Sciences & Technologie A – N°23, juin (2005), pp. 34-38.

LE PROBLEME DE STOKES ET LA TECHNIQUE DE GLOWINSKI

Reçu le 04/10/2004 – Accepté le 28/04/2005

Résumé

On propose dans ce travail une nouvelle technique pour formuler le problème de Stokes. Cette étude est utilisée pour découpler la pression de la vitesse durant la résolution du problème de Stokes. On montre que cette technique est équivalente à celle de Glowinski & Al [2], [3] et [5] et que cette nouvelle formulation est bien posée. Une analyse détaillée du problème est présentée.

Mots-clés: *Approximations Spectrales, Les problèmes de Stokes et Navier Stokes.*

Abstract

In this work, we propose a new technique in order to formulate Stoke's problem. This study is useful as it decouples the pressure from the velocity during the resolution of the Stoke's equation. The purpose of this paper is to show that this technique is equivalent to the one done by Glowinski & Al [2], [3] and [5] and this new formulation is well posed. A detailed analysis of the problem is presented.

Key-Words: *Spectral Approximations, Stokes & Navier Stokes Problems.*

K.AMOURA
F.Z.NOURI
Département de Mathématiques
Université de Annaba. Algérie.

ملخص

نقترح في هذا العمل تقنية جديدة لتشكيل مسألة ستوكس. هذه الدراسة مستعملة لفصل الضغط عن السرعة خلال حل هذه المسألة. نبرهن أن هذه التقنية مكافئة لتقنية قلوفينسكي [2] و [3]. نقدم نتائج تحليلية لوجود الحل ووحدانيته .
أخيرا نعالج مسألة النقطة السرجية و هذا لفحص المسألة بطريقة عددية أمثل.

الكلمات المفتاحية *: التقريبات الطيفية، مسائل ستوكس و نافي ستوكس*

On considère le problème de Stokes écrit en coordonnées cylindriques:

$$\begin{cases} -\upsilon\left(\partial_r^2 u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r - \frac{1}{r^2}u_r + \partial_r^2 u_r + \partial_r^2 u_z\right)\partial_r p = f_r & \text{dans } \Omega \\ -\upsilon\left(\partial_r^2 u_z + \frac{1}{r}\partial_r u_z + \partial_z^2 u_z\right)\partial_z p = f_z & \text{dans } \Omega \\ \partial_r u_r + \frac{1}{r}u_r + \partial_z u_z = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_r = 0\,;\, u_z = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \qquad (1.1)$$

Pour une donnée $f = (f_r, f_z)$ dans $(V_0^1)\times(H_0^1)$, il existe

$$u = (u_r, u_z) \in (V_0^1)\times(H_0^1)$$

La divergence nulle peut-être écrite comme suit:

$$\partial_r(r u_r) + \partial_z(r u_z) = 0\,, \qquad \text{dans } \Omega \qquad (1.2)$$

L'équation (1.2) montre que le vecteur $(r u_r, r u_z)$ est à divergence nulle. En utilisant le théorème 3.1 du chapitre 1 dans [4], il existe une fonction ψ vérifiant:

$$\begin{pmatrix} r u_r \\ r u_z \end{pmatrix} = ru = \mathrm{rot}(\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_z \varphi \\ -\partial_r \varphi \end{pmatrix}$$

En posant $\varphi = r\psi$, on obtient: $\partial_z \varphi = r\partial_z \psi$, $-\partial_r \varphi = -\psi - r\partial_r \psi$.

On a alors:

$$\begin{cases} u_r = \partial_z \psi \\ u_z = -\frac{1}{r}(\partial_r (r\psi)) \end{cases} \qquad (1.3)$$

Maintenant, on note (1.2) par $\mathrm{div}_r u$ qui s'écrit sous la forme suivante:

$$\partial_r u_r + \frac{1}{r} u_r + \partial_z u_z = 0$$

et $\mathrm{rot}_r \Psi$ le vecteur $\left(\partial_z \psi, -\frac{1}{r}\partial_r (r\psi)\right)$. On introduit aussi l'opérateur Rot donné par:

$\mathrm{Rot}(v) = {(\partial_r v_z - \partial_z v_r)}/{\upsilon} = (v_r, v_z)$ tel que $v = (v_r, v_z)$ sachant que pour chaque fonction ψ, on a:

$$\mathrm{rot}\psi = \begin{pmatrix} \partial_z \psi \\ -\partial_r \psi \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire:

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{rot}\psi) = -\Delta\psi \qquad (1.4)$$

Si $divv = 0$, on a alors $\mathrm{rot}(\mathrm{Rot}(v)) = -\Delta v$

Si on définit l'opérateur Δ_r par:

$$\Delta_r \psi = \partial_r^2 \psi + \frac{1}{r}\partial_r \psi - \frac{1}{r^2}\psi + \partial_z^2 \psi$$

On peut remarquer facilement que:

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{rot}_r \psi) = -\Delta_r \psi \qquad (1.5)$$

2. PROBLEME CONTINU

La question qui se pose maintenant: quelles sont les conditions nécessaires sur le bord pour assurer l'existence et l'unicité de la fonction courant ψ définie par:

$$\begin{cases} u_r = \partial_z \psi \\ u_z = -\frac{1}{r}\partial_r (r\psi) \end{cases} \qquad (2.1)$$

et en déduire sa régularité à partir de la régularité de la vitesse u, la solution du problème de Stokes. Pour cela, on considère l'espace suivant:

$$H_1(\mathrm{div}_r, \Omega) = \left\{ v \in \left(L_1^2(\Omega)\right)^2 / \mathrm{div}_r v \in L_1^2(\Omega) \right\}$$

muni de la norme:

$$\|v\|_{H_1(\mathrm{div}_{rr}, \Omega)} = \left(\|v\|^2_{(L_1^2(\Omega))^2} + \|\mathrm{div}_r v\|^2_{L_1^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$L_1^2(\Omega) = \left\{ v \text{ carré integrable tel que } \int_\Omega v^2(r,z) r dr dz < \infty \right\}$$

On définit aussi l'espace:

$$H_1^1(\Omega) = \left\{ v \in L_1^2(\Omega) \text{ tel que } \nabla v = (\partial_r v, \partial_z v) \in \left(L_1^2(\Omega)\right)^2 \right\}$$

$$H_{1,0}^1(\Omega) = \left\{ v \in H_1^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } {\partial\Omega}/{\Gamma_0} \right\}.$$

Ici Γ_0 est l'intérieur de la frontière de Γ. Notons que l'opérateur sur le bord est défini et continu de $H_1^1(\Omega)$ dans $H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On rappelle que $H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ coïncide avec $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ aux points de $\overline{\Gamma_0}$ I $\overline{\Gamma}$. De la même manière, on définit l'opérateur normal sur le bord qui est continu de $H_1^1(\mathrm{div}_r, \Omega)$ dans $H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, le dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ par :

$$\forall v \in H_1(\mathrm{div}_r, \Omega), \quad \forall q \in H_1^1(\Omega),$$

$$(v.n, q)_\Gamma = \int_\Omega (\mathrm{div}_r v.q)(r,z) r dr dz + \int_\Omega (v.\nabla q)(r,z) r dr dz \qquad (2.2)$$

$(.,.)_\Gamma$ est le produit scalaire de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ avec la mesure $d\tau = rdr$ sur le côté parallèle à oz et $= dz$ sur les deux côtés de Γ.

Proposition 2.1

Pour tout $\forall v \in H_1(\mathrm{div}_r, \Omega)$ tel que $\mathrm{div}_r v = 0$ et $v.n_r = 0$, il existe une fonction $\varphi \in V_1^1(\Omega)$ tel que $v = \mathrm{rot}\varphi$. $V_1^1(\Omega)$ est l'espace défini par:

$$V_1^1(\Omega) = \left\{ v \in H_1^1(\Omega) \text{ tel que } r^{1+m-1} \partial_r^1 \partial_z^m v \in L_1^2(\Omega);\ 0 \le 1 + m \le 1 \right\}$$

Preuve:

$\forall v \in H_1(\mathrm{div}_r, \Omega)$, on a:

$$0 = \mathrm{div}_r v = \frac{1}{r}(\partial_r (rv) + \partial_z (rv)) = \frac{1}{r}(\mathrm{div}_r (rv)) \Rightarrow (rv.n, 1)_\Omega = 0$$

A partir du théorème 3.1 dans [4], $\exists \varphi \in H^1(\Omega)$ tel que $v = \mathrm{rot}\varphi$. Si on pose $\Phi = \frac{1}{r}\varphi$ vérifiant $v = \mathrm{rot}_r \Phi$, on a $\partial_z \Phi \in L_1^2(\Omega)$ et $\frac{1}{r}\partial_r (r\Phi) \in L_1^2(\Omega)$. Par intégration par partie, On obtient:

$$\frac{\partial (r\Phi)}{\partial \tau} = 0 \quad sur \quad \Gamma$$

où $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ est la dérivée tangentielle donnée par:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \nabla \varphi . \tau$$

La fonction $r\Phi = C_i$ sur chaque composante $\Gamma_i \Big|_{i=1}^{I}$ de $\partial\Omega$ où $C_i = 0$ sur celles qui touchent l'axe $\{r = 0\}$, alors $\varphi \in V_1^1(\Omega)$.

Définissons maintenant les conditions sur le bord pour la fonction courant. Alors, on considère $v \in H_1(\mathrm{div}_r, \Omega)$ tel que $\mathrm{div}_r v = 0$. On note par φ la fonction associée à v, par la proposition précédente, on a $r\varphi = c$ (une constante) sur Γ. Cependant Γ touche l'axe $\{r = 0\}$, alors $c = 0$ et $\varphi|_\Gamma = 0$. D'où le résultat suivant:

Corollaire 2.2:

Soit $v \in H_1(\mathrm{div}_r, \Omega)$ telle que $\mathrm{div}_r, v = 0$ et $v.n|_\Gamma = 0$. Si φ est la fonction courant associée à v, alors φ est la solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \varphi \in V^1_{1,0}(\Omega), \\ \int (\mathrm{rot}_r \varphi . \mathrm{rot}_r \chi)(r,z) r dr dz = \int (v.\mathrm{rot}_r \chi)(r,z) r dr dz \quad \forall \chi \in V|^1_{1,0}(\Omega) \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour étudier ce dernier, on introduit l'espace :

$$H_1(\mathrm{rot}, \Omega) = \left\{ v \in \left(L^2_1(\Omega)\right)^2 \quad \text{tel que } \mathrm{rot}(v) \in L^2_1(\Omega) \right\}$$

et on définit l'opérateur sur le bord:

$$H_1(rot, \Omega) \to H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma),$$

donné par:

$$\begin{cases} \forall v \in H_1(\mathrm{rot}, \Omega), \quad \forall \chi \in V^1_1(\Omega) \\ \langle v.\tau, \chi \rangle_\Gamma = \int_\Omega (v \cdot \mathrm{rot}_r \chi)(r,z) r dr dz - \int_\Omega \mathrm{rot}(v) \chi(r,z) r dr dz \end{cases} \tag{2.4}$$

Donc on peut écrire (2.3) comme suit:

$$\begin{cases} -\Delta_r \varphi = \mathrm{rot}(v) \quad \text{dans } D(\Omega) \\ \varphi = 0 \qquad \text{sur } \Gamma \\ \left(\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial (r\varphi)}{\partial n} + v\tau \right)\Big|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Où $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi . n$.

Remarque 2.3:

Si on prend $\chi \in D(\Omega)$, donc (2.3) implique (2.5) en utilisant (2.4). La deuxième condition sur le bord est déduite de:

$$v.\tau = \mathrm{rot}_r \varphi.\tau = \partial_z \varphi \tau_r - \frac{1}{r} \partial_r (r\varphi) \tau_z \text{ où } \tau_r = n_z \text{ et } \tau_z = n_r.$$

Proposition 2.4:

Pour tout $v \in V^1_{1,0}(\Omega) \times H^1_{1,0}(\Omega)$ tel que $\mathrm{div}_r(v) = 0$ et $v.n|_\Gamma = 0$, alors il existe une fonction courant $\varphi \in V^2_1(\Omega)$ tel que $v = \mathrm{rot}\, \varphi$ vérifiant $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sur Γ. Ici l'espace $V^2_1(\Omega)$ est défini par :

$$V^2_1(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2_1(\Omega) \text{ tel que } r^{l+m-2} \partial^l_r \partial^m_z \varphi \in L^2_1(\Omega), \ 0 \le l + m \le 2 \right\}$$

Remarque 2.5:

Pour la démonstration de cette proposition, on utilise l'inégalité de Hardy (Voir [1] et [5]).

FONCTION COURANT-TOURBILLON :

Dans cette section, on introduit une nouvelle inconnue appellée fonction Tourbillon $w = rot(u)$, ce qui donne:

$$-\Delta u = rot_r w \tag{3.1}$$

Δ est appliqué à (u_r, u_z) dans les deux premières équations de (1.1). Si on substitut ce résultat dans (1.1), on obtient:

$$\begin{cases} -v \partial_z w + \partial_r p = f_r \\ -v \dfrac{1}{r} \partial_r (rw) + \partial_z p = f_z \end{cases} \tag{3.2}$$

L'intérêt de la formulation (3.2) est de découpler la pression de la vitesse pour obtenir un problème du Laplacien pour la pression. Pour cela, on dérive la première équation par rapport à z et la seconde par rapport à r et la soustraire de la première, pour obtenir:

$$-\Delta_r \omega = \frac{1}{\upsilon} (\partial_z f_r - \partial_r f_z) \tag{3.3}$$

où $u = rot_r \psi$ et $\omega = -\Delta_r \psi$.

Alors, on peut conclure que cette formulation est équivalente à celle faite par Glowinski et Pironneau dans [2], [3] et [4].

3.1 Problème variationnel:

Le problème variationnel s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} -\Delta_r \omega = \mathrm{rot}(f) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_r \psi = \omega & \text{dans } \Omega \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{dans } \Gamma \end{cases} \tag{P}$$

Le problème (P) est exactement un problème de Dirichlet pour l'opérateur bi-harmonique Δ^2_r, où la solution est la fonction courant ψ telle que:

$$\begin{cases} -\Delta^2_r \psi = \mathrm{rot}(f) & \text{dans } \Omega \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{dans } \Gamma \end{cases}$$

Soit $\omega = -\Delta_r \psi$ et supposons que $\lambda = \omega|_\Gamma$ est connue. Donc, résoudre (P) revient à résoudre les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} -\Delta_r \omega = \mathrm{rot}(f) & \text{dans } \Omega \\ \lambda = \omega & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{P1}$$

$$\begin{cases} -\Delta_r \psi = \omega & \text{dans } \Omega \\ \psi|_\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{P2}$$

Soit $A : \lambda \to \dfrac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_\Gamma$. A est un opérateur linéaire, symétrique, défini positif et fortement elliptique de $H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ avec λ solution de $A\lambda = -\dfrac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_\Gamma$.

Pour démonter l'existence et l'unicité du problème (P), on a besoin d'introduire quelques définitions et résultats de l'analyse fonctionnelle:

Soient alors, les espaces suivants:

$$H_1^2(\Omega)=\left\{v\in L_1^2(\Omega) \text{ tel que } \left(\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial v}{\partial z}\right)\in L_1^2(\Omega)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial r\partial z}\in L_1^2(\Omega)\right\}$$

$$V_1=H_1^2(\Omega)\cap H_{1,0}^1(\Omega)=\left\{v\in H_1^2(\Omega) \text{ tel que } v\big|_\Gamma=0\right\}$$

$$H_{1,0}^2(\Omega)=\left\{v\in H_1^2(\Omega) \text{ tel que } v\big|_\Gamma=\frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_\Gamma=0\right\}$$

$H_1^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(u,v)_{H_1^2(\Omega)}=(u,v)_{L_1^2(\Omega)}+\left(\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{L_1^2(\Omega)}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z},\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial z}\right)_{L_1^2(\Omega)}$$

Si Ω est borné ayant une frontière assez régulière , on a la proposition suivante:

Proposition 3.2.:

L'application $v\to\|\Delta u\|_{L_1^2[\Omega]}$ définit une norme sur V_1 équivalente à la norme induite par $H_1^2(\Omega)$.

On introduit aussi les espaces:

$$H_1(\Omega,\Delta)=\left\{v\in L_1^2(\Omega) \text{ tel que } \Delta v\in L_1^2(\Omega)\right\}$$

$$M=\left\{v\in H_1(\Omega,\Delta) \text{ tel que } \Delta v=0\right\}$$

$H_1(\Omega,\Delta)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(u,v)_{H_1(\Omega,\Delta)}=(u,v)_{H_1(\Omega)}+(\Delta u,\Delta v)_{H_1(\Omega)}$$

3.3 QUELQUES PROPRIETES DE {γ_0, γ_1}

1- L'application $\{\gamma_0,\gamma_1\}$ est linéaire et continue de :

$$H_1(\Omega,\Delta)\to H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H_1^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$$

2- $\{\gamma_0,\gamma_1\}: H_1^2(\Omega)\to H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H_1^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$

3- $\gamma_1: V_1\to H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

4- $\gamma_0: M\to H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (isomorphisme).

On note les produits scalaires associés à ces espaces par:

$$\langle .,.\rangle_{H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{et} \quad \langle\langle .,.\rangle\rangle_{H_1^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times H_1^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)}$$

Les formules de Green donnent:

$$\forall u\in H_1^2(\Omega),\ \forall v\in H_1(\Omega,\Delta_r),$$

$$\int_\Omega v\Delta_r u\,r\,dr\,dz-\int_\Omega u\Delta_r v\,r\,dr\,dz=\langle\gamma_1 u,\gamma_0 v\rangle-\langle\langle\gamma_0 u,\gamma_1 v\rangle\rangle.$$

Supposons que $\mathrm{rot}(f)\in L_1^2(\Omega)$, alors on a le théorème suivant:

Théorème 3.3.1:

Le problème (P) admet une solution unique dans $H_1^2(\Omega)$.

Proposition 3.3.2:

Il est facile de remarquer que le problème (P) est équivalent à:

$$\begin{cases}-\Delta_r\omega=rot(f) & \text{dans } \Omega\\ -\Delta_r\psi=\omega & \text{dans } \Omega\\ \psi=0 & \text{sur } \Gamma\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n}=0 & \text{sur } \Gamma\end{cases}$$

Dans toute la suite la trace de ω jouera un grand rôle théorique et numérique.

Proposition 3.3.3 :

Si $\mathrm{rot}(f)\in L_1^2(\Omega)$, alors ω admet une trace $\gamma_0\omega\in H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Preuve:

Puisque $\psi\in H_1^2(\Omega)$, $\omega=-\Delta\psi\in L_1^2(\Omega)$.

D'après le problème (P):

$$\Delta\omega=-\mathrm{rot}(f)\in L_1^2(\Omega),\Rightarrow\omega\in H_1(\Omega,\Delta_r).$$

et d'après la première propriété de γ_0 on a : $\gamma_0\omega\in H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

3.4 Etude de la relation entre $\gamma_0\omega$ et $\gamma_1\psi$

Pour cela, on propose le lemme suivant:

Lemme 3.4.1:

Soit $\lambda\in H_1^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$, alors on a:

(i) Le problème:

$$\begin{cases}\Delta^2\psi=0, & \text{dans } \Omega\\ \psi=0, & \text{sur } \Gamma\\ -\Delta\psi=\lambda & \text{sur } \Gamma\end{cases}$$

admet une solution unique dans $V_1=H_1^2(\Omega)\cap H_{1,0}^1(\Omega)$.

(ii) Si ψ est solution de (i) dans V_1, l'opérateur A défini par:

$$A\lambda=\frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_\Gamma$$

est un isomorphisme de $H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

(iii) La forme bilinéaire :

$a: H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to\Re$ définie par :

$a(\lambda,\mu)=\langle A\lambda,\mu\rangle$ est continue, symétrique et $H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$-elliptique. Pour les détails voir lemme 3.8 dans [5]. Ce résultat implique le théorème suivant:

Théorème 3.4.2:

Soit ψ la solution du problème (P), alors la trace λ de $-\Delta\psi$ sur Γ est la solution unique de l'équation variationnelle linéaire:

$$\langle A\lambda,\mu\rangle = \langle \frac{\partial\psi}{\partial n},\mu\rangle, \qquad \forall\mu \in H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\ \lambda \in H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \qquad (*)$$

Preuve:

D'après le lemme précédent et le problème donné par:

$$\begin{cases} \Delta_r^2\psi = 0, & \text{dans } \Omega \\ \psi = 0, & \text{sur } \Gamma \\ -\Delta_r\psi = \lambda & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

on a:

$$\langle A\lambda,\mu\rangle = \langle \frac{\partial\psi}{\partial n},\mu\rangle, \qquad \forall\mu \in H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

donc λ est solution de (*) (d'après le lemme de Lax-Milgram).

$\{\lambda,\mu\} \longrightarrow \langle A\lambda,\mu\rangle$ est bilinéaire, continue et $H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$- elliptique.

4- CONCLUSION

Dans ce travail, on a proposé une technique similaire à celle de Glowinski & Al [3] et on remarque bien que le problème de Stokes est réduit en une suite de problèmes de point selle; où les inconnues sont les fonctions courant et tourbillon. Ceci est d'un grand intérêt surtout du point de vue numérique.

REFERENCES

[1] C.Bernardi & Y.Maday, Approximation results for spectral methods with domain decomposition , App. Num. Maths. Vol 6 (1998).

[2] R. Glowinski, Numerical Methods for nonlinear problems, Springer Verlag(1982).

[3] R. Glowinski & O.Pironneau, Numerical Methods for the first biharmonic equation, SIAM SIREV, Vol 21 No 2 (1979).

[4] V. Girault, P. Raviart, Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer Verlag, New-York (1986)

[5] F.Z. Nouri, A New Fitting for a Spectral Method for the solution of Stokes of Problem, Presented in the Benial Conference of Numerical Analysis, Dundee (Juin 1999).(Abstracts-Dundee-AN 099).