionique, n'ont pas été considérées. Dans le cadre de ces approximations, les équations (3) et (4) sont découplées et leur résolution permet donc de calculer les fonctions de distribution  $f_1$  et  $f_2$ . Il est évident que ces équations intégro-différentielles n'admettent pas de solutions analytiques et que seules des solutions numériques sont possibles. Dans le paragraphe suivant, nous allons résoudre numériquement ces équations en utilisant au préalable une réduction de ces équations à des équations différentielles.

## RESOLUTION NUMERIQUE

Les équations intégro-différentielles (3) et (4) se présentent sous une forme relativement complexe d'un point de vue mathématique. On peut noter que dans la littérature [1-3], elles ont été utilisées sous cette forme. Dans ce travail, notre approche est différente puisque, dans une première étape, on va simplifier leur écriture en éliminant leur caractère intégrale, ce qui conduit à les réécrire sous une forme purement différentielle, nettement plus pratique à résoudre numériquement.

### Résolution de l'équation de la première anisotropie

On peut noter que le caractère intégrale de l'équation de Fokker-Planck apparaît dans la partie anisotrope de l'opérateur de collision électron-électron [Eq.(6)]. En faisant le changement de fonction suivant:

$$M(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\mu_0} \int_0^y f_1 du \sim I_1^{-2}, \quad (9)$$

et en utilisant la fonction:

$$E(y) = \operatorname{erf}(y) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} y \exp(-y^2), \quad (10)$$

où  $\operatorname{erf}(y)$  est la fonction erreur et  $y = v/\sqrt{2}v_t$ , cette partie anisotrope des interactions électron-électron s'écrit, après quelques manipulations mathématiques, sous la forme:

$$\begin{aligned}
 C_{ee}^a(F_M, f_n) = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{v_t}{Z\lambda_{ei}} \mu_0 \left\{ \frac{dM}{dy} \left[ \exp(-y^2) - \frac{1}{2y^2} \exp(-y^2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left( \frac{1}{2y^5} - \frac{1}{y^3} \right) E(y) \right] \right\} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{v_t}{Z\lambda_{ei}} \mu_0 \left\{ -\frac{4}{y^2} \exp(-y^2) \right. \\
 & \left. \cdot \int_0^y u^4 M(u) du + \frac{2}{y^2} \exp(-y^2) \int_0^y u^2 M(u) du \right\} \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{v_t}{Z\lambda_{ei}} \mu_0 \left\{ M(\infty) \left[ \frac{4}{5} y^3 \exp(-y^2) - \frac{2}{3} y \exp(-y^2) \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (11)$$

On note alors que les deux intégrales ont la même puissance en  $y$ , ce qui permet, en multipliant l'équation de Fokker-Planck par  $y^2 \exp(+y^2)$  puis en dérivant cette dernière par rapport à la variable  $y$ , d'éliminer toute intégrale dans l'équation, mais en élevant l'ordre de dérivation qui devient égal à quatre. Cette manipulation mathématique produit l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{v_t}{Z\lambda_{ei}} \mu_0 \left\{ \frac{d^4 M}{dy^4} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{4} E(y) \frac{\exp(y^2)}{2y} \right) \right. \\
 + \frac{d^3 M}{dy^3} \left( y + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(y^2) E(y) - \frac{\sqrt{\pi}}{4y^2} \exp(y^2) E(y) \right) \left. \right\} + \\
 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{v_t}{Z\lambda_{ei}} \mu_0 \left\{ \frac{d^2 M}{dy^2} \left( 3y^2 - \frac{1}{2} \right. \right. \\
 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \exp(y^2) E(y) \left( \frac{3}{2y^3} - \frac{2}{y} + 2y \right) - Z \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\exp(y^2)}{y} \left. \right\} \\
 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{v_t}{Z\lambda_{ei}} \mu_0 \left\{ \frac{dM}{dy} \left( 3y - \frac{1}{2y} \right. \right. \\
 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \exp(y^2) E(y) \left( -\frac{3}{2y^4} + \frac{2}{y^2} - 2 \right) \\
 + Z \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\exp(y^2)}{y^2} - Z \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(y^2) \left. \right\} \\
 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{v_t}{Z\lambda_{ei}} \mu_0 M(y) (-4y^4 + 2y^2) \\
 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{v_t}{Z\lambda_{ei}} \mu_0 M(\infty) (-4y^4 + 2y^2) = \\
 \frac{d}{dy} \left[ y^2 \exp(y^2) \left( \sqrt{2} v_t y \frac{\partial E_M}{\partial x} - \frac{eE_x}{m\sqrt{2}v_t} - \frac{\partial F_M}{\partial y} \right) \right]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Cette équation (12) contient l'intégrale  $M(\infty)$  qui peut être exprimée par rapport au terme de source en utilisant l'équation de conservation de l'impulsion. Dans cette équation de l'impulsion, on utilise la propriété d'invariance collisionnelle,  $\int \bar{v} C_{ee}(f) d\bar{v} = 0$  et il résulte alors l'équation:

$$\int \bar{v} \left( v_x \frac{\partial F_M}{\partial x} - \frac{eE_x}{m} \frac{\partial F_M}{\partial v_x} \right) d\bar{v} = \int \bar{v} C_{ei}(F_M, f) d\bar{v}$$

qui peut se réécrire sous la forme plus explicite:

$$M(\infty) = -\frac{64\pi v_t^2 Z \lambda_{ei}}{n} \int_0^\infty y^2 \left( \sqrt{2} v_t y \frac{\partial F_M}{\partial x} - \frac{eE}{m\sqrt{2}v_t} \frac{\partial F_M}{\partial y} \right) dy \quad (13)$$

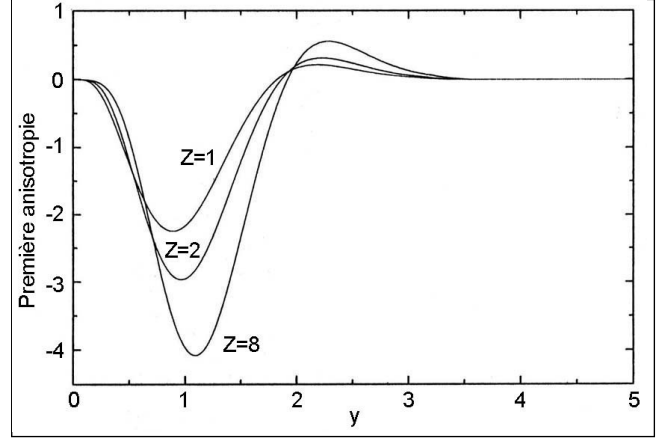
Dans ce cas, l'équation (12) est une équation différentielle du quatrième ordre qui peut être résolue par les méthodes numériques standards. Sa résolution numérique peut se faire aisément en utilisant des méthodes aux différences finies avec les conditions aux limites suivantes:

$$M(y=0) = 0, \quad \frac{dM}{dy}(y=0) = 0,$$

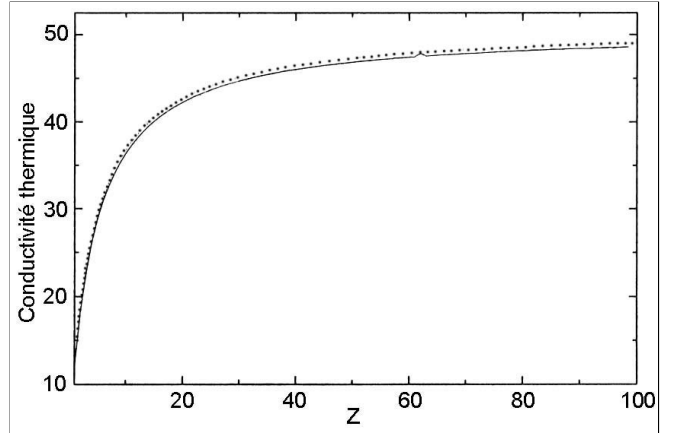
$$\frac{d^2 M}{dy^2}(y=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dy}(y=y_{max}) = 0$$

où la valeur maximale de la variable  $y$ , quelle que soit la valeur du numéro atomique  $Z$ , a été fixée à  $y_{max} = 5$ . On signale également que la méthode numérique utilisée permet d'obtenir des résultats sur des temps de calcul de quelques secondes. La géométrie du problème est définie par des gradients de densité et de température, un champ électrique et une vitesse fluide, parallèles à l'axe  $Ox$ . Une approche similaire a été proposée dans la littérature dans la référence [10]. A l'aide de plusieurs changements de fonction, l'auteur a réduit l'équation de Fokker-Planck à une équation du second ordre. Cette réduction drastique du problème a pour inconvénient majeur d'introduire, à la place de la fonction de distribution, une nouvelle fonction complexe qui n'a pas de signification physique précise, et par conséquent très peu pratique pour définir clairement les conditions aux limites du problème. Il est à noter que dans ce travail aucune application concrète n'a été présentée.

On donne sur la figure 1, les fonctions de distribution correspondant à différentes valeurs du numéro atomique ( $Z = 1, 2, 8$ ), pour le terme de source proportionnel au gradient de température  $\frac{dT}{dx}$ , en ayant utilisé la condition de quasi-neutralité de charge correspondant à une densité de charge nulle,  $\bar{J} = 0$ . Tous les coefficients de transport induits par la première anisotropie de la fonction de distribution ont été calculés numériquement pour des valeurs de  $Z$  arbitraires. Les résultats obtenus concordent parfaitement avec ceux de la littérature [3], comme mentionné plus haut. Nous ne reportons pas dans ce travail tous ces résultats qui sont présentés de façon quantitative dans la référence [3], mais seulement à titre d'exemple, nous présentons sur la figure 2, la conductivité thermique



**Figure 1:** La première anisotropie de la fonction de distribution normalisée par rapport à  $ik\lambda_{ei}\mu_0 \frac{\delta T}{T}$  en fonction de la vitesse normalisée  $y = \frac{v}{\sqrt{2}v_t}$ , pour différentes valeurs du numéro atomique  $Z$ .



**Figure 2:** Conductivité thermique normalisée par rapport à  $nTv_t$  en fonction du numéro atomique  $Z$ . La quasi-neutralité de charge  $\bar{j} = 0$ , où  $\bar{j}$  est la densité de courant, a été prise en considération. La courbe en tiret correspond à l'ajustement numérique [Eq.(14)].

$K_T$  définie par le flux de chaleur électronique  $q = -K_T \frac{dT}{dx}$ , en fonction du numéro atomique  $Z$ . L'ajustement numérique utilisé habituellement dans la littérature:

$$K_T|_{fit} = 64 \frac{Z + 0.24}{Z + 4.2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} n v_t \lambda_{ei} \quad (14)$$

a aussi été reporté sur la figure, à titre comparatif.

En conclusion, nous avons développé une approche différente par rapport à celles utilisées dans la littérature pour résoudre numériquement l'équation de Fokker-Planck et donc pour calculer les coefficients de transport locaux d'un plasma non magnétisé et totalement ionisé. Cette méthode numérique, ainsi que la réduction du problème,

peuvent être aussi utilisées pour calculer des coefficients de transport induits par d'autres termes de source, tels que l'absorption collisionnelle et les effets pondéromoteurs.

### Résolution de l'équation de la seconde anisotropie

Dans cette partie, on va s'intéresser au calcul de la seconde anisotropie. Comme le montre l'équation (4), le seul terme de source est proportionnel à la vitesse fluide puisque, dans l'approximation collisionnelle, la contribution des autres potentiels thermodynamiques est négligeable. A l'opposée de l'équation (3), l'équation de  $f_2$  ne se simplifie pas en une équation différentielle d'ordre relativement bas, tractable numériquement. On a contourné cette difficulté en utilisant la méthode itérative et en considérant l'équation (4) comme une équation différentielle d'ordre deux. L'approche itérative utilisée a consisté à fixer les termes sous forme intégrale comme des termes de source. Nous avons vérifié *a posteriori* que ces termes sont relativement faibles par rapport aux autres termes de l'équation et que, par conséquent, ils devraient permettre une convergence très rapide de la méthode numérique. Typiquement, la convergence se produit au bout de 5 itérations. La solution utilisée pour initialiser l'itération est la solution analytique obtenue pour des numéros atomiques très élevés où les collisions électron-ion sont prépondérantes par rapport aux collisions électron-électron. L'équation que nous avons résolu s'écrit à partir de l'équation (4) sous la forme:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f_2^{i+1}}{dy^2} + \frac{df_2^{i+1}}{dy} \left[ \frac{1}{E(y)} \frac{4}{\sqrt{\pi}} y^2 \exp(-y^2) - \left( \frac{1}{y} - 2y \right) \right] \\ & + f_2^{i+1} \left[ \frac{1}{E(y)} \frac{4}{\sqrt{\pi}} (4y^3 - 3y) \exp(-y^2) + \left( \frac{3}{y^2} - 6 \right) - \frac{6Z}{E(y)} \right] = \\ & \frac{64}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} Z \frac{1}{E(y)} y^5 \exp(-y^2) \\ & - \frac{192}{35} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{E(y)} \exp(-y^2) \int_0^y f_2^i u^6 du \\ & + \frac{8}{15} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{E(y)} (6 + 4y^2) \exp(-y^2) \int_0^y f_2^i u^4 du \\ & + \frac{32}{15} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{E(y)} y^5 \exp(-y^2) \int_y^\infty u f_2^i du \\ & + \frac{16}{35} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{E(y)} (7y^5 - 12y^7) \exp(-y^2) \int_y^\infty \frac{1}{u} f_2^i du \end{aligned} \quad (15)$$

et la solution initiale est:

$$f_2^0 = -\frac{32}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi}} y^5 \exp(-y^2) \quad (16)$$

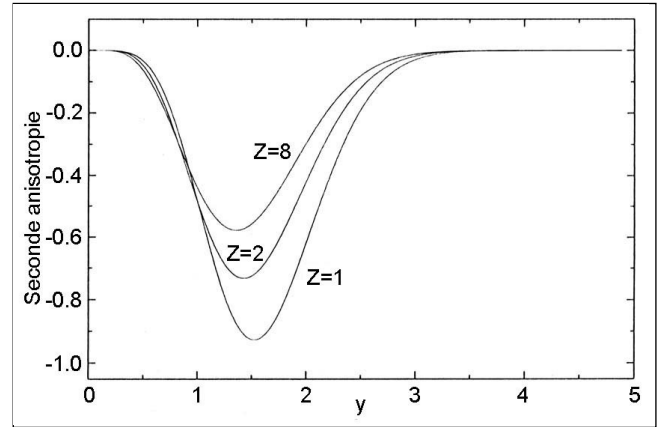
Dans les équations (15) et (16), les fonctions de distribution ont été normalisées par rapport à l'expression  $ikV\mu_0 \frac{\lambda_0}{v_t}$ . Comme dans le paragraphe précédent,

l'équation différentielle du second ordre (15) a été résolue numériquement à l'aide d'une méthode aux différences finies standard.

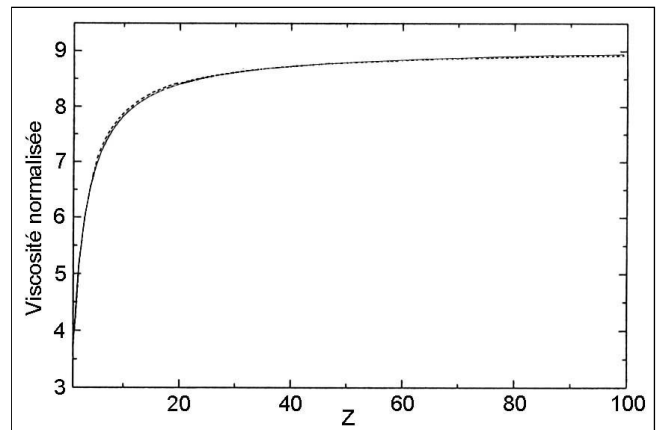
Les conditions aux limites physiques utilisées sont:

$$f_2^i(y=0)=0 \text{ et } f_2^i(y=y_{max})=0.$$

Les résultats numériques que nous allons présenter ont été obtenus avec la précision  $|f_2^{i+1} - f_2^i| / f_2^i < 10^{-5}$  dans tout l'intervalle d'intégration  $[0, y_{max}]$ . Sur la figure 3, nous avons donné un exemple typique de fonctions de distribution  $f_2$  pour  $Z = 1, 2, 8$ , qui montre que les moments correspondants augmentent avec le numéro atomique. Par ailleurs, le résultat central de ce travail est représenté sur la figure 4. Il correspond au coefficient de viscosité  $\eta(Z)$  pour des valeurs du numéro atomique  $Z$  arbitraires. Nous rappelons que ce coefficient est défini à l'aide de l'expression du tenseur des contraintes  $\Pi_{ij} = -\eta \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ . On



**Figure 3:** La seconde anisotropie de la fonction de distribution normalisée par rapport à  $ik\lambda_{ei}\mu_0V$  en fonction de la vitesse normalisée  $y = \frac{v}{\sqrt{2}v_t}$ , pour différentes valeurs du numéro atomique  $Z$ .



**Figure 4:** Coefficient de viscosité normalisé par rapport à  $nT/ikV$  en fonction du numéro atomique  $Z$ . La courbe en tiret correspond à l'ajustement numérique [Eq.(17)].

note que  $\eta$  augmente de façon monotone croissante pour saturer à sa valeur asymptotique

$$\eta(Z \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{512}{45} \sqrt{\frac{2}{\pi}} n T \lambda_{ei} / v_t,$$

établie analytiquement en négligeant, dans l'équation de Fokker-Planck, les collisions électron-électron. En particulier, nous retrouvons le résultat de Braginskii [2],  $\eta(Z=1) \approx 3.67 n T \lambda_{ei} / v_t$ . Ce résultat étend donc la validité des résultats rapportés dans la littérature à des  $Z$  arbitraires et constitue donc une contribution nette originale. Pour des besoins pratiques, nous avons aussi proposé un ajustement numérique du coefficient de viscosité de la forme:

$$\eta(Z) = \frac{9.06244Z}{1.53411 + Z} n T \lambda_{ei} v_t \quad (17)$$

établi avec une précision toujours meilleure que 2,5% (Fig. 4).

### CONCLUSION

Dans ce travail, les coefficients de transport classiques d'un plasma collisionnel ont été calculés en résolvant numériquement l'équation de Fokker-Planck. Le plasma considéré est inhomogène en densité, en température et en vitesse fluide, et le champ électrique dû aux charges d'espace a été pris en considération. Les opérateurs de collision électron-ion et électron-électron ont été pris sous leur forme intégrale sans aucune approximation (développement sur les grandes vitesses, suppression des contributions anisotropes, etc.). La méthode numérique utilisée dans ce travail est originale par rapport à celles rapportées dans la littérature. L'avantage de notre méthode est la réduction du problème à des équations différentielles avec des conditions aux limites en utilisant la méthode itérative. Leur solution numérique est aisément effectuée avec les méthodes conventionnelles.

En particulier, tous les résultats précis obtenus dans la littérature sur les coefficients de transport induits par la première anisotropie de la fonction de distribution ont été retrouvés. Les résultats sur la seconde anisotropie n'ont pas été rapportés quantitativement dans la littérature. A notre

connaissance, seul le résultat de Braginskii par la méthode de Chapman-Enskog [6] a permis de calculer le coefficient de viscosité dans des plasmas magnétisés. Ce travail a permis par un choix judicieux des termes de source de l'équation de Fokker-Planck de calculer numériquement la seconde anisotropie de la fonction de distribution. Nous avons déduit le coefficient de viscosité électronique pour des numéros atomiques arbitraires et établi un ajustement numérique très précis de ce résultat. Ce résultat original complète donc les résultats de la littérature établis seulement pour  $Z=1$  et  $Z \rightarrow \infty$ .

Cette approche numérique pour résoudre l'équation de Fokker-Planck peut être appliquée dans différentes situations physiques, notamment lorsque les termes de source seraient dus à d'autres potentiels thermodynamiques. De plus, nous pouvons citer la contribution de l'absorption par bremsstrahlung inverse et les effets pondérateurs dus à la présence d'ondes électromagnétiques dans le plasma. Par ailleurs, cette méthode numérique pourrait être appliquée avec succès à d'autres équations cinétiques définies par d'autres opérateurs de collision, de forme relativement proche de celle utilisée dans ce travail, tels que les opérateurs de collision ion-électron et ion-ion.

### REFERENCES

- [1]- Spitzer Jr. L. and Härm R., *Phys. Rev.*, 89, (1953), p. 977.
- [2]- Braginskii S.I., "Reviews of Plasma Physics", edited by M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, Vol. 1, (1965), p. 253.
- [3]- Epperlein E.M. and Haines M.G., *Phys Fluids*, 29, (1986), p. 1029.
- [4]- Cohen R.S., Spitzer Jr. L. and McR. Routly P., *Phys. Rev.*, 80, (1950), p. 230.
- [5]- Chapman S. and Cowling T.G., "The mathematical theory of Non-uniform Gases", Cambridge University Press, Cambridge, (1939).
- [6]- Cowling T.G., *Proc. R. Soc. London Sec. A* 183, (1945), p. 453.
- [7]- Landshoff R., *Phys. Rev.*, 76, (1949), p. 904.
- [8]- Grad H., *Commun. Pure Appl. Math.*, 2, (1949), p.235.
- [9]- Hochstim A.R., and Massel G.A., "Kinetic Processes in Gases and plasmas", edited by A.R. Hochstim, Academic, New York, (1969), pp. 142-255.
- [10]- Ferreira A., *Plasma physics and Controlled Fusion*, 30, (1988), p.935. □