Sciences & Technologie – N°17, Juin (2002), pp. 25-30.

SOLUTION BV POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS D'EVOLUTION DANS LES ESPACES DE HILBERT

Reçu le 27/06/1999– Accepté le 15/04/2002

Résumé

Dans ce travail, on montre l'existence de solutions à variation bornée continue à droite pour un problème d'évolution concernant le sous différentiel d'une fonction convexe, propre, semi-continue inférieurement dans un espace de Hilbert.

***Mots clés**: Problème d'évolution, variation bornée, sous-différentiel, semi-continuité inférieure.*

Abstract

This work is devoted to an existence result for bounded variation right continuous solution of an evolution problem for the sub-differential of a proper convex lower semi-continuous function in a Hilbert space.

***Key words**: Evolution problem, bounded variation, sub-differential, lower semi-continuous.*

M.S.C. (1991): 34A60, 34G20, 35K22.

M. YAROU
D. AZZAM
Département de Mathématiques
Centre universitaire de Jijel
Jijel, Algérie

ملخص

في هذا المقال نبرهن عن وجود حل ذو تغير محدود مستمر من اليمين لمسألة تطورية متعلقة بالتفاضل التحتي لتابع محدب ذاتي نصف مستمر من الأسفل في فضاء هيلبارت.

***الكلمات المفتاحية**: مسألة تطورية، تغير محدود، تفاضل تحتي، استمرار من أسفل.*

Ce travail est consacré à l'étude d'une classe de problèmes d'évolution non linéaires pour des inclusions différentielles de la forme:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial r}(t) \in \partial\varphi(t,u(t)) \qquad dr \quad p.p. \quad \text{sur} \quad [0,T] \\ u(0)=x_0 \end{cases} \tag{P}$$

où $\partial\varphi(t,.)$ est le sous-différentiel d'une fonction $\varphi(t,.)$ convexe, propre, semi-continue inférieurement, définie sur un espace de Hilbert H, dr est une mesure positive de Stieltjes sur $I=[0,T]$ d'une fonction $r:I\to[0,\infty[$ non décroissante continue à droite, telle que $r(T)<\infty$. Il est bien connu que $A(t,.)=\partial\varphi(t,.)$ est un opérateur maximal monotone. Plusieurs auteurs ont étudié ce type de problème dans le cas où $dr=dt$ est la mesure de Lebesgue, dans le cas général d'un opérateur maximal monotone [1-3] lorsque $A(t,.)=\partial\varphi(t,.)$ [4,5] et surtout dans le cas particulier du processus de Rafle où $\varphi(t,.)$ est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé (voir [6] et ses références). Peralba [5] a obtenu un théorème d'existence d'une solution absolument continue ($dr=dt$) en supposant que la fonction duale de $\varphi(t,.)$ est contrôlée par une fonction absolument continue:

$$\varphi^*(t,u) \le \varphi^*(s,u) + k(u)\,|a(t)-a(s)|$$

k étant une fonction Lipschitzienne et a absolument continue. Kunze et Marques [2] ont généralisé ce résultat en établissant l'existence de solutions à variation bornée pour le problème:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial r}(t) \in A(t,u(t)) \qquad dr \quad p.p. \quad \text{sur} \quad [0,T] \\ u(0)=x_0 \end{cases} \tag{P'}$$

où A est un opérateur maximal monotone. La mesure positive est la mesure de Stieltjes d'une fonction non décroissante et continue à droite, en supposant que la variation de $A(.)$ est contrôlée par dr au sens suivant:

$$dis(A(t,.),A(s,.)) \leq r(t) - r(s) \qquad 0 \leq s \leq t \leq T \tag{1}$$

où $dis(.,.)$ est la pseudo-métrique introduite par [3]:

$$dis(A_1, A_2) = Sup\left\{ \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} : x_i \in D(A_i), y_i \in A_i(x_i), i = 1,,2 \right\} \tag{2}$$

avec la condition:

$$\left| A^0(t,u) \right| \leq c(t)(1 + |u|) \qquad \text{pour } t \in [0,T], \quad u \in D(A(t))$$

$A^0(t,u)$ étant l'élément de norme minimale de $A(t,u)$. Dans ce papier, on montre l'existence d'une solution à variation bornée continue à droite pour $A(t,.) = \partial\varphi(t,.)$ et dr la mesure de Stieltjes en exploitant les arguments développés dans [2] et en utilisant la technique de régulation de Yosida comme dans [5], c'est-à-dire étudier le problème régularisé (univoque), puis majorer les dérivées des solutions des équations régularisées et faire un passage à la limite $(\lambda \to 0)$.

NOTATIONS ET PRELIMINAIRES

On considère un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $<.,.>$ et de la norme associée $|.|$, $I = [0,T]$ et $\varphi(t,.) : I \times H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe propre semi-continue inférieurement; $A(t,.) = \partial\varphi(t,.) : D(A(t,.)) \subset H \to 2^H$ est le sous-différentiel de $\varphi(t,.)$ de domaine $D(A(t,.)), \varphi^*(t,.)$ la fonction duale de $\varphi(t,.)$ définie par $\varphi^*(t,.) = Sup\{<u,v> - \varphi(t,v) : v \in H\}$. Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur régularisé $A(t,.)$ (approximation Yosida de $A(t)$) défini sur H tout entier par $A_\lambda(t,.) = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda(t))(.)$ est univoque et Lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$, $J_\lambda(t) = (I + \lambda A(t,.))^{-1}$ étant la résolvante de $A(t,.)$ et on a (voir [5]):

$$A_\lambda(,u) = \partial\varphi_\lambda(t,u) = prox_{\frac{1}{\lambda}\varphi^*(t,.)} \frac{u}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} prox_{\varphi^*\left(t, \frac{\cdot}{\sqrt{\lambda}}\right)} \frac{u}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} prox_{\lambda\varphi^*\left(t, \frac{\cdot}{\lambda}\right)} u$$

où $\varphi_\lambda(t,u) = \inf_{v \in H}\left\{ \frac{1}{2\lambda}\|u - v\|^2 + \varphi(t,v) \right\}$ et $prox_f u$ désigne le point proximal de u par rapport à f, c'est-à-dire l'unique point où la fonction $v \mapsto \frac{1}{2}|v - u|^2 + f(v)$ atteint son minimum $A^0(t,u) \in A(t,u)$ désignera l'élément de norme minimale de $A(t,u), \left\| A^0(t,u) \right\| = dist(0, A(t,u))$. On se réfère à [1] pour les différentes définitions et propriétés des opérateurs maximaux monotones.

La variation $var(u,I)$ d'une fonction $u : I \to H$ est le suprémum sur l'ensemble de toutes les subdivisions de I des nombres $\sum_{i=1}^n |u(t_i) - u(t_{i-1})|$; u est à variation bornée (VB) si sa variation $var(u,I)$ est finie. On écrira u VBCD si u est à variation bornée continue à droite. On dira que $u : I \to H$ est solution de (P) si $u(t) \in D(A(t,.))$ pour tout $t \in [0,T]$ et s'il existe une densité $u' \in L^1(I, H, dr)$ de du par rapport à dr vérifiant (P).

Remarquons que l'unicité résulte classiquement de la monotonie de $A(t,.)$ et rappelons quelques résultats utiles pour établir le théorème d'existence: une version discrète du lemme de Gronwall [2] et le lemme de Crandall et Pazy sur la convergence des suites dans un espace de Hilbert [5].

Lemme 1. *Soient* $(a_i), (\beta_i), (\gamma_i)$ *et* (a_i) *des suites de nombres réels non négatifs vérifiant pour tout* $i \in N$, $a_{i+1} \leq \alpha_i + \beta_i(a_0 + \ldots + a_{i-1}) + (1 + \gamma_i)a_i$, *alors*

$$a_j \leq \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k \right) \exp\left(\sum_{k=0}^{j-1} k\beta_k + \gamma_k \right) \quad \textit{pour } j \in N$$

Lemme 2. *Si* (z_n) *est une suite d'éléments d'un espace de Hilbert,* (λ_n) *une suite strictement décroissante de réels positifs vérifiant* $< z_n - z_m, \lambda_n z_n - \lambda_m z_m > \leq 0$, $\forall n,m \in N$ *alors la suite* $(|z_n|)$ *est croissante; si de plus elle est bornée, la suite* (z_n) *converge dans H.*

THEOREME D'EXISTENCE

Problème régularisé

Considérons le problème régularisé qui se présente sous la forme suivante:

$$\begin{cases} -\dfrac{du_\lambda}{dr} = \partial\varphi_\lambda(t, u_\lambda(t)) \\ u_\lambda(0) = x_0 \end{cases} \tag{P_λ}$$

pour tout $\lambda > 0$. Soit $(\varepsilon_n) \subset [0,1]$ une suite décroissante de réels positifs tendant vers zéro. En vertu de [7] (lemme 1), il existe une suite (P_n) de partitions finies de

$$I : (t_i^n)_{0 \leq i \leq v_n}, 0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{v_n}^n = T, \; 0 \leq t_i^n - t_{i-1}^n \leq \varepsilon_n,$$

$$r(t_i^n) - r(t_{i-1}^n) \leq \varepsilon_n, \; 1 \leq i \leq v_n, \quad n \in N$$

En partant de x_0, construisons la suite:

$$\begin{cases} x_0^n = x_0 \\ x_i^n - x_{i-1}^n = -\left(r(t_i^n) - r(t_{i-1}^n)\right) A_\lambda(t_{i-1}^n, x_{i-1}^n), \quad i = 0,\ldots,v_n \end{cases} \tag{3}$$

Posons $A_\lambda(t_{i-1}^n, x_{i-1}^n) = y_i^n$ et définissons les fonctions suivantes [8]: $\theta_n : I \to I$, $Y_n : I \to H$ et $X_n : I \to H$ définies pour tout $t \in]t_{i-1}^n, t_i^n]$, $i = 1,\ldots,v_n$:

$$\theta_n(0) = 0 \qquad \theta_n(t) = t_i^n \tag{4}$$

$$Y_n(0) = y_1^n \qquad Y_n(t) = y_i^n \tag{5}$$

$$X_n(0) = x_0 \qquad X_n(t) = x_i^n + (r(t) - r(t_{i-1}^n))y_i^n \tag{6}$$

On a: $0 \leq \theta_n(t) - t \leq \varepsilon_n$

$$X_n(t)=\begin{cases} x_0^n+(r(t)-r(t_0^n))y_1^n & t\in\left]t_0^n,t_1^n\right] \\ x_0^n+(r(t_1^n)-r(t_0^n))y_1^n+(r(t)-r(t_1^n))y_2^n & t\in\left]t_1^n,t_2^n\right] \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ x_0^n+(r(t_1^n)-r(t_0^n))y_1^n+\dots+(r(t)-r(t_{v_n-1}^n))y_{v_n}^n, & t\in\left]t_{v_n-1}^n,t_{v_n}^n\right] \end{cases}$$

On déduit que:

$$X_n(t)=x_0^n+\int_{]0,t]}Y_n(s)dr(s) \tag{7}$$

$$Y_n(t)=y_i^n=-A_\lambda(t_{i-1}^n,X_n(t_{i-1}^n))=\frac{x_i^n-x_{i-1}^n}{r(t_i^n)-r(t_{i-1}^n)},\quad \forall t\in\left]t_{i-1}^n,t_i^n\right] \tag{8}$$

Etablissons deux propositions qui nous seront utiles pour la suite.

Proposition 3. *Supposons pour tout* (s,t) *tels que* $0\le s\le t\le T$, *et* $u\in H$,

$$\left|\varphi^*(t,u)-\varphi^*(s,u)\right|\le|u|(r(t)-r(s)) \tag{9}$$

Alors $\forall\lambda>0,\ \forall v\in H$, *on a:*

$$\left|A_\lambda(t,v)-A_\lambda(s,v)\right|\le\frac{2}{\lambda}(r(t)-r(s)) \tag{10}$$

Preuve.

Posons $p(t)=prox_{\lambda\varphi^*\left(t,\frac{\cdot}{\lambda}\right)}v$ et $\Gamma(t,u)=\frac12|u-v|^2+\lambda\left(\varphi^*\left(t,\frac{u}{\lambda}\right)\right)$.

On a $\Gamma(t,p(t))=Min\{\Gamma(t,u),u\in H\}$, donc $0\in\partial\Gamma(t,p(t))$ qui s'écrit aussi $v-p(t)\in\lambda\left(\partial\varphi^*\left(t,\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right)p(t)$, d'où $(v-p(t),u-p(t))+\lambda\varphi^*\left(t,\frac{p(t)}{\lambda}\right)\le\lambda\varphi^*\left(t,\frac{u}{\lambda}\right)$ et donc $\Gamma(t,u)\ge\Gamma(t,p(t))+\frac12|u-p(t)|^2$.

D'après l'hypothèse, on a alors:

$$\begin{aligned}
\Gamma(s,u)&=\tfrac12|u-v|^2+\lambda\left(\varphi^*\left(s,\tfrac{u}{\lambda}\right)\right)\\
&\ge\tfrac12|u-v|^2+\lambda\left(\varphi^*\left(t,\tfrac{u}{\lambda}\right)\right)-\lambda\left|\tfrac{u}{\lambda}\right|(r(t)-r(s))\\
&\ge\Gamma(t,p(t))+\tfrac12|u-p(t)|^2-|u|(r(t)-r(s))\\
&=\tfrac12|p(t)-v|^2+\lambda\left(\varphi^*\left(t,\tfrac{p(t)}{\lambda}\right)\right)+\tfrac12|u-p(t)|^2-|u|(r(t)-r(s))\\
&\ge\tfrac12|p(t)-v|^2+\lambda\left(\varphi^*\left(s,\tfrac{p(t)}{\lambda}\right)\right)\\
&\qquad+|p(t)|(r(t)-r(s))+\tfrac12|u-p(t)|^2-|u|(r(t)-r(s))\\
&\ge\tfrac12|p(t)-v|^2+\lambda\left(\varphi^*\left(s,\tfrac{p(t)}{\lambda}\right)\right)\\
&\qquad-\left(|u|-|p(t)|\right)(r(t)-r(s))+\tfrac12|u-p(t)|^2
\end{aligned}$$

$$\Gamma(s,u)\ge\Gamma(s,p(t))-\left(|u|-|p(t)|\right)(r(t)-r(s))+\tfrac12|u-p(t)|^2$$

Comme $\Gamma(s,p(s))\le\Gamma(s,p(t))$, en prenant $u=p(s)$ dans la dernière inéquation, on obtient:

$$\begin{aligned}
|p(t)-p(s)|^2&\le2\left(|p(t)|-|p(s)|\right)(r(t)-r(s))\\
&\le2|p(t)-p(s)|(r(t)-r(s))
\end{aligned}$$

D'où l'on tire $|p(t)-p(s)|\le2(r(t)-r(s))$ et finalement l'inégalité recherchée. ■

Remarque 4.
Si on suppose $|\varphi^*(t,x)-\varphi^*(s,x)|\le(r(t)-r(s)),\ 0\le s\le t\le T$, on obtient $\left|A_\lambda(t,v)-A_\lambda(s,v)\right|^2\le\frac{4}{\lambda}(r(t)-r(s))$.

Proposition 5. *Supposons pour tout* $i=0,\dots,v_n,\ \forall n\in N,\quad\forall\lambda>0$,

$$\left|A_\lambda(t_i^n,x_i^n)\right|\le c(t)\left(1+\left|x_i^n\right|\right) \tag{11}$$

alors il existe une constante positive K tel que pour tout i= $0,\dots,v_n$

$$\left|x_i^n\right|\le K,\quad\left|x_i^n-x_{i-1}^n\right|\le K\left(r(t_i^n)-r(t_{i-1}^n)\right) \tag{12}$$

$$Sup_n|X_n|_\infty\le K,$$

$$SupVar_n(X_n)=Sup_n\left(\sum_{i=1}^{v_n}\left|x_i^n-x_{i-1}^n\right|\right)\le K\,dr([0,T]) \tag{13}$$

$$\left|X_n(t)-X_n(s)\right|\le K(r(t)-r(s)) \tag{14}$$

Preuve. Remarquons que pour éviter plus de technique de calcul, on peut supposer $c(t)$ constante, quitte à l'approximer par une suite de fonctions étagées ([9], lemme 3.3.1). Posons $r(t_i^n)-r(t_{i-1}^n)=\delta_i^n$ On a:

$$\left|x_i^n-x_{i-1}^n\right|=\left(r(t_i^n)-r(t_{i-1}^n)\right)\left|A_\lambda(t_{i-1}^n,x_{i-1}^n)\right|\le c\delta_i^n\left(1+\left|x_{i-1}^n\right|\right)$$

Donc

$$\left|x_i^n\right|\le\left|x_{i-1}^n\right|+c\delta_i^n\left(1+\left|x_{i-1}^n\right|\right)=\left|x_{i-1}^n\right|\left(1+c\delta_i^n\right)+c\delta_i^n$$

Ce qui assure, d'après la version discrète de l'inégalité de Gronwall pour $a_i=\left|x_{i-1}^n\right|$, que:

$$\begin{aligned}
\left|x_i^n\right|&\le\left(|x_0|+c\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n\right)\exp\left(c\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n\right)\\
&\le\left(|x_0|+c.dr([0,T])\right)\exp\left(c.dr([0,T])\right)
\end{aligned}$$

Si on pose $k=\left(|x_0|+c.dr([0,T])\right)\exp\left(c.dr([0,T])\right)$, on déduit que $\left|x_i^n\right|\le k$.

De plus, $\dfrac{\left|x_i^n-x_{i-1}^n\right|}{r(t_i^n)-r(t_{i-1}^n)}\le c(1+k)$, donc de (8), on a $\left|Y_n(t)\right|\le c(1+k),\forall t\in[0,T]$ et $\left|X_n(t)\right|\le|x_0|+\int_{]0,t]}\left|Y_n(s)\right|dr(s)\le|x_0|+c(1+k)dr(]0,t])$.

Par conséquent, $Sup_n|X_n|_\infty\le|x_0|+c(1+k)dr(]0,T])=k'$.

D'autre part, $\left|x_i^n-x_{i-1}^n\right|\le c\delta_i^n(1+k)$,

d'où

$$SupVar_n(X_n)=Sup_n\left(\sum_{i=1}^{v_n}\left|x_i^n-x_{i-1}^n\right|\right)\le Sup_n\left(\sum_{i=1}^{v_n}\left|c(1+k)\delta_i^n\right|\right)$$

$$\le c(1+k)\sum_{i=1}^{v_n}\delta_i^k\le c(1+k)dr([0,T]).$$

Et $\left|X_n(t)-X_n(s)\right|=\left|\int_{]s,t]}Y_n(\tau)\,dr(\tau)\right|\le\int_{]s,t]}\left|Y_n(\tau)\right|dr(\tau)\le$
$\le c(1+k)(r(t)-r(s))$.

En prenant $K = Sup(k, k', c(1+k))$, on a les résultats recherchés. ■

Donc (X_n) est une suite de fonctions VBCD uniformément bornées (en variation et en norme). En vertu de ([6], lemme 0.2.1), $X_n(t)$ converge faiblement vers une fonction $X(t)$ pour $t \in [0, T]$; en particulier: $X(0) = x_0$.

Et, en prenant la limite *inf* dans (14), on a: $|X(t') - X(t)| \le K(r(t') - r(t))$.

En plus, de façon analogue à ([4], lemme 1), on a:

$$X'_n(t) = \frac{dX_n(t)}{dr} = Y_n(t) = \frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{r(t_i^n) - r(t_{i-1}^n)} = -A_\lambda(t_{i-1}^n, X_n(t_{i-1}^n)) \quad (15)$$

pour $t \in]t_{i-1}^n, t_i^n]$ et $X'_n(0) = 0$ avec $|X'_n|_\infty \le K, \quad n \in N$.

Par conséquent, $(X'_n) \subset L^2(I, H, dr)$ est bornée et converge donc faiblement vers Z dans $L^2(I, H, dr)$. D'autre part, on a, pour tout, $\omega \in H$, $\langle \omega, X(t) - X(0) \rangle =$ $\lim_{n\to\infty} \langle \omega, X_n(t) - X(0) \rangle = \lim_{n\to\infty} \omega . dX_n(]0, t])$

$= \lim_{n\to\infty} \int \langle 1_{]0,t]}\omega, X'_n \rangle dr = \int \langle 1_{]0,t]}\omega, Z \rangle dr = \langle \omega, \int_{]0,t]} Z dr \rangle$

Donc

$$\begin{aligned}(X' dr)(]0, t]) &= dX(]0, t]) = X(t) - X(0) \\ &= \int_{]0,t]} Z dr = (Z dr)(]0, t])\end{aligned}$$

pour $t \in]0, T]$ i.e $X' = Z$ dr p.p. dans I, et donc $X'_n \to X'$ faiblement.

Montrons que $X_n \to X$ fortement uniformément sur I.

$\forall t \in I, \exists i, j \in N : t \in]t_i^n, t_{i+1}^n] \wedge]t_j^m, t_{j+1}^m]$ avec $]t_j^m, t_{j+1}^m] \subset]t_i^n, t_{i+1}^n]$

pour $n<m$. On a:

$$x_{i+1}^n = x_i^n - \delta_{i+1}^n A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \text{ et } x_i^n = \lambda A_\lambda(t_i^n, x_i^n) + J_\lambda(t_i^n) x_i^n .$$

$$\begin{aligned}
&\langle X_n(\theta_n(t)) - X_m(\theta_m(t)), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \\
&\quad = \langle x_{i+1}^n - x_{j+1}^m, A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle \\
&= \langle x_i^n - x_j^m, A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle - \\
&\quad - \langle \delta_{i+1}^n A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - \delta_{j+1}^m A_\lambda(t_j^m, x_j^m), A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle \\
&= \langle \lambda A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - \lambda A_\lambda(t_j^m, x_j^m), A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle \\
&\quad + \langle J_\lambda(t_i^n) x_i^n - J_\lambda(t_j^m) x_j^m, A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle \\
&\quad - \langle \delta_{i+1}^n A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - \delta_{j+1}^m A_\lambda(t_j^m, x_j^m), A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle \\
&\quad - \lambda |A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n)|^2 + \\
&\quad + \langle J_\lambda(t_i^n) x_i^n - J_\lambda(t_j^m) x_j^m, A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle \\
&\quad + \delta_{i+1}^n A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - \delta_{j+1}^m A_\lambda(t_j^m, x_j^m), A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - A_\lambda(t_j^m, x_j^m)
\end{aligned}$$

Par suite:

$$\begin{aligned}
&\langle X_n(\theta_n(t)) - X_m(\theta_m(t)), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \le \\
&\quad \le \langle J_\lambda(t_i^n) x_i^n - J_\lambda(t_j^m) x_j^m, A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle + \\
&\quad + \langle \delta_{i+1}^n A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - \delta_{j+1}^m A_\lambda(t_j^m, x_j^m), A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - A_\lambda(t_j^m, x_j^m) \rangle
\end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de la pseudo-métrique, nous avons:

$$\langle J_\lambda(t_i^n) x_i^n - J_\lambda(t_j^m) x_j^m, A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle \le$$

$$\le \left(1 + |A_\lambda(t_i^n, x_i^n)| + |A_\lambda(t_j^m, x_j^m)|\right) dis(A(t_i^n), A(t_j^m)) .$$

De plus, il est facile de voir que la condition (7) implique (pour tout $|u| = 1$) que $dis(A(t_i^n), A(t_j^m))$ $\le r(t_j^m) - r(t_i^n)$ et, en utilisant (15), on obtient:

$$\langle J_\lambda(t_i^n) x_i^n - J_\lambda(t_j^m) x_j^m, A_\lambda(t_j^m, x_j^m) - A_\lambda(t_i^n, x_i^n) \rangle \le$$
$$\le (1 + 2K)(r(t_j^m) - r(t_i^n)).$$

D'autre part, on a:

$$\langle \delta_{i+1}^n A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - \delta_{j+1}^m A_\lambda(t_j^m, x_j^m), A_\lambda(t_i^n, x_i^n) - A_\lambda(t_j^m, x_j^m) \rangle$$
$$\le 2K^2 \left(\delta_{i+1}^n - \delta_{j+1}^m\right)$$

Par conséquent:

$$\langle X_n(\theta_n(t)) - X_m(\theta_m(t)), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \le$$
$$\le 2K^2 \left(\delta_{i+1}^n - \delta_{j+1}^m\right) + (1 + 2K)\left(r(t_j^m) - r(t_i^n)\right)$$

De plus, on a:

$$\left| \langle X_n(t) - X_n(\theta_n(t)), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \right| \le 2K^2 \left(r(t_{i+1}^n - r(t)\right)$$
$$\left| \langle X_m(\theta_m(t)) - X_m(t), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \right| \le 2K^2 \left(r(t_{j+1}^m - r(t)\right).$$

Finalement:

$$\begin{aligned}
&\left| \langle X_n(t) - X_m(t), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \right| \le \\
&\quad \le \left| \langle X_n(t) - X_n(\theta_n(t)), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \right| \\
&\quad + \left| \langle X_m(\theta_m(t)) - X_m(t), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \right| \\
&\quad + \langle X_n(\theta_n(t)) - X_m(\theta_m(t)), X'_n(t) - X'_m(t) \rangle \\
&\quad \le 2K^2 \left(r(t_{i+1}^n) - r(t) + r(t_{j+1}^m) - r(t) + \delta_{i+1}^n - \delta_{j+1}^m\right) \\
&\quad + (1 + 2K)\left(r(t_j^m) - r(t_i^n)\right) = \Delta_{n,m}(t)
\end{aligned}$$

Il est clair que $\Delta_{n,m}(t)$ est uniformément borné et $\lim_{n,m\to\infty} \Delta_{n,m}(t) = 0$.

En appliquant la formule de Moreau, $d\omega^2 \le 2\omega^+ d\omega^+$, avec $\omega = X_n = X_m$, $d\omega = dX_n - dX_m$, $\frac{d\omega}{dr} = X'_n - X'_m$ et $X_n(0) = X_m(0) = x_0$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} |X_n(t) - X_m(t)|^2 &= \tfrac{1}{2} \left(\omega^2(t) - \omega^2(0)\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \left((\omega^2)^+(t) - (\omega^2)^+(0)\right) = \tfrac{1}{2} \int_{]0,t]} d\omega^2 \\
&\le \int_{]0,t]} \omega^+ d\omega^+ \le \int_{]0,t]} \omega d\omega \\
&= \int_{]0,t]} \langle X_n - X_m, X'_n - X'_m \rangle dr
\end{aligned}$$

$$\leq \int_{]0,t]} \Delta_{n,m}(s)dr(s) \leq \int_{]0,T]} \Delta_{n,m}(s)dr(s)$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient finalement:

$$|X_n - X|_\infty \to 0 .$$

X est donc à variation bornée continue à droite et vérifie la condition initiale.

Montrons que X vérifie $-\frac{dX(t)}{dr} = A_\lambda(t, X(t))$.

On a: $X_n(t) \to X(t)$ *p.p. et* $-\frac{dX_n(t)}{dr} = A_\lambda(t_{i-1}^n, X_n(t_{i-1}^n))$.

Définissons ψ_n par $\psi_n(t) = t_{i-1}^n, \forall t \in \left[t_{i-1}^n, t_i^n\right[$; alors pour tout n,

$$-\frac{dX_n(t)}{dr} = A_\lambda(\psi_n(t), X_n(\psi_n(t))).$$

Par passage à la limite, on a le résultat, car:

$$|A_\lambda(\psi_n(t), X_n(\psi_n(t))) - A_\lambda(t, X(t))| \leq$$
$$\leq |A_\lambda(\psi_n(t), X_n(\psi_n(t))) - A_\lambda(t, X(\psi_n(t)))|$$
$$+ |A_\lambda(t, X_n(\psi_n(t))) - A_\lambda(t, X(t))|$$

Puisque $A_\lambda(t,u)$ est Lipschitzienne en u, on a:

$$|A_\lambda(t, X_n(\psi_n(t))) - A_\lambda(t, X(t))| \leq \frac{1}{\lambda}|X_n(\psi_n(t)) - X(t)| .$$

De plus, de la proposition 3,

$$|A_\lambda(\psi_n(t), X_n(\psi_n(t))) - A_\lambda(t, X_n(\psi_n(t)))| \leq \frac{2}{\lambda}|r(\psi_n(t)) - r(t)| .$$

Par conséquent:

$$\left|A_\lambda(\psi_n(t), X(\psi_n(t))) - A_\lambda(t, X(t))\right| \leq \tfrac{2}{\lambda}\left|r(\psi_n(t)) - r(t)\right| +$$
$$+ \tfrac{1}{\lambda} K\left|r(\psi_n(t)) - r(t)\right| + \tfrac{1}{\lambda}\left|X_n(t) - X(t)\right| \to 0$$

Et comme $\frac{dX_n}{dr}$ converge faiblement vers $\frac{dX}{dr}$ dans $L^2(I,H,dr)$, on a finalement $-\frac{dX}{dr}(t) = A_\lambda(t, X(t)) \quad p.p.$

Ainsi avons-nous prouvé le théorème suivant:

Théorème 6. *Sous les hypothèses* (9) *et* (11), *le problème régularisé* (P_λ) *admet une unique solution VBCD dr p.p. dans I.*

Principal résultat

Nous avons donc pour tout $\lambda > 0$ l'existence d'une fonction X_λ VBCD vérifiant

$$\begin{cases} -X'_\lambda = A_\lambda(t, X_\lambda(t)) \quad dr \ p.p. \ dans \ I \\ X_\lambda(0) = x_0 \end{cases}$$

Puisque $\frac{dX_n}{dr}$ est une suite bornée qui converge faiblement vers $\frac{dX_\lambda}{dr}$, on conclut que

$$\left|\frac{dX_\lambda}{dr}\right| \leq K, \quad \forall \lambda > 0 .$$

Soit donc une suite (λ_n) décroissante tendant vers 0. Alors, pour tout n dans N, nous avons

$$\begin{cases} -X'_{\lambda_n}(t) = A_{\lambda_n}(t, X_{\lambda_n}(t)) \quad dr \ p.p. \\ X_{\lambda_n}(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $\left|\frac{dX_{\lambda_n}}{dr}\right| \leq K$.

Théorème 7. *Supposons* (9) *et* (11) *vérifiées, alors* (P) *admet une unique solution VBCD dr p.p. dans I.*

Preuve. Il suffit de montrer que la suite (X_{λ_n}) converge vers la solution de (P) pour $\lambda_n \to 0$. Montrons que $\left(\frac{dX_{\lambda_n}}{dr}\right)$ converge. Posons $X_{\lambda_n} - X_{\lambda_m} = \omega$, $\frac{d\omega}{dr} = \omega' = X'_{\lambda_n} - X'_{\lambda_m}$.

$$\tfrac{1}{2}\left|X_{\lambda_n}(t) - X_{\lambda_m}(t)\right|^2 = \tfrac{1}{2}\int_{]0,t]} d\omega^2 \leq \int_{]0,t]} \omega^+ d\omega^+ = \int_{]0,t]} \omega d\omega$$
$$\leq \int_{]0,t]} \left\langle X_{\lambda_n} - X_{\lambda_m}, X'_{\lambda_n} - X'_{\lambda_m} \right\rangle dr$$
$$\leq \int_{]0,t]} \left\langle \lambda_n A_{\lambda_n}(s, X_{\lambda_n}(s)) - \lambda_m A_{\lambda_m}(s, X_{\lambda_m}(s)), X'_{\lambda_n}(s) - X'_{\lambda_m}(s) \right\rangle dr(s)$$
$$+ \int_{]0,t]} \left\langle J_{\lambda_n}(s) X_{\lambda_n}(s) - J_{\lambda_m}(s) X_{\lambda_m}(s), X'_{\lambda_n}(s) - X'_{\lambda_m}(s) \right\rangle dr(s) .$$

En vertu de la monotonie de A et du fait que

$$-\frac{dX_{\lambda_n}}{dr} = A_{\lambda_n}(t, X_{\lambda_n}(t)) \in A(t, J_{\lambda_n}(t) X_{\lambda_n}(t))$$

il est facile de voir que

$$\left\langle J_{\lambda_n}(t) X_{\lambda_n}(t) - J_{\lambda_m}(t) X_{\lambda_m}(t), X'_{\lambda_n}(t) - X'_{\lambda_m}(t) \right\rangle \leq 0$$

Par conséquent:

$$\tfrac{1}{2}\left|X_{\lambda_n}(t) - X_{\lambda_m}(t)\right|^2 \leq$$
$$\leq \int_{]0,t]} \left\langle \lambda_n A_{\lambda_n}(s, X_{\lambda_n}(s)) - \lambda_m A_{\lambda_m}(s, X_{\lambda_m}(s)), \right.$$
$$\left. X'_{\lambda_n}(s) - X'_{\lambda_m}(s) \right\rangle dr(s)$$
$$\leq \int_{]0,t]} - \left\langle \lambda_n X'_{\lambda_n}(s) - \lambda_m X'_{\lambda_m}(s), X'_{\lambda_n}(s) - X'_{\lambda_m}(s) \right\rangle dr(s) .$$

Finalement:

$$\left\langle \lambda_n X'_{\lambda_n}(t) - \lambda_m X'_{\lambda_m}(t), X'_{\lambda_n}(t) - X'_{\lambda_m}(t) \right\rangle \leq 0$$

Ce qui nous permet d'appliquer le lemme 2 et d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} X'_{\lambda_n} = V \quad dans \ L^2(I, H, dr)$$

V étant dans $L^2(I, h, dr)$, *a fortiori* dans $L^1(I, H, dr)$, si nous posons $X(t) = x_0 + \int_{]0,t]} V(s) dr(s)$, alors X est VBCD avec $V = \frac{dX}{dr}$ *p.p.* et on a $X_{\lambda_n}(t) \to X(t)$ fortement. En particulier $X(0) = x_0$.

De plus, nous avons $\lim_{n\to\infty} X_{\lambda_n} = X(t)$ et $\lim_{n\to\infty} X'_{\lambda_n} = X'(t)$ pour $t \in I \setminus N, dr(N) = 0$.

Donc pour $t \in I \setminus N$, on a: $-\frac{dX_{\lambda_n}}{dr}(t) = A_{\lambda_n}(t, X_{\lambda_n}(t))$ $\in A(t, J_{\lambda_n}(t) X_{\lambda_n}(t))$.

Or

$$\left|J_{\lambda_n}(t) X_{\lambda_n}(t) - X(t)\right| \leq \left|J_{\lambda_n}(t) X_{\lambda_n}(t) - X_{\lambda_n}(t)\right| + \left|X_{\lambda_n}(t) - X(t)\right|$$
$$\leq \lambda_n \left|A_{\lambda_n}(t, X_{\lambda_n}(t))\right| + \left|X_{\lambda_n}(t) - X(t)\right|$$

$$\leq \lambda_n \left|\frac{dX_{\lambda_n}(t)}{dr}\right| + \left|X_{\lambda_n}(t) - X(t)\right|$$

$$\leq \lambda_n K + \left|X_{\lambda_n}(t) - X(t)\right| \to 0, \quad n \to \infty .$$

Donc $\forall X_{\lambda_n}(t) \in H,\ J_{\lambda_n}(t) X_{\lambda_n}(t) \in D(A(t,.))$ converge vers $X(t)$ et $-X'_{\lambda_n}(t) = A_{\lambda_n}(t, X_{\lambda_n}(t)) \in A(t) J_{\lambda_n}(t) X_{\lambda_n}(t)$ converge vers $-X'(t)$.

En vertu d'un résultat bien connu de fermeture de graphe pour les opérateurs maximaux monotones [1], on a $X(t) \in D(\partial\varphi(t,.))$ et $-\frac{dX(t)}{dr} \in \partial\varphi(t, X(t))$ $p.p.\ t$ dans $\left[0, T\right]$. Ce qui achève la démonstration. ■

REFERENCES

[1]- Brezis H., "Opérateurs maximaux monotones", North Holland Publ. Compagny, Amsterdam-London, (1973).

[2]- Kunze M., Marques M.D.P.M., "B.V solutions to evolution problems with time-dependent domains", *Set valued Analysis*, vol.5, n°1, (1997), pp. 57-72.

[3]- Vladimirov A.A., "Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space", *Nonlinear Anal.*, 17, (1991), pp.499-518.

[4]- Moreau J.J., "Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space", Séminaire d'analyse convexe, 01, (1976).

[5]- Peralba J.C., "Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous différentiel dépendant du temps", C.R.A.S., Paris, 275, série A, (1976), pp.93-96.

[6]- Marques M.D.P.M., "Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems", Birkhäuser-Verlag, Basel, (1993).

[7]- Moreau J.J., "Solutions du processus de Rafle au sens des mesures différentielles", *J. Differential Equations*, 26, (1977), pp.347-374.

[8]- Benabdallah H., Castaing C. et Gamal I.M.A., "B.V solutions of multivalued differential equations on closed moving sets in Banach spaces, Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions", *Warszawa*, vol.32, (1995), pp.53-81.

[9]- Lakshmikantham V., Leela E., "Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces", Pergamon Press, Oxford, (1991). □