Sciences & Technologie – N°17, Juin (2002), pp. 31-34.

SUR QUELQUES CLASSES DE PROCESSUS ALEATOIRES NON STATIONNAIRES

Reçu le 08/07/2001 – Accepté le 05/05/2002

Résumé

Dans ce travail, on obtient des représentations intégrales pour certains processus aléatoires de second ordre non stationnaires ainsi que pour leurs fonctions de corrélation. Ces représentations sont analogues à celles connues dans le cas des processus aléatoires stationnaires. Les processus que nous considérons sont solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, où $A(t)$ est, pour tout $t \in [0,T]$, un opérateur linéaire borné dans l'espace de Hilbert généré par le processus $x(t)$ et la fonction de corrélation $K(t,s)$ vérifie une certaine équation aux dérivées partielles. Ces classes de processus généralisent la classe des processus aléatoires stationnaires. En effet, dans ce cas, il suffit de prendre $A(t) \equiv A$, où A est auto-adjoint et la fonction de corrélation $K(t,s)$ vérifie l'EDP $(\partial_t + \partial_s)K(t,s) = 0$.

Mots Clés: *processus aléatoire non stationnaire, fonction de corrélation, représentation intégrale, décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint.*

Abstract

In this work, we obtain integral representation for some non- stationary stochastic process of second order and also for their correlation functions, these representations are analogous to those known in case of stationary stochastic process. These process which are considered are solutions of Cauchy problem $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, where $A(t)$ is for all $t \in [0,T]$ a bounded linear operator in the Hilbert space generated by a process $x(t)$ and the correlation function $K(t,s)$ verifies a some partial differential equations, these process generalize the issue of random stationary stochastic process, in fact that in this case we just only to take $A(t) \equiv A$, where A is self-adjoint operator and the correlation function $K(t,s)$ satisfies (PDE): $(\partial_t + \partial_s)K(t,s) = 0$.

Key-words: *non-stationary random stochastic process, correlation function, integral representation, spectral decomposition for a self adjoint operator.*

Classification AMS: 60G12, 47A45.

R. ZEGHDANE
Institut de Mathématiques
Centre Universitaire de M'Sila
M'Sila, Algérie

L. ABBAOUI
Institut de Mathématiques
Université de Sétif
Sétif, Algérie

ملخص

في هذا المقال نجد التمثيلات التكاملية لبعض المسارات العشوائية من الدرجة الثانية الغير المستقرة وكذلك بالنسبة لتوابع الإرتباط، هذه التمثيلات هي مماثلة للتمثيلات المعروفة في حالة المسارات العشوائية المستقرة، المسارات التي نعتبرها هي حلول مسألة كوشي: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ حيث A من أجل كل t من المجال[0,T] هو مؤثر خطي محدود ، في فضاء هلبرت ، مولد بالمسار x(t) ودالة الارتباط K(t,s) تحقق بعض المعادلات التفاضلية الجزئية ، هذه الأصناف من المسارات تعمم صنف المسارات العشوائية المستقرة وذلك لأنه في هذه الحالة يجب أخذ A(t) =A حيث A هو مؤثر ذاتي و خطي ودالة الإرتباط K(t,s) تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية $(\partial_t + \partial_s) K(t,s) = 0$.

الكلمات المفتاحية: *المسارات العشوائية الغير مستقرة, دالة الإرتباط, التمثيلات التكاملية, التحليل الطيفي للمؤثرات الخطية.*

Soient $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé et $x(t)$ un processus aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ tel que $Ex(t) = 0$ et $E\,|x(t)|^2 < \infty$ (E représente l'espérance mathématique). On sait que $x(t)$ peut être considéré comme une courbe dans le sous-espace fermé H_x de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ muni du produit scalaire $\langle x_1, x_2 \rangle = Ex_1\overline{x_2}$. H_x est l'enveloppe linéaire fermée des variables aléatoires $x(t)$ quand t parcourt R. La fonction de corrélation d'un processus aléatoire $x(t)$ s'écrit comme le produit scalaire dans H_x : $K(t,s) = \langle x(t), x(s) \rangle$.

Un processus aléatoire de second ordre $x(t)$ est dit stationnaire au sens large s'il vérifie: $Ex(t) = cste$, $K(t,s) = K(t-s)$.

Pour les processus aléatoires stationnaires et continus en moyenne quadratique, on a les représentations suivantes:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau}\, dF(\lambda), \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, d\xi(\lambda),$$

où $F(\lambda)$ est la fonction spectrale de $x(t)$ et $\xi\,(\lambda)$ est une mesure stochastique.

Ces représentations ont été obtenues en 1934 par Khintchine et généralisées par Cramer au cas multidimensionnel.

Remarque. Ces décompositions peuvent être obtenues à partir de théorème de Stone. On commence par définir une famille d'opérateurs $\{u_\tau^0\}$ sur l'enveloppe linéaire des variables aléatoires $x(t)$ par:

$$u_\tau^0 x(t) = x(t+\tau),$$
$$u_\tau^0 \sum_{k=1}^n c^{(k)} x(t^{(k)}) = \sum_{k=1}^n c^{(k)} x(t^{(k)} + \tau),$$

pour tout τ de R. L'opérateur u_τ^0 est bien défini, linéaire et isométrique puisque $x(t)$ est stationnaire. En prolongeant u_τ^0 par continuité, on obtient un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires $\{u_\tau^0\}_{\tau\in R}$ dans H_x. Le théorème de Stone (cf. Riesz et Nagy) affirme l'existence d'un opérateur auto-adjoint A défini dans H_x et appelé opérateur générateur infinitésimal tel que $u_\tau = exp(i\tau A)$, et donc le processus $x(t)$ s'écrit sous la forme:

$$x(t) = u_t x_0 = \exp(itA)\, x_0,\ x(0) = x_0.$$

On obtient les représentations intégrales en utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur A.
D'autre part, on peut remarquer que le processus $x(t)$ est solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = iAx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et que la fonction de corrélation vérifie l'EDP $(\partial_t + \partial_s)K(t,s) = 0.$

L'objectif de ce travail est d'obtenir des représentations analogues pour certaines classes de processus aléatoires non stationnaires. Nous considérons des processus aléatoires non stationnaires solutions du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (1)$$

où pour tout $t \in [0,T]$, $A(t)$ est un opérateur linéaire borné dans H_x et la fonction de corrélation vérifie l'une des équations aux dérivées partielles suivantes:

a) $(\partial_t^2 \pm \partial_s^2)K(t,s) = 0.$

b) $(\partial_t^2 - \partial_s^2 + \alpha I)K(t,s) = 0.$

c) $(\partial_t^3 - \partial_s^3)K(t,s) = 0.$

Moyennant quelques conditions supplémentaires, on obtient des représentations pour ces processus aléatoires, ainsi que pour leurs fonctions de corrélation.

I. CAS DE L'EDP (a)

Théorème 1. *Soit $x(t)$ un processus aléatoire de second ordre centré, solution du problème (1), où $A(t)$ est une fonction continûment différentiable définie de $[0,T]$ dans $\mathcal{L}(H_x)$ telle que $\dfrac{dA(t)}{dt} + A^2(t) = B$ ne dépende pas de t et* $A(0)x_0 = 0$.

Si la fonction de corrélation $K(t,s)$ satisfait l'EDP $(\partial_t^2 - \partial_s^2)K(t,s) = 0.$, on a alors les représentations:

$$A(t) = \int_R \sqrt{\lambda}\, th\sqrt{\lambda}\, t\, dE_\lambda$$

$$x(t) = \int_R ch\sqrt{\lambda}\, t\, d\xi(\lambda),$$

$$K(t,s) = \frac{1}{2}\int_R ch\sqrt{\lambda}(t+s) + ch\sqrt{\lambda}\,(t-s)dF(\lambda),$$

où $\{E_\lambda\}$ est la famille spectrale d'un certain opérateur auto-adjoint, $\xi(\lambda)= E_\lambda x_0$ et $F(\lambda)= E\,|\xi(\lambda)|^2$.

Preuve. A partir de l'équation $(\partial_t^2 - \partial_s^2)K(t,s) = 0$, on montre facilement que l'opérateur $B = \dfrac{dA(t)}{dt} + A^2(t)$ est auto-adjoint. On sait que si $\{E_\lambda\}$ est la famille spectrale de l'opérateur B, alors $B = \int_R \lambda dE_\lambda$, où $\{E_\lambda\}_{-\infty<\lambda<+\infty}$ est une famille d'opérateurs de projection orthogonale telle que:

$$E_{-\infty} = 0,\ E_{+\infty} = I,\ E_t E_s = E_{\min\{t,s\}},\ E_{s-0} = E_s,$$

On cherche l'opérateur $A(t)$ sous la forme $A(t) = \int_R \Phi(t,\lambda)dE_\lambda$. En utilisant les propriétés de la décomposition spectrale de l'opérateur B et plus particulièrement son unicité, ainsi que les conditions du théorème (1), on peut voir que la fonction $\Phi(t,\lambda)$ est solution du problème:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi_\lambda}{dt} + \Phi_\lambda^2(t) = \lambda \\ \Phi(0,\lambda) = 0 \end{cases}$$

et donc $\Phi_\lambda(t) = \sqrt{\lambda}\, th\sqrt{\lambda}\, t$.

D'autre part, on cherche le processus $x(t)$ sous la forme:

$$x(t) = \int_R \Psi(t,\lambda)dE_\lambda x_0,$$

En substituant l'expression de $x(t)$ dans le problème (1), on montre que $\Psi(t,\lambda)$ est solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Psi_\lambda(t)}{dt^2} = \lambda\Psi_\lambda(t) \\ \Psi_\lambda(0,\lambda) = 1 \\ \dfrac{d\Psi_\lambda}{dt}(0,\lambda) = 0 \end{cases}$$

D'où $\Psi(t,\lambda) = \sqrt{\lambda}t$, et donc:

$$x(t) = \int_R ch\sqrt{\lambda}\, t\, dE_\lambda x_0.$$

En utilisant les propriétés de la fonction spectrale $\{E_\lambda\}$, on peut obtenir la représentation intégrale de la fonction de corrélation $K(t,s)$. En effet:

$$\begin{aligned} K(t,s) &= \langle x(t), x(s)\rangle = \left\langle \int_R ch\sqrt{\lambda}t dE_\lambda x_0, x(s)\right\rangle \\ &= \int_R ch\sqrt{\lambda}td\langle E_\lambda x_0, x(s)\rangle \\ &= \int_R ch\sqrt{\lambda}td_\lambda \overline{\langle x(s), E_\lambda x_0\rangle} \\ &= \int_R ch\sqrt{\lambda}td_\lambda\Big(\int_R ch\sqrt{\lambda'}sd_{\lambda'}\langle E_\lambda E_{\lambda'} x_0, x_0\rangle\Big) \\ &= \int_R ch\sqrt{\lambda}tch\sqrt{\lambda}sd\langle E_\lambda x_0, x_0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\int_R ch\sqrt{\lambda}(t+s) + ch\sqrt{\lambda}(t-s)df(\lambda) \end{aligned}$$

En procédant de la même façon, on obtient le résultat suivant:

Théorème 2. *Sous les mêmes conditions que ceux du théorème (1) et en changeant seulement l'EDP vérifiée par la fonction de corrélation de x(t) par l'équation*:

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2)K(t,s) = 0,$$

on obtient les représentations:

$$A(t) = \int_{\mathrm{R}} ch\sqrt{i\lambda}\, th\sqrt{i\lambda}\; t\, dE_\lambda,$$

$$x(t) = \int_{\mathrm{R}} ch\sqrt{i\lambda}\; t\, d\xi(\lambda),$$

$$K(t,s) = \int_{\mathrm{R}} ch\sqrt{i\lambda}\; t\, \overline{ch\sqrt{i\lambda} s}\, dF(\lambda),$$

où $\{E_\lambda\}$ *est la famille spectrale d'un certain opérateur auto-adjoint,* $\xi(\lambda) = E_\lambda x_0$ *et* $F(\lambda) = E\,|\xi(\lambda)|^2$.

Remarque. Dans ce cas, on prend comme opérateur auto-adjoint, l'opérateur $B_1 = \frac{1}{i}B$.

II- CAS DE L'EDP (b)

Théorème 3. *Sous les mêmes conditions que ceux du théorème* (1) *et en changeant seulement l'EDP vérifiée par la fonction de corrélation de* $x(t)$ *par l'équation*:

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2 + \alpha I)K(t,s) = 0,$$

on obtient les représentations:

$$A(t) = \int_{\mathrm{R}} ch\sqrt{\lambda - \frac{\alpha}{2}}\, th\sqrt{\lambda - \frac{\alpha}{2}}\; t\, dE_\lambda,$$

$$x(t) = \int_{\mathrm{R}} ch\sqrt{\lambda - \frac{\alpha}{2}}\; t\, d\xi(\lambda),$$

$$K(t,s) = \int_{\mathrm{R}} ch\sqrt{\lambda - \frac{\alpha}{2}}\; t\, \overline{ch\sqrt{\lambda - \frac{\alpha}{2}}\; s}\, dF(\lambda),$$

où $\{E_\lambda\}$ *est la famille spectrale d'un certain opérateur auto-adjoint,* $\xi(\lambda) = E_\lambda x_0$ et $F(\lambda) = E\,|\xi(\lambda)|^2$.

Preuve. A partir de l'équation $(\partial_t^2 - \partial_s^2 + \alpha I)K(t,s) = 0$, on montre facilement que l'opérateur $B = \frac{dA(t)}{dt} + A^2(t)$ est tel que $B - B^* = -\alpha I$; on peut donc écrire:

$$B = \frac{B + B^*}{2} + \frac{B - B^*}{2}, \text{ avec } \frac{B + B^*}{2} = \int_R \lambda dE_\lambda$$

et $\frac{B - B^*}{2} = -\frac{\alpha}{2} I = \int_R -\frac{\alpha}{2} dE_\lambda$, d'où $B = \int_R (\lambda - \frac{\alpha}{2}) dE_\lambda$.

En continuant de la même manière que pour le théorème (1), on obtient les représentations du théorème (3).

Notons que la famille spectrale $\{E_\lambda\}$ est celle de l'opérateur $B_2 = \frac{B + B^*}{2}$.

III- CAS DE L'EDP (C)

Théorème 4. *Soit* $x(t)$ *un processus aléatoire de second ordre centré, solution du problème* (1), *où* $A(t)$ *est une fonction deux fois différentiable définie de* $[0,T]$ *dans* $L(H_x)$ *telle que l'opérateur* $\frac{d^2A(t)}{dt^2} + 3A(t)\frac{dA(t)}{dt} + A^3(t)$ *ne dépende pas de t.*

Si la fonction de corrélation $K(t,s)$ *vérifie l'EDP* $(\partial_t^3 - \partial_s^3)K(t,s) = 0$, *alors on a les représentations suivantes:*

$$A(t) = \int_R y(t,\lambda)\, dE_\lambda,$$

$$x(t) = \int_{\mathrm{R}} \left(exp \int_0^t y(\tau,\lambda) d\tau \right) d\xi(\lambda),$$

$$K(t,s) = \int_R \Psi(t,\lambda)\overline{\Psi(s,\lambda)} dF(\lambda),$$

où $$y(t,\lambda) = \frac{kc_1 \exp(kt) + k_1 c_2 \exp(k_1 t) + k_2 c_3 \exp(k_2 t)}{c_1 \exp(kt) + c_2 \exp(k_1 t) + c_3 \exp(k_2 t)},$$

$k = \lambda^{\frac{1}{3}}$, $k_1 = k(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, $k_2 = k(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$, c_1, c_2, c_3 *sont des constantes,* $\Psi(t,\lambda) = \exp \int_0^t y(\tau,\lambda) d\tau$, $\{E_\lambda\}$ *est la famille spectrale d'un certain opérateur auto-adjoint,* $\xi(\lambda) = E_\lambda x_0$ et $F(\lambda) = E\,|\xi(\lambda)|^2$.

Preuve. A partir de l'équation $(\partial_t^3 - \partial_s^3)K(t,s) = 0$, on montre facilement que l'opérateur

$$\frac{d^2A(t)}{dt^2} + 3A(t)\frac{dA(t)}{dt} + A^3(t)$$

est auto-adjoint. On cherche l'opérateur $A(t)$ sous la forme $A(t) = \int_R (t,\lambda) dE\lambda\, y$. Dans ce cas, la fonction $y(t,\lambda)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y(t,\lambda)}{dt^2} + 3y(t,\lambda)\frac{dy(t,\lambda)}{dt} + y^2(t,\lambda) = \lambda..$$

En représentant la fonction $y(t,\lambda)$ sous la forme $y(t,\lambda) = (\ln\varphi)'_t$, on peut montrer que la fonction $\varphi(t,\lambda)$ est solution de l'équation $\varphi'''(t,\lambda) = \lambda\, \varphi(t,\lambda)$.

En continuant de la même manière que pour le théorème (1), on obtient les représentations du théorème (4).

Remarque. Dans ce cas, on prend comme opérateur auto-adjoint, l'opérateur $B_3 = \frac{d^2A(t)}{dt^2} + 3A(t)\frac{dA(t)}{dt} + A^3(t)$.

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de représenter les processus aléatoires non stationnaires et leurs fonctions de corrélation sous des formes intégrales, analogues à celles obtenues dans le cas des processus stationnaires. Les résultats sont obtenus en utilisant la théorie des opérateurs linéaires dans les espaces hilbertiens.

Plusieurs travaux consacrés à la théorie corrélative des processus aléatoires non stationnaires utilisant la théorie spectrale des opérateurs linéaires dans les espaces hilbertiens ont été réalisés [1-7]. Ces travaux ont été effectués en général sur un plan plutôt théorique. Il est possible de généraliser cette méthode pour obtenir des représentations intégrales pour des processus vectoriels et certaines classes de champs aléatoires non homogènes.

REFERENCES

[1]- Livschits M.S, Yancevich A.A., "Operators colligations in Hilbert spaces", Willey (1979).

[2]- Abbaoui L., "Application de la théorie spectrale des systèmes d'opérateurs linéaires non auto adjoints à l'étude des champs aléatoires non homogènes", Thèse de doctorat, Kharkov, (1984).

[3]- Abbaoui L., "A class of inhomogeneous random fields", Vestnik Khar'kov. Gos. Univ. N° 254, (1984) (en russe).

[4]- Abbaoui L., Yancevich A.A., "Quelques classes de champs aléatoires non homogènes", Publications de l'Institut Ukrainien de la Recherche Scientifique, N°2206 (1984).

[5]- Zolotarev V.A., Yancevich A.A., "Nonstationary curves in Hilbert spaces and nonlinear operator equations. Theory of operators, subharmonic functions", Naukova Dumka, Kiev, 1991, pp. 54-60 (Russian).

[6]- Kirchev K.P., Zolotarev V.A., "Nonstationary curves in Hilbert spaces and their correlation functions II", *Journal of Intger. Equat. Oper. Th.*, Vol.19, Birkhauser verlag, Basel, (1994), pp. 447-457.

[7]- Abbaoui L., "Sur quelques transformations linéaires des champs aléatoires homogènes", *Maghreb Math. Rev.*, Vol. 4, N°1, June (1995), pp. 1-8.

[8]- Riesz F., Nagy B. Sz., "Functional Analysis", Ungar, New York, (1955).

[9]- Guikhman I., Skorokhod A., "Introduction à la théorie des processus aléatoires", éditions Mir, Moscou, (1980).

[10]- Ibrahimov I, Rozanov Y., "Processus aléatoires gaussiens", éditions Mir, Moscou, (1974). ☐