Sciences & Technologie – N°17, Juin (2002), pp. 19-24.

ETUDE VARIATIONNELLE DU CONTACT SANS FROTTEMENT ENTRE UN CORPS ELASTIQUE ET UNE FONDATION RIGIDE

Reçu le 06/12/2000 – Accepté le 12/05/2002

Résumé

Le but de ce travail est l'étude variationnelle du contact sans frottement entre un corps élastique et une fondation rigide. La loi de comportement de ce corps est non-linéaire et le contact est modélisé par les conditions de Signorini. Ce travail est divisé en trois parties. La première est destinée à définir quelques outils de l'analyse fonctionnelle. La seconde est consacrée aux résultats d'existence et d'unicité de la solution. La troisième est réservée à l'étude de quelques propriétés de la solution. Ce travail diffère de celui de Drabla, Sofonea et Teniou [1] par l'étude de nouvelles propriétés de la solution qui sont dues à l'introduction d'un paramètre dans la loi de comportement et le changement d'une condition aux limites.

***Mots clés**: Elasticité, Contact sans frottement, Conditions de Signorini, Opérateur fortement monotone, Inéquations variarionnelles, Pénalisation.*

Abstract:

The purpose of this work is the variational study of contact without friction between body and a rigid foundation. The elastic constitutive law is nonlinear. This work is divided in three parties. The first is destined to define some tools of functional analysis. The second is devoted to existence and uniqueness results of the solution. The third is reserved to study some properties of the solution. The difference between this work and that in Drabla, Sofonea and Teniou [1] reside in study of news properties of the solution.

***Key words:** Elasticity, contact without friction, Signorini conditions, Variational inequations, Penalisation.*

B. TENIOU
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mentouri
Constantine, Algérie

ملخص

إن الهدف من هذا العمل هو الدراسة التغيرية لتلامس جسم مرن بقاعدة صلبة دون احتكاك مع العلم أن قانون استجابة هذا الجسم غير خطي و يخضع التلامس إلى شروط Signorini . يتكون هذا العمل من ثلاثة أجزاء. الجزء الأول يعرف بعض أدوات التحليل الدالي و الجزء الثاني يتطرق إلى وحدانية وجود الحل، أما الجزء الثالث فخصص لدراسة بعض خصائص الحل.

إن الفرق بين هذا العمل و ذلك المذكور في [1] يكمن في إدخال وسيط في قانون الاستجابة وارتباط الحل بهذا الوسيط و في تغيير شرط حدي.

***الكلمات المفتاحية:** المرونة، التلامس دون احتكاك، شروط Signorini ، مؤثر رتيب بقوة، المتراجحات التغيرية.*

1-DEFINITIONS ET NOTATIONS

Dans les définitions qui suivent, nous adoptons les notations d'Einstein.

On note par:

Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ (N=2,3).

Γ la frontière de Ω.

Γ_i (i = 1,2,3) une partie de Γ.

S_N l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^N$.

$D(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à supports compacts inclus dans Ω.

$D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

$D = D(\Omega)^N$

$D' = D'(\Omega)^N$

$\mathcal{D}' = \left\{\sigma = (\sigma_{ij})/\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in D'(\Omega),\ i, j = \overline{1,N}\right\}$

Les opérateurs différentiels du premier ordre $\varepsilon : D' \to \mathcal{D}'$ et $Div: \mathcal{D}' \to D'$ sont définis au sens des distributions par:

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), Div\sigma = (\sigma_{ij,j}) \quad i, j = \overline{1,N}$$

$$H = \left\{u = u(i) / u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1,N}\right\} = L^2(\Omega)^N$$

$$\mathcal{H} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i, j = \overline{1,N}\right\} = L^2(\Omega)_s^{N\times N}$$

$$H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} = H^1(\Omega)^N$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / Div\sigma \in H\}$$

Les espaces $H, \mathsf{H}, H_1, \mathsf{H}_1$ munis de leurs produits scalaires respectifs définis par

$$\langle u,v\rangle_H = \int_\Omega u_i v_i dx \qquad \forall u,v \in H$$

$$\langle \sigma,\tau\rangle_{\mathsf{H}} = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \qquad \forall \sigma,\tau \in \mathsf{H}$$

$$\langle u,v\rangle_{H_1} = \langle u,v\rangle_H + \langle \varepsilon(u),\varepsilon(v)\rangle_{\mathsf{H}} \quad \forall u,v \in H$$

$$\langle \sigma,\tau\rangle_{\mathsf{H}_1} = \langle \sigma,\tau\rangle_{\mathsf{H}} + \langle Div\sigma, Div\tau\rangle_H \quad \forall \sigma,\tau \in \mathsf{H}_1$$

sont des espaces de Hilbert. Les normes associées à ces produits scalaires seront notées $|.|_H, |.|_{\mathsf{H}}, |.|_{H_1}, |.|_{\mathsf{H}_1}$.

L'application $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité

$$\gamma u = u|_\Gamma \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})^N$$

est dite application trace. L'image de H_1 par γ est notée $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$. Soit H'_Γ le dual de H_Γ, alors, pour tout $\sigma \in \mathsf{H}_1$, on a:

$$\langle \sigma\upsilon, \gamma v\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(v)\rangle_{\mathsf{H}} + \langle Div\sigma, v\rangle_H \quad \forall v \in H_1$$

et si $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N\times N} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})\}$, alors

$$\langle \sigma\upsilon, \gamma v\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\upsilon v ds \quad \forall v \in H_1$$

Dans le problème que l'on va étudier, $mes\Gamma_1 > 0$, alors l'inégalité de Korn

$$|\varepsilon(u)|_{\mathsf{H}} \geq C|u|_{H_1} \quad \forall u \in V$$

est vérifiée avec *C*, une constante strictement positive qui dépend de Ω et Γ_1. L'espace *V* défini par

$$V = \{u \in H_1 / u = 0 \quad sur\ \Gamma_1\}$$

est un sous –espace fermé de H_1.

2- RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE

2.1- Formulation du problème mécanique et hypothèses

On considère un corps élastique dont les particules occupent un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ (N = 1,2,3) et dont la frontière Γ, supposée suffisamment régulière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que mesure $\Gamma_1 > 0$. On suppose que le champ des déplacements s'annule sur Γ_1, que des tractions superficielles h s'appliquent sur Γ_2 et que des forces volumiques f agissent sur Ω. On suppose aussi que le corps Ω repose sur une fondation rigide par la partie Γ_3 de sa frontière et que le contact s'effectue sans frottement, c'est-à-dire que les mouvements tangentiels sont complètement libres. On précise encore que le corps Ω a une loi de comportement de la forme $\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$ (où θ est un paramètre donné qui peut être la température, l'humidité, l'intensité du champ magnétique, l'état d'endommagement du matériau ou tout autre effet qui peut influencer les coefficients dans la loi de comportement).

La présence de la température dans les lois de comportement en tant que paramètre est une hypothèse simplificatrice utilisée par Ionescu et Sofonea [2], Sofonea [3], Cristescu et Suliciu [4] et Lions [5].

Sous ces considérations, le problème que l'on va étudier peut se formuler de la manière suivante:

Problème P. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \to S_N$ tels que

$$\sigma = F(\varepsilon(u),\theta) \quad \text{dans } \Omega \tag{2.1}$$

$$Div\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \tag{2.3}$$

$$\sigma\upsilon = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \tag{2.4}$$

$$u_\upsilon \leq 0\,, \sigma_\upsilon \leq 0\,, \sigma_\tau = 0\,, \sigma_\upsilon u_\upsilon = 0 \quad sur\ \Gamma_3 \tag{2.5}$$

Hypothèses. Pour l'étude du problème mécanique (*P*), on considère les hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} F : \Omega \times S_N \times \mathsf{R}^M \to S_N \text{ est une application telle que} \\ \text{(a) } \exists m > 0 \text{ tel que} \\ \qquad (F(x,\varepsilon_1,\theta) - F(x,\varepsilon_2,\theta)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in S_N \quad \forall \theta \in \mathsf{R}^M \\ \text{(b) } \exists L_1, L_2 > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |F(x,\varepsilon_1,\theta_1) - F(x,\varepsilon_2,\theta_2)| \leq L_1|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + L_2|\theta_1 - \theta_2| \\ \text{(c) } \forall \varepsilon \in S_N \quad \forall \theta \in \mathsf{R}^M \text{, la fonction } x \mapsto F(x,\varepsilon,\theta) \text{ est} \\ \text{mesurable au sens de Lebesgue p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(d) } F(x,0_N,0_M) = 0_N \end{cases} \tag{2.6}$$

$$f \in H, \quad h \in L^2(\Gamma_2)^N \tag{2.7}$$

$$\theta \in L^2(\Omega)^M \tag{2.8}$$

Remarque 1. Les hypothèses (2.6) nous permettent de considérer l'opérateur $\widetilde{F} : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ défini par

$$\widetilde{F}(\varepsilon,\theta)(x) = F(x,\varepsilon(x),\theta(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in \mathsf{H}$$

Par simplicité, on note dans la suite cet opérateur par *F*. Comme l'opérateur *F* est fortement monotone et de Lipschitz, il résulte donc que *F* est inversible et son inverse $F^{-1} : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ l'est aussi (voir [6]).

On munit l'espace *V* du produit scalaire suivant:

$$\langle u,v\rangle_V = \langle \varepsilon(u),\varepsilon(v)\rangle_{\mathsf{H}} \quad \forall u,v \in V \tag{2.9}$$

Grâce à l'inégalité de Korn, on peut vérifier facilement que les normes $|.|_V$ et $|.|_{H_1}$ sont équivalentes sur *V*.

De (2.7) et du théorème de Riesz-Fréchet, il résulte l'existence d'un élément unique $q \in V$ tel que:

$$\langle q,v\rangle_V = \langle f,v\rangle_H + \langle h,\gamma v\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V \tag{2.10}$$

En outre, on définit respectivement l'ensemble des "déplacements admissibles" et l'ensemble des "contraintes admissibles" suivants:

$$U_{ad} = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad v_\upsilon \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}$$

$$\textstyle\sum_{ad} = \{\tau \in \mathsf{H} / \langle \tau,\varepsilon(v)\rangle_{\mathsf{H}} \geq \langle q,v\rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}\}$$

2.2. Formulations variationnelles

Dans cette partie, on va donner deux formulations variationnelles du problème mécanique (*P*). Dans la première formulation, l'inconnue principale est le champ des déplacements *u*, alors que dans la seconde formulation, l'inconnue principale est le champ des contraintes σ. Le résultat conduisant à ces deux formulations est le suivant:

Lemme 1. *Sous les hypothèses* (2.6)-(2.7), *si* (u,σ) *est une solution du problème* (*P*), *alors on a:*

$$\begin{cases} u \in U_{ad}, \\ \langle F(\varepsilon(u),\theta),\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_H \geq \langle q, v-u\rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases}$$

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \left\langle F^{-1}(\sigma,\theta),\tau-\sigma\right\rangle_H \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est basée sur l'utilisation des définitions de U_{ad} et Σ_{ad}, l'application de la formule de Green, l'utilisation des lois de comportement et d'équilibre ainsi que les conditions aux limites du problème (*P*) (voir [1], page 79).

Le lemme précédent nous permet de donner les deux formulations variationnelles suivantes pour le problème mécanique (*P*):

Problème P₁. Trouver $u \in H_1$ tel que

$$u \in U_{ad}, \langle F(\varepsilon(u),\theta),\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_H \geq \langle q, v-u\rangle_V, \forall v \in U_{ad}$$

Problème P₂. Trouver $\sigma \in H_1$ tel que

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \left\langle F^{-1}(\sigma,\theta),\tau-\sigma\right\rangle_H \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}$$

2.3. Théorèmes d'existence et d'unicité

Pour l'existence et l'unicité des problèmes (P_1) et (P_2), nous avons les deux théorèmes suivants.

Théorème 1. *Soit mesure* $\Gamma_1 > 0$. *Sous les hypothèses* (2.6)-(2.7), *le problème* (P_1) *admet une solution unique* $u \in V$.

Démonstration.

(i) U_{ad} est un convexe fermé non-vide de H_1.

(ii) L'opérateur $A: V \to V$ défini par

$$\langle Aw, v\rangle_V = \langle F(\varepsilon(w),\theta),\varepsilon(v)\rangle_H \quad \forall v,w \in V$$

est fortement monotone et de Lipschitz. Alors, le théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques de premières espèces (voir [6]), entraîne l'existence d'un élément unique $u \in V$ tel que

$$u \in U_{ad}, \langle F(\varepsilon(u),\theta),\varepsilon(v)-\varepsilon(u)\rangle_H \geq \langle q, v-u\rangle_V, \forall v \in U_{ad}$$

D'où le théorème 1.

Théorème 2. *Soit mesure* $\Gamma_1 > 0$. *Sous les hypothèses* (2.6)-(2.7), *le problème* (P_2) *admet une solution unique* $\sigma \in H_1$.

Démonstration.

(i) Σ_{ad} est un convexe fermé non-vide de H.

(ii) L'opérateur $F: H \to H$ est fortement monotone de Lipschitz, donc son inverse F^{-1} l'est aussi. Alors le théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques de premières espèces (voir [6]) entraîne l'existence d'un élément unique $\sigma \in H_1$ tel que

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \left\langle F^{-1}(\sigma,\theta),\tau-\sigma\right\rangle_H \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}$$

ce qui prouve le théorème 2.

3. PROPRIETES DE LA SOLUTION

3.1. Un résultat d'équivalence

Dans cette partie, on étudie le lien entre la solution du problème (P_1) et celle du problème (P_2). Le résultat principal obtenu ici est le suivant.

Théorème 3. *Sous les hypothèses* (2.6)-(2.7), *soit* (u,σ) *un couple de fonctions telles que* $u \in V$ et $\sigma \in H_1$.

Alors, la vérification de deux parmi les trois assertions suivantes entraîne la troisième:

(i) *u est la solution du problème* (P_1) *donnée par le théorème* 1.

(ii) σ *est la solution du problème* (P_2) *donnée par le théorème* 2.

(iii) σ *sont liées par la loi de comportement élastique:*

$$\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$$

Démonstration. voir [1], p.81-83.

Remarque 2. Les interprétations du théorème 3 sont les suivantes:

1) Si le champ des déplacements *u* est solution du problème variationnel (P_1), alors le champ des contraintes σ associé à *u* par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$ est solution du problème (P_2).
2) Si le champ des contraintes σ est solution du problème variationnel (P_2), alors le champ des déplacements *u* associé à σ par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$ est solution du problème (P_1).
3) Si le champ des déplacements *u* est solution du problème variationnel (P_1) et le champ des contraintes σ est solution du problème variationnel (P_2), alors *u* et σ sont liés par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u),\theta)$.

3.2. Dépendance de la solution par rapport au paramètre

Dans cette partie, on va étudier la dépendance de la solution du problème (*P*) par rapport au paramètre θ.

Théorème 4. *Sous les hypothèses* (2.6)-(2.7), *soit* (u_i,σ_i) *la solution variationnelle du problème* (*P*) *associée au paramètre* θ_i $(i=1,2)$ *telle que* (2.8) *soit vérifiée. Alors, il existe une constante* $C>0$ *qui ne dépend que de* Ω, Γ_1 *et* F *telle que*

$$|u_1-u_2|_{H_1} + |\sigma_1-\sigma_2|_{H_1} \leq C|\theta_1-\theta_2|_{L^2(\Omega)^M}$$

Démonstration. Soient (u_i,σ_i) solutions faibles du problème (*P*) associées aux paramètres $\theta_i \in L^2(\Omega)^M$, $(i=1,2)$. Alors, on a:

$$\left\langle F(\varepsilon(u_1),\theta_1),\varepsilon(v)-\varepsilon(u_1)\right\rangle_H \geq \left\langle q,v-u_1\right\rangle_V,\ \forall v\in U_{ad} \quad (3.1)$$

$$\left\langle F(\varepsilon(u_2),\theta_2),\varepsilon(v)-\varepsilon(u_2)\right\rangle_H \geq \left\langle q,v-u_2\right\rangle_V,\forall v\in U_{ad} \quad (3.2)$$

En prenant $v=u_2$ dans (3.1) et $v=u_1$ dans (3.2), il vient:

$$\left\langle F(\varepsilon(u_1),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_2),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\right\rangle_H \geq 0$$

Donc

$$\left\langle F(\varepsilon(u_1),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_1),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\right\rangle_H +$$
$$\left\langle F(\varepsilon(u_2),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_2),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\right\rangle_H \geq 0$$

De l'inégalité précédente, il résulte:

$$\left|\left\langle F(\varepsilon(u_2),\theta_1)-F(\varepsilon(u_1),\theta_1),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\right\rangle_H\right| \leq$$
$$\left|\left\langle F(\varepsilon(u_2),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_2),\varepsilon(u_2)-\varepsilon(u_1)\right\rangle_H\right|$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.6) dans le membre droit de cette dernière inégalité, puis (2.6) et l'inégalité de Korn dans son membre gauche, on obtient:

$$Cm\left|u_1-u_2\right|_{H_1} \leq L_2\left|\theta_1-\theta_2\right|_{L^2(\Omega)^M} \quad (3.3)$$

d'où

$$\left|u_1-u_2\right|_{H_1} \leq C\left|\theta_1-\theta_2\right|_{L^2(\Omega)^M} \quad (3.4)$$

D'autre part, on a:

$$\left|\sigma_1-\sigma_2\right|_{H_1} = \left|\sigma_1-\sigma_2\right|_H = \left|F(\varepsilon(u_1),\theta_1)-F(\varepsilon(u_2),\theta_2)\right|_H$$

en appliquant (2.6) et (3.4), il résulte:

$$\left|\sigma_1-\sigma_2\right|_{H_1} \leq C\left|\theta_1-\theta_2\right|_{L^2(\Omega)^M} \quad (3.5)$$

L'inégalité cherchée est maintenant une conséquence de (3.4) et (3.5).

Remarque 3. Le résultat du théorème 4 est important du point de vue mécanique, car il montre que de petites perturbations dans le paramètre θ n'entraînent que de petites perturbations dans la solution (u,σ) du problème de contact sans frottement (*P*).

3.3. Un résultat de pénalisation

Dans cette partie, on va étudier le problème pénalisé du problème (*P*), c'est-à-dire qu'on va remplacer les conditions aux limites de Signorini (2.5) par les conditions aux limites suivantes sur Γ_3 :

$$\begin{cases}\sigma_\upsilon^\beta = 0 \quad si\ u_\upsilon^\beta < 0 \\ -\beta < \sigma_\upsilon^\beta < 0, \quad \sigma_\tau^\beta = 0 \quad si\ u_\upsilon^\beta = 0 \\ \sigma_\upsilon^\beta = -\beta \quad si\ u_\upsilon^\beta > 0\end{cases}$$

où β est un paramètre destiné à tendre vers ∞. Nous considérons le problème mécanique suivant:

Problème P^β. Trouver $u^\beta : \Omega \to \mathbb{R}^N$ et $\sigma^\beta : \Omega \to S_N$ tels que

$$\sigma^\beta = F(\varepsilon(u^\beta),\theta) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.6)$$

$$Div\sigma^\beta + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.7)$$

$$u^\beta = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.8)$$

$$\sigma^\beta \upsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (3.9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_\upsilon^\beta = 0 \quad si\ u_\upsilon^\beta < 0 \\ -\beta < \sigma_\upsilon^\beta < 0,\ \sigma_\tau^\beta = 0 \ \text{ si } \ u_\upsilon^\beta = 0 \\ \sigma_\upsilon^\beta = -\beta \ \text{ si } \ u_\upsilon^\beta > 0\end{array}\right\} \text{sur } \Gamma_3$$

La solution (u^β,σ^β) du problème (P^β) dépend du paramètre $\beta > 0$. Pour l'étude du problème (P^β), on suppose que les hypothèses (2.6)-(2.7) sont satisfaites et on considère les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $j : H_1 \to \mathbb{R}$ définies par

$$\varphi(x) = \begin{cases}0 & si\ x \leq 0 \\ x & si\ x > 0\end{cases} \quad (3.11)$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} \varphi(v_\upsilon)ds \quad \forall v \in H_1 \quad (3.12)$$

On définit aussi $\sum_{ad}^\beta$ par

$$\textstyle\sum_{ad}^\beta = \left\{\tau \in H / \left\langle \tau,\varepsilon(v)\right\rangle_H + \beta j(v) \geq \left\langle q,v\right\rangle_V \quad \forall v \in V\right\}$$

Lemme 2. *Sous les hypothèses* (2.6)-(2.7), *si* (u^β,σ^β) *est solution du problème* (P^β), *alors on a*:

$$\begin{cases}u^\beta \in V, \\ \left\langle \sigma^\beta,\varepsilon(v)-\varepsilon(u^\beta)\right\rangle_H + \beta j(v) - \beta j(u^\beta) \geq \left\langle q,v-u^\beta\right\rangle_V,\ \forall v \in V\end{cases}$$

$$\sigma^\beta \in \textstyle\sum_{ad}^\beta, \left\langle F^{-1}(\sigma,\theta),\tau-\sigma^\beta\right\rangle_H \geq 0,\ \forall \tau \in \sum_{ad}^\beta.$$

Démonstration. voir [7], p.67.

Ce lemme nous permet de donner deux formulations variationnelles pour le problème pénalisé (P^β) :

Problème P_1^β.

Trouver le champ des déplacements $u^\beta : \Omega \to H_1$ tel que

$$\begin{cases}u^\beta \in V, \\ \left\langle \sigma^\beta,\varepsilon(v)-\varepsilon(u^\beta)\right\rangle_H + \beta j(v) - \beta j(u^\beta) \geq \left\langle q,v-u^\beta\right\rangle_V,\ \forall v \in V\end{cases}$$

Problème P_2^β.

Trouver le champ des contraintes $u^\beta : \Omega \to H_1$ tel que

$$\sigma^\beta \in \textstyle\sum_{ad}^\beta, \quad \left\langle F^{-1}(\sigma^\beta,\theta),\tau-\sigma^\beta\right\rangle_H \geq 0 \quad \forall \tau \in \sum_{ad}^\beta$$

THEOREMES D'EXISTENCE ET D'UNICITE

Théorème 5. *Sous les hypothèses* (2.6)-(2.7), *le problème variationnel* (P_1^β) *admet une solution unique* $u^\beta \in V$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est une conséquence directe du théorème des inéquations variationnelles de seconde espèce (voir [6]).

En effet, l'opérateur $A : V \to V$ défini par

$$\langle Aw, v \rangle_V = \langle F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) \rangle_H \quad \forall w, v \in V$$

est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur V.

En outre, la fonctionnelle $j : H_1 \to \mathrm{R}$ définie par:

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} \varphi(v_\upsilon) ds$$

est une fonction monotone propre et semi continue-inférieurement, alors le théorème sur les inéquations variationnelles de seconde espèce entraîne l'existence d'un élément unique $u^\beta \in V$ tel que:

$$\left\langle Au^\beta, v - u^\beta \right\rangle_V + \beta j(v) - \beta j(u^\beta) \geq \left\langle q, v - u^\beta \right\rangle_V \quad \forall v \in V$$

ceci achève la démonstration.

Théorème 6. *Sous les hypothèses* (2.6)-(2.7), *le problème variationnel* (P_2^β) *admet une solution unique* $\sigma^\beta \in H_1$.

Démonstration. $\sum_{ad}^\beta$ est un convexe fermé non-vide de H.

En effet, d'après (2.9) et (2.10), on a:

$$\langle q, v \rangle_V = \langle \varepsilon(q), \varepsilon(v) \rangle_H$$

Comme $\beta > 0$ et $j \geq 0$, alors on a:

$$\langle \varepsilon(q), \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) \geq \langle q, v \rangle_V \quad \forall v \in V$$

Ceci entraîne que $\varepsilon(q) \in \sum_{ad}^\beta$, donc $\sum_{ad}^\beta$ est non-vide.

La suite de la démonstration est analogue à celle du théorème 2.

Nous présentons maintenant un résultat de convergence qui représente le résulta principal de cette troisième partie:

Théorème 7. *Supposons que les hypothèses* (2.6)-(2.7) *sont vérifiées et que pour tout* $\beta > 0$, u^β et σ^β *vérifient la loi de comportement élastique:*

$$\sigma^\beta = F(\varepsilon(u^\beta), \theta)$$

Si pour tout $\beta > 0$, u^β *est solution du problème variationnel* (P_1^β), (*respectivement* σ^β *est solution du problème variationnel* (P_2^β), *alors* u^β *converge fortement vers la solution u du problème* (P_1) *dans V* (*respectivement* σ^β *converge fortement vers la solution* σ *du problème* (P_2) *dans* H_1) *quand* β *tend vers* ∞.

La démonstration de ce théorème est une conséquence des trois lemmes suivants.

Lemme 3. *La suite* (u^β) *est bornée dans V.*

Lemme 4. La suite (u^β) *converge faiblement vers la solution u de* (P_1) *dans V quand* β *tend vers* ∞.

Lemme 5. (*i*) *La suite* (u^β) *converge fortement vers la solution u de* (P_1) *dans V quand* β *tend vers* ∞.

(*ii*) *La suite* (σ^β) *converge fortement vers la solution* σ *de* (P_2) *dans* H_1 *quand* β *tend vers* ∞.

Démonstration. Pour la démonstration de ces lemmes, voir [1], p.85-87.

Remarque 4. L'interprétation mécanique du résultat de convergence donné par le théorème 7 est la suivante: on peut approcher la solution du problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une fondation rigide par la solution du problème de contact sans frottement de ce même corps avec une fondation déformable quand son seuil d'effondrement β tend vers ∞.

3.4. Résultats le cas $\Gamma_1 = \varnothing$

Les théorèmes d'existence et d'unicité 1 et 2 ont été établis dans le cas mesure $\Gamma_1 > 0$. Dans cette situation, l'inégalité de Korn est vérifiée et elle est utilisée pour démontrer l'unicité de ces deux théorèmes. On peut aussi considérer le cas mesure $\Gamma_1 = 0$, et dans ce cas, on passe à l'ensemble quotient $V^* = H_1 | R$, où $R = \{\rho \in H_1 / \varepsilon(\rho) = 0\}$ est l'ensemble des déplacements rigides.

Le problème (P_1) peut donc se formuler comme suit:
Trouver $u \in V = H_1$ tel que

$$\prec F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) \succ_H \geq \prec f, v \succ_H + \prec h, \gamma(v) \succ_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V \tag{3.14}$$

Comme ε est nulle sur R, donc le problème (P_1) n'admet de solution que si:

$$\int_\Omega f \rho dx + \int_{\Gamma_2} h \rho dx \leq 0 \quad \forall \rho \in R \tag{3.15}$$

Du point de vue mécanique, (3.15) exprime que le torseur des forces f et h (qui sont des données du problème) est inférieur à zéro.

Maintenant, on pose:

$$L(v) = \prec f, v \succ_H + \prec h, \gamma(v) \succ_{L^2(\Gamma_2)^N} \tag{3.16}$$

et pour $u^*, v^* \in V^*$, on définit

$$L^*(v^*) = L(v),$$

$$\prec F(\varepsilon(u^*), \theta), \varepsilon(v^*) \succ_H = \prec F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) \succ_H \tag{3.17}$$

Le problème (P_1) est donc équivalent à :
Trouver $u^* \in V^*$ tel que

$$\prec F(\varepsilon(u^*), \theta), \varepsilon(v^*) \succ_H \geq L^*(v^*) \quad \forall v^* \in V^* \tag{3.18}$$

Mais ce problème admet une solution unique.

Donc, si mesure $\Gamma_1 = 0$ et les forces f et h satisfont à (3.15), alors le problème (P_1) admet une solution u, définie à un déplacement rigide quelconque près (c'est-à-dire si u est une solution du problème (P_1), alors tout autre élément de la forme $u + \rho$, avec ρ déplacement rigide est aussi solution du problème (P_1)). Les champs de contraintes σ et de déformations ε sont uniques.

REFERENCES

[1]- Drabla S., Sofonea M. and Teniou B., "Analysis of a frictionless contact problems for elastic bodies", Annales Polonici Mathematici LXIX, 1, (1998), p.75-88.

[2]- Ionescu I.R. and Sofonea M., "Fonctional and numerical methods in viscoplasticity", Oxford University Press, Oxford (1993).

[3]- Sofonea M., "Some remarks on the solution in dynamic processes for rate-type models", *Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Physik (Zamp)*, 41, (1990), pp.656-668.

[4]- Cristescu N. and Suliciu I., "Viscoplasticity", Martinus Nirjhoff, Editura Technica, Bucarest (1982), p.84.

[5]- Duvaut G. et Lions J., "Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod, Paris, (1972), p.11.

[6]- Sofonea M., "Problèmes non-linéaires dans la théorie de l'élasticité", Cours de Magister en mathématiques appliqués, Université Ferhat Abbas, Sétif (1993).

[7]- Teniou B., "Etude fondamentale des problèmes élasto-viscoplastiques de contact", Thèse d'Etat, Université Mentouri, Constantine, Janvier, (2000). ☐