

FONCTIONS SPECTRALES D'UNE CERTAINE CLASSE D'OPERATEURS SYMETRIQUES

Reçu le 07/07/2001 – Accepté le 18/06/2002

Résumé

On établit sous une forme explicite une formule des fonctions spectrales d'un opérateur symétrique régulier avec les indices de défaut $(n, n), n < \infty$. On en déduit certaines propriétés des spectres d'extensions quasi-auto-adjoints de cet opérateur.

Mots clés : *opérateur symétrique, fonction spectrale, indices de défaut, résolvante généralisée, fonction spectrale généralisée.*

Abstract

Explicit formula is derived for the spectral functions of symmetric and regular operator A with deficiency indices $(n, n), n < \infty$. Some implications of the formula, that are related to the specters of quasi-self-adjoint extensions of the operator A .

Key words : *symmetric operator, spectral function, deficiency indices, generalized resolvent, generalized spectral function.*

E. ALEXANDROV

410020 Saratov
rue Chekhourdina
D.10a, N°61, Russie

A. HEBBECHÉ

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mentouri
Constantine, Algérie

Bien que le développement de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et symétriques semble achevé, il existe peu d'opérateurs pour lesquels les fonctions spectrales peuvent être écrites sous une forme explicite. La construction des fonctions spectrales d'un opérateurs auto-adjoint est un problème important et difficile. Par exemple, un quantum observable est un opérateur auto-adjoint A défini dans l'espace de Hilbert Φ des états d'un système et, à la différence de la mécanique classique, cet observable dans l'état $\varphi \in \Phi$ ($\|\varphi\| = 1$) ne prend pas une valeur définie, mais il est une variable aléatoire de la loi de distribution $F(t) = (E_t \varphi, \varphi)$, où E_t est la fonction spectrale de A . Connaître E_t dans ce cas est important.

Soit H un Hilbert séparable, avec le produit scalaire (\cdot, \cdot) et la norme $\|\cdot\|$, et A un opérateur symétrique défini sur un domaine $D(A)$ qui n'est pas nécessairement dense dans H . On suppose que les indices de défaut de A sont $(n, n), 0 < n < \infty$. L'opérateur A peut être prolongé en un opérateur auto-adjoint \tilde{A} dans un espace plus vaste $\tilde{H} \supset H$. Si \tilde{E}_t et \tilde{R}_λ sont respectivement la fonction spectrale et la résolvante de \tilde{A} , P_H l'orthoprojecteur de \tilde{H} sur H , les fonctions $E_t = P_H \tilde{E}_t|_H$ et $R_\lambda = P_H \tilde{R}_\lambda|_H$ sont appelées respectivement fonction spectrale généralisée et résolvante généralisée de A . Les opérateurs R_λ et E_t sont liés par la relation:

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t - \lambda}, \quad \text{Im } \lambda \neq 0,$$

et pour $f, g \in H$ et les nombres réels $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ on a la formule de Stiltjes:

$$\langle [E_{\beta+0} - E_\alpha] f, g \rangle = \langle E_{\alpha\beta} f, g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_\alpha^\beta ([R_{\sigma+i\tau} - R_{\sigma-i\tau}] f, g) d\sigma \quad (1)$$

Le problème de description de l'ensemble des fonctions spectrales d'opérateurs symétriques se pose en physique mathématique, en mécanique quantique, dans le problème des moments etc.

Le présent article donne la solution du problème posé pour des opérateurs

ملخص

نبين في شكل صريح صيغة لتوابع طيفية لمؤثر تناظري منتظم مع أدلة النقص (n, n) , $n < \infty$. ثم نستنتج بعض الخواص الطيفية لتمديدات شبه قرينة لذاتها لهذا المؤثر. **الكلمات المفتاحية:** توابع طيفية، مؤثر تناظري.

symétriques réguliers avec les indices de défaut (n, n) , $n < \infty$. L'essentiel de ce travail est la formule des résolvantes généralisées établit dans [1]. Notons que dans [2] le problème est résolu pour une autre classe d'opérateurs auto-adjoints. On peut considérer cet article comme un prolongement de [2].

1. RESOLVANTES GENERALISEES

1- Soit A un opérateur symétrique dans un espace de Hilbert H de domaine $D(A)$. On ne suppose pas que $D(A)$ est dense dans H . Pour chaque nombre complexe λ , $\text{Im}\lambda \neq 0$, le sous-espace de défaut de A est $\aleph_\lambda = H\Theta(A - \lambda I)D(A)$ où I est l'opérateur identité. On pose: $P_\lambda = \aleph_\lambda \cap (D(A) \dot{+} \aleph_{\bar{\lambda}})$.

On sait que $P_\lambda = \{0\}$ si, et seulement si, $\overline{D(A)} = H$. Si $\overline{D(A)} \neq H$ l'ensemble

$$G_\lambda = \{[\varphi, \psi] \in \aleph_\lambda \times \aleph_{\bar{\lambda}} : \varphi - \psi \in D(A)\}$$

est le graphe d'un opérateur isométrique V de domaine P_λ à valeurs dans $P_{\bar{\lambda}}$.

On désigne par \mathfrak{I} l'ensemble des opérateurs linéaires F , $\|F\| \leq 1$ de \aleph_i dans \aleph_{-i} . Pour une fonction opératorielle $F(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}^+ = \{\lambda : \text{Im}\lambda > 0\}$ analytique sur \mathbf{C}^+ , à valeur dans \mathfrak{I} , on introduit l'ensemble $\Omega_F(\infty)$ des éléments $h \in \aleph_i$ tels que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbf{C}_\varepsilon^+} |\lambda| [\|h\| - \|F(\lambda)h\|] < \infty$$

où $\mathbf{C}_\varepsilon^+ = \{\lambda \in \mathbf{C}^+ : \varepsilon < \arg \lambda < \pi - \varepsilon, 0 < \varepsilon < \pi/2\}$.

L'ensemble $\Omega_F(\infty)$ est un espace vectoriel, et pour tout $h \in \Omega_F(\infty)$ [4], $\lim_{\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbf{C}_\varepsilon^+} F(\lambda)h = F_0(\infty)h$ existe au sens de la topologie forte. $F_0(\infty)$ défini ainsi est un opérateur isométrique.

La formule suivante décrit l'ensemble des résolvantes généralisées de A [3]:

$$R_\lambda(A) = R_\lambda = (A_F(\lambda) - \lambda I)^{-1}, R_{\bar{\lambda}} = R_\lambda^*, \lambda \in \mathbf{C}^+,$$

où $F(\lambda)$ est une fonction arbitraire régulière sur \mathbf{C}^+ à valeur dans \mathfrak{I} , satisfaisant la condition

$$F_0(\infty) \neq V_\psi \quad (1.1)$$

quel que soit $\psi \in \Omega_F(\infty) \cap P_\lambda, \psi \neq 0$.

$A_{F(\lambda)}$ est l'extension quasi auto-adjointe de A définie sur $D(A_{F(\lambda)}) = D(A) \dot{+} (F(\lambda) - I)\aleph_i$, par:

$$A_{F(\lambda)}(f + F(\lambda)\varphi) = Af + iF(\lambda)\varphi + i\varphi, f \in D(A), \varphi \in \aleph_i$$

On désigne par \mathfrak{R} l'ensemble des fonctions opératorielles $F(\lambda)$ régulières dans \mathbf{C}^+ à valeurs dans \mathfrak{I} satisfaisant à la condition (1.1).

2- Dans la suite, on suppose que A possède les indices de défauts (n, n) , $n < \infty$. Désignons par \mathring{A} son prolongement auto-adjoint et introduisons l'opérateur

$$\mathring{U}_{\lambda\lambda_0} = (\mathring{A} - \lambda_0 I)(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}, \text{Im}\lambda > 0.$$

Notons sa propriété importante [5]:

$$\mathring{U}_{\lambda\lambda_0} \aleph_{\bar{\lambda}_0} = \aleph_{\bar{\lambda}}, \text{Im}\lambda \text{Im}\lambda_0 \neq 0 \quad (1.2)$$

On désigne par

$$\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}, \dots, \varphi_i^{(n)} \quad (1.3)$$

des vecteurs orthogonaux de \aleph_{-i} . D'après (1.2),

$\varphi_\lambda^{(k)} = \mathring{U}_{\lambda\lambda_i} \varphi_i^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n$ forment une base de $\aleph_{\bar{\lambda}}$, en particulier, les vecteurs

$$\varphi_{-i}^{(k)} = \mathring{U} \varphi_i^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

où $\mathring{U} = \mathring{U}_{-ii}$ est la transformation de Kely de \mathring{A} , forment une base orthogonale de \aleph_i .

Pour écrire la formule convenable des résolvantes généralisées de A , on aura besoin des notations suivantes:

$$\Phi_{\lambda\mu} = (\lambda - \bar{\mu}) \left[\left(\varphi_\lambda^{(k)}, \varphi_\mu^{(s)} \right) \right]_{k,s=1}^n, C(\lambda) = \Phi_{\lambda\lambda}^{-1} \Phi_{\lambda, -i},$$

$$A(\lambda) = [E - C(\lambda)\Omega(\lambda)]^{-1} = [a_{jk}(\lambda)]_{j,k=1}^n$$

où E est la matrice unité d'ordre n , $\Omega(\lambda)$ est une fonction-matricielle régulière dans \mathbf{C}^+ qui correspond, dans les bases (1.3) et (1.4), à la fonction opératorielle $F(\lambda) \in \mathfrak{R}$;

$\varphi_\lambda = (\varphi_\lambda^{(1)}, \dots, \varphi_\lambda^{(n)})^T, (f, \varphi_\lambda) = ((f, \varphi_\lambda^{(1)}), \dots, (f, \varphi_\lambda^{(n)}))^T$ sont des colonnes (T désigne le transposé), (φ_λ, g) est définie par analogie.

Dans la suite, nous désignons par Φ l'ensemble des matrices $\Omega(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}^+$, associées dans les bases (1.3) et (1.4) des fonctions opératorielles $F(\lambda) \in \mathfrak{R}$.

Avec les notations faites, écrivons la formule des résolvantes généralisées de A [4]:

$$R_\lambda(A)f = R_\lambda f =$$

$$\mathring{R}_\lambda f + (f, \varphi_{\bar{\lambda}})^T [E - \Omega(\lambda)] [C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{-1} \Phi_{\lambda\lambda}^{-1} \varphi_\lambda,$$

$$R_{\bar{\lambda}} = R_\lambda^*, \lambda \in \mathbf{C}^+ \quad (1.5)$$

où \mathring{R}_λ est la résolvante de \mathring{A} , $\Omega(\lambda) \in \Phi$. La formule (1.5) définit une résolvante d'un prolongement auto-adjoint de A si, et seulement si, $\Omega(\lambda)$ est une matrice constante unitaire.

2. FONCTIONS SPECTRALES DES OPERATEURS REGULIERS.

1- Rappelons qu'un nombre complexe λ est appelé de type régulier de A s'il existe $k = k(\lambda) > 0$ tel que pour tout $f \in D(A)$: $\|(A - \lambda I)f\| \geq k\|f\|$. Pour un opérateur symétrique, chaque point non réel est un point de type régulier. Un opérateur symétrique A est appelé régulier si tous les points réels sont de type régulier de A . On a la propriété suivante [5]: si un prolongement auto-adjoint d'un opérateur symétrique A possède un spectre discret, alors chaque prolongement auto-adjoint possède un spectre discret. Pour que ce cas ait lieu, il faut et il suffit que l'opérateur A soit régulier.

2- on supposera que A est régulier et, en outre, il est simple, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-espace $H_1 \subset H$ sur lequel A est auto-adjoint.

Soit \mathring{A} un prolongement auto-adjoint de A défini sur

$$D(\mathring{A}) = D(A) \dot{+} (V - I)\mathfrak{N}_i$$

où $V \in \mathfrak{R}$ et V applique P_i sur P_{-i} . Comme A est régulier, le spectre de \mathring{A} est discret; on le désigne par $\{a_k\}_1^\infty$ et on désigne par $\{\psi_k\}_1^\infty$ la suite orthonormée complète de fonctions propres de \mathring{A} associées à $\{a_k\}_1^\infty$. On supposera, de plus, la simplicité du spectre de \mathring{A} . On a:

$$\mathring{A}f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (f, \psi_k) \psi_k, \quad f \in D(\mathring{A}),$$

$$\mathring{R}_\lambda g = R_\lambda(\mathring{A})g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g, \psi_k)}{a_k - \lambda} \psi_k, \quad g \in H$$

On suppose $\dim P_{-i} = \dim P_i = p \leq n$ et encore $\varphi_\lambda^{(k)} \in P_{\bar{\lambda}}, k = 1, \dots, p, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Lemme 2.1 [1]. Les décompositions des $\varphi_\lambda^{(j)} = \mathring{U}_{\lambda i} \varphi_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$ sont données par

$$\varphi_\lambda^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{(j)}}{a_k - \lambda} \psi_k,$$

où $\gamma_k^{(j)}$ ne dépend pas de λ et vérifient les conditions:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k^{(j)}|^2 < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k^{(j)}|^2 = \infty, \quad j = p+1, \dots, n.$$

Lemme 2.2 [1]. Pour tout $f, g \in H$, les fonctions-matrices $(f, \varphi_{\bar{\lambda}})^T \Phi_{\lambda, -i}^{-1}$ et $\Phi_{\lambda, -i}^{-1}(\varphi_\lambda, g)$ sont régulières dans la bande $0 \leq \operatorname{Im} \lambda < 1$ et quel que soit $\nu = 1, 2, \dots$:

$$\operatorname{res}_{a_\nu}(\mathring{R}_\lambda f, g) = \operatorname{res}_{a_\nu} (f, \varphi_{\bar{\lambda}})^T \Phi_{\lambda, -i}^{-1}(\varphi_\lambda, g) = (f, \psi_\nu)(\psi_\nu, g) \quad (2.1)$$

Lemme 2.3 [6]. Soit $N(\lambda)$ une fonction-matrice régulière dans \mathbf{C}^+ et vérifiant la condition $\operatorname{Im} N(\lambda) \geq 0$, $\theta_1(\lambda)$ et $\theta_2(\lambda)$ des fonctions-matrices régulières dans un domaine contenant le segment $[\alpha, \beta]$ et telles que le produit $\theta_1(\lambda)N(\lambda)\theta_2(\lambda)$ a un sens. On a l'expression suivante:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} [\theta_1(\lambda)N(\lambda)\theta_2(\lambda) - \theta_1(\bar{\lambda})N^*(\lambda)\theta_2(\bar{\lambda})] d\sigma = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \theta_1(\sigma) dS(\sigma) \theta_2(\sigma), \quad \lambda = \sigma + i\tau \end{aligned}$$

$$\text{où:} \quad S(\sigma) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^{\sigma} \operatorname{Im} N(t + i\tau) dt$$

3. RESULTAT ESSENTIEL

Théorème 2.1. Soient $\Omega(\lambda)$ une fonction-matrice de Φ , $E_t, -\infty < t < +\infty$ la fonction spectrale de A associée à $\Omega(\lambda)$. Pour tout nombre réel σ , on définit la matrice $\rho(\sigma)$

$$\rho(\sigma) = \int_0^{\sigma} \Phi_{t, -i}^{-1} d\tilde{\rho}(t) \Phi_{ii}^{-1},$$

où

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{\pi} \Phi_{ii} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^t \operatorname{Re} \left\{ [C(\lambda)\Omega(\lambda) + E][C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{-1} \right\} d\sigma$$

($\lambda = \sigma + i\tau$). Alors pour tout $f, g \in H$ et tout α, β ($\alpha < \beta$), on a l'égalité

$$(E_{\alpha\beta} f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} (f, \varphi_{\sigma})^T d\rho(\sigma) (\varphi_{\sigma}, g) \quad (2.3)$$

où $E_{\alpha\beta} = E_{\beta+0} - E_{\alpha}$.

Démonstration. Grâce aux égalités [1]

$$\Phi_{\lambda i} = i[\Phi(\zeta) + \Phi_{ii}], \quad \Phi_{\lambda, -i} = i[\Phi(\zeta) - \Phi_{ii}] \quad (2.4)$$

$$\text{où } \Phi(\zeta) = \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} d(\mathring{E}_t \varphi_i^{(k)}, \varphi_i^{(s)}) \right]_{k, s=1}^n.$$

Les formules (1.5) peuvent être ramenées aux formes

$$\begin{aligned} R_{\lambda} f &= \mathring{R}_{\lambda} f - (f, \varphi_{\bar{\lambda}})^T \Phi_{\lambda, -i}^{-1} \Phi_{ii} [C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{-1} \Phi_{\lambda i}^{-1} \varphi_{\lambda} \\ &\quad - (f, \varphi_{\bar{\lambda}})^T \Phi_{\lambda, -i}^{-1} \Phi_{\lambda}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\bar{\lambda}} f &= \mathring{R}_{\bar{\lambda}} f - (f, \varphi_{\lambda})^T \Phi_{\bar{\lambda}, -i}^{-1} \Phi_{ii} [C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{*-1} \Phi_{\bar{\lambda} i}^{-1} \varphi_{\bar{\lambda}} \\ &\quad - (f, \varphi_{\lambda})^T \Phi_{\bar{\lambda}, -i}^{-1} \Phi_{\bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Soient α et β , $\alpha < \beta$, deux nombres réels arbitraires. En appliquant la formule de Stieltjes, a

$$(E_{\alpha\beta} f, g) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} [(R_{\lambda} - R_{\bar{\lambda}}) f, g] d\sigma =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (f, \varphi_{\lambda})^T \Phi_{\lambda, -i}^{-1} \Phi_{ii} [C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{*-1} \Phi_{\bar{\lambda} i}^{-1} (\varphi_{\bar{\lambda}}, g) \right. \\ & \quad \left. - (f, \varphi_{\bar{\lambda}})^T \Phi_{\bar{\lambda}, -i}^{-1} \Phi_{ii} [C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{-1} \Phi_{\lambda i}^{-1} (\varphi_{\lambda}, g) \right\} d\sigma \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ [(R_{\lambda} f, g) - (f, \varphi_{\bar{\lambda}})^T \Phi_{\lambda, -i}^{-1} (\varphi_{\lambda}, g)] \right. \\ & \quad \left. - [(R_{\bar{\lambda}} f, g) - (f, \varphi_{\lambda})^T \Phi_{\bar{\lambda}, -i}^{-1} (\varphi_{\bar{\lambda}}, g)] \right\} d\sigma \end{aligned}$$

où $\lambda = \alpha + i\tau$.

On sait [1] que la fonction $C(\lambda) = \Phi_{\lambda i}^{-1} \Phi_{\lambda, -i}$ est régulière sur \mathbf{C}^+ y compris sur l'axe réel et, en outre, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}^+$, $\|C(\lambda)\| < 1$ et quel que soit σ réel $\|C(\sigma)\| = 1$. Il en résulte l'inégalité suivante

$$\operatorname{Im} \left\{ i[C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{-1} \right\} \geq 0.$$

En appliquant les lemmes 2.2 et 2.3 et en tenant compte de l'égalité

$$\operatorname{res}_{a_k} [(f, \varphi_{\lambda})^T \Phi_{\lambda, -i}^{-1} (\varphi_{\lambda}, g)] = \operatorname{res}_{a_k} [(f, \varphi_{\lambda})^T \Phi_{\bar{\lambda} i}^{-1} (\varphi_{\bar{\lambda}}, g)],$$

on obtient

$$(E_{\alpha\beta} f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} (f, \varphi_{\sigma})^T \Phi_{\sigma, -i}^{-1} d\tilde{\rho}_1(\sigma) \Phi_{\sigma i}^{-1} (\varphi_{\sigma}, g)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} (f, \varphi_{\sigma})^T [\Phi_{\sigma,-i}^{-1} - \Phi_{\sigma,i}^{-1}] (\varphi_{\sigma}, g) d\sigma \quad (2.4)$$

où $\tilde{\rho}_1(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \Phi_{ii} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^{\sigma} \operatorname{Re}[C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{-1} d\sigma$.

En tenant compte de (2.4), on a

$$\Phi_{\sigma,-i}^{-1} - \Phi_{\sigma,i}^{-1} = \Phi_{\sigma,-i}^{-1} [\Phi_{\sigma,i} - \Phi_{\sigma,-i}] \Phi_{\sigma,i}^{-1} = \Phi_{\sigma,-i}^{-1} \Phi_{ii} \Phi_{\sigma,i}^{-1} \quad (2.5)$$

et $(E_{\alpha\beta} f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} (f, \varphi_{\sigma})^T \Phi_{\sigma,-i}^{-1} d\tilde{\rho}(\sigma) \Phi_{\sigma,i}^{-1} (\varphi_{\sigma}, g)$,

où

$$\tilde{\rho}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \Phi_{ii} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^{\sigma} \operatorname{Re} \left\{ [C(\lambda)\Omega(\lambda) + E][C(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{-1} \right\} dt$$

avec $\lambda = t + i\tau$.

En posant $\rho(\sigma) = \int_0^{\sigma} \Phi_{i,-i}^{-1} d\tilde{\rho}(t) \Phi_{ii}^{-1}$, on aura (2.3).

4. CERTAINES PROPRIETES DU SPECTRE

Soit Δ un intervalle quelconque (fini ou infini) sur l'axe réel et $\Omega(\lambda) \in \Phi$. On suppose que:

1°) $\Omega(\lambda)$ est continûment prolongeable de \mathbb{C}^+ sur Δ .

2°) Pour tout $\sigma \in \Delta$, $\Omega(\sigma)$ est une matrice unitaire.

Corollaire 2.1. Soit A_{Ω} le prolongement quasi auto-adjoint de A associé à $\Omega(\lambda) \in \Phi$. L'intervalle Δ ne contient pas de points du spectre de A_{Ω} si, et seulement si, $\Omega(\lambda)$ vérifie les conditions 1°, 2° et, en outre, pour tout $\sigma \in \Delta$ $\det[C(\sigma)\Omega(\sigma) - E] \neq 0$.

Démonstration. Comme quel que soit $\sigma \in \Delta$ la matrice $C(\sigma)\Omega(\sigma)$ est unitaire et $\det[C(\sigma)\Omega(\sigma) - E] \neq 0$, alors

$$\operatorname{Re} \left\{ [C(\sigma)\Omega(\sigma) + E][C(\sigma)\Omega(\sigma) - E]^{-1} \right\} = 0.$$

On en déduit grâce à (2.2) et (2.3) que pour tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset \Delta$ et pour tout $f \in H : E_{\alpha\beta} f = 0$.

Remarque 2.1. Soit A un opérateur positif et $\Delta = (-\infty, +\infty)$. Le corollaire 2.1 devient le critère pour que A_{Ω} soit le prolongement positif de A .

Corollaire 2.2. Si $\Omega(\lambda) \in \Phi$ satisfait les conditions 1° et 2°, alors Δ ne contient que des points isolés du spectre de A_{Ω} , qui sont les zéros de $\det[C(\sigma)\Omega(\sigma) - E]$.

Corollaire 2.3. Le spectre du prolongement auto-adjoint A_U associé à une matrice unitaire $U \in \Phi$ coïncide avec les zéros de $\det[\Omega(\sigma) - U^*]$.

REFERENCES

- [1]- Alexandrov E.L., "Sur les résolvantes d'un opérateur symétrique", *Izvtstiya Vuzov, Math.*, N°7(98), (1970), pp. 3-12.
- [2]- Alexandrov E.L., "Fonctions spectrales des opérateurs auto-adjoints et symétriques de multiplication dans les espaces $L^2(X, \mu)$ ", *Math. Zametki*, V. 67, 6, (2000), pp. 803-810.
- [3]- Straus A.V., "Sur la décompositions spectrale d'un opérateur symétrique régulier", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 204, N°1, (1972), pp. 52-55.
- [4]- Naimark M.A., "Sur les prolongements auto-adjoints de deuxième espace d'un opérateur symétrique", *Izvtstiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.*, 4, N°1, 53, (1940).
- [5]- Krein M.G., "Positions principales de la théorie de présentation des opérateurs d'Hermite avec des indices de défaut (m, m) ", *Ukrain. Maths. J.*, 1, N°2, (1949), pp. 3-66.
- [6]- Straus A.V., "Sur les résolvantes généralisées et fonctions spectrales des opérateurs différentiels d'ordre pair", *Izvtstiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.*, 21, N°6, (1957). \square