

CONTRIBUTION AU CALCUL NON-LINEAIRE GEOMETRIQUE ET DE STABILITE INCREMENTALE DES STRUCTURES

Reçu le 03/02/2001 – Accepté le 15/06/2002

Résumé

La stabilité linéaire connaît des limites pour la détermination de la valeur de la charge critique en présence des grands déplacements. Pour remédier à ce problème, la stabilité incrémentale est employée. Cette analyse suppose la linéarité des déplacements au voisinage d'une position d'équilibre non-linéaire. L'analyse requiert la détermination du chemin d'équilibre, ensuite la vérification de la stabilité de chaque état d'équilibre est établie en utilisant le critère de la variation seconde de l'énergie potentielle totale. L'élément considéré est un élément poutre en plan, basé sur une formulation mixte hybride avec prise en compte du cisaillement transversal. Les résultats obtenus mettent en évidence l'influence de cette non-linéarité sur la valeur de la charge critique et font apparaître les différences par rapport aux résultats déterminés par stabilité initiale.

Mots clés: Grand déplacement, non-linéarité géométrique, stabilité incrémentale, élément fini.

Abstract

The linear stability presents limits for determination of load initial value in presence of important displacements. For remedying at this problem incremental stability is employed. This analysis assumes linearity of displacements at neighbourhood nonlinear equilibrium position. The analysis demands determination of equilibrium path, then verification of stability of each equilibrium state, using criterion of second variation of total potential energy. The considered element is the beam element in plan, based on mixed hybrid formulation, with consideration of transverse shear. Obtained results put in evidence non-linearity influence on critical load value, and appears differences in respect to results determined with linear stability.

Key words: Large displacement, geometric nonlinearity, incremental stability, finite element.

O. BOUDRIOUA

Département de Génie Civil
Université Mentouri

Constantine, Algérie

H. BOUDJEHEM

M. GUENFOUD

Département de Génie Civil
Centre Universitaire de Guelma
Guelma, Algérie

ملخص

يعرف الاستقرار الخطي حدود في إيجاد قيمة الحمولة الحرجة في حالة الإزاحات الكبيرة، يطبق لتجنب هذا الإشكال الاستقرار التزايدي. هذه الدراسة تفرض خطية الإزاحات بجوار كل وضعية توازن غير خطية.

تتطلب الدراسة إيجاد طرق التوازن بعدها التأكد من استقرار كل وضعية توازن باستعمال معيار التغير الثاني للطاقة الكامنة الكلية.

صياغة عنصر العتبة في المستوي مبنية على صياغة مختلطة هجينة مع الأخذ بعين الاعتبار القص العرضي.

تبين النتائج المحصل عليها تأثير السلوك غير الخطي على قيمة الحمولة الحرجة، وتظهر التباين بالنسبة للنتائج المحصل عليها عن طريق دراسة الاستقرار الخطي.

الكلمات المفتاحية: الإزاحات الكبيرة، السلوك غير الخطي الهندسي، الاستقرار التزايدي، العنصر المتناهي الصغر.

L'emploi simultané de composants structuraux élancés et de matériaux à haute résistance a fait de l'instabilité élastique un problème d'une importance considérable.

Cette sensibilité aux problèmes d'instabilité provient de la présence des grands déplacements. Dans ce cas, on fait recours au calcul non linéaire géométrique puisque on ne peut plus confondre l'état déformé de la structure avec l'état non déformé, le cas de la stabilité initiale.

L'analyse de la stabilité initiale se montre inapte à prédire la valeur de la charge critique en présence des grands déplacements. Elle donne une surestimation de la charge critique. Pour remédier à ce problème, on fait recours à l'analyse de la stabilité incrémentale.

L'analyse de stabilité non linéaire requiert la détermination du chemin d'équilibre non linéaire en premier lieu, ensuite, la vérification de la stabilité de chaque état d'équilibre.

DETERMINATION DU CHEMIN NON LINEAIRE

En analyse non linéaire, la procédure de recherche des solutions itératives incrémentales utilise l'analyse linéaire à toute nouvelle configuration d'équilibre dans le chemin non linéaire.

Le principe des déplacements virtuels est alors utilisé de manière incrémentale pour établir l'équilibre entre deux configurations successives, en se basant sur la description Lagrangienne actualisée approchée DLAA.

Le principe incrémental des déplacements virtuels P.I.D.V peut être obtenu en prenant la différence du P.D.V écrit sur deux configurations voisines. Ceci revient à trouver l'accroissement du champ de déplacement entre ces deux configurations.

L'expression du PDV écrite par rapport à la configuration $\bar{\gamma}^n$ est :

$$\text{sur } \gamma^n : \int_{\bar{V}} {}^t \bar{\sigma}_{ij} \cdot \delta {}^t \bar{\epsilon}_{ij} \cdot d {}^t \bar{V} = {}^t W_{ext}$$

$$\text{et on a sur } \gamma^{n+1} : \int_{\bar{V}} {}^\tau \bar{S}_{ij} \cdot \delta {}^\tau \bar{e}_{ij} \cdot d {}^\tau \bar{V} = {}^\tau W_{ext} \quad (1)$$

$\bar{\sigma}_{ij}$: Tenseur de contrainte de Cauchy.

$\bar{\epsilon}_{ij}$: Tenseur de déformation linéaire.

\bar{S}_{ij} : Tenseur de contrainte Piola Kirchhof n°2.

\bar{e}_{ij} : Tenseur de déformation complet.

$\delta {}^t \bar{\epsilon}_{ij}$: Variation du tenseur de déformation à la date t .

${}^\tau W_{ext}$: Travail virtuel des forces extérieures à la date τ .

Les grandeurs exprimées à la date τ sont réécrites comme suit :

$$\begin{aligned} {}^\tau \bar{S}_{ij} &= {}^t \bar{\sigma}_{ij} + \Delta {}^t \bar{S}_{ij} & \Delta {}^t \bar{S}_{ij} &= \Delta {}^t \bar{S}_{ij} \\ {}^\tau \bar{e}_{ij} &= {}^t \bar{e}_{ij} + \Delta {}^t \bar{e}_{ij} & \Delta {}^t \bar{e}_{ij} &= \Delta {}^t \bar{e}_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

$\Delta {}^t \bar{S}_{ij}$: Accroissement du tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff entre (t) et ($t + \Delta t = \tau$).

$\Delta {}^t \bar{e}_{ij}$: l'accroissement du tenseur de déformation entre (t) et ($t + \Delta t = \tau$).

La forme incrémentale est obtenue en faisant la différence membre à membre des expressions (1) :

$$\int_{\bar{V}} ({}^t \bar{\sigma}_{ij} \delta \Delta {}^t \bar{e}_{ij} + \Delta {}^t \bar{S}_{ij} \delta {}^t \bar{e}_{ij} + \Delta {}^t \bar{S}_{ij} \delta \Delta {}^t \bar{e}_{ij}) d {}^t \bar{V} = \Delta {}^t (W_{ext}) \quad (3)$$

L'accroissement $\Delta {}^t \bar{e}_{ij}$ peut être décomposé comme suit :

$$\Delta {}^t \bar{e}_{ij} = \Delta {}^t \bar{\epsilon}_{ij} + \Delta {}^t \bar{\epsilon}^*_{ij} \quad (4)$$

$\Delta {}^t \bar{\epsilon}_{ij}$: partie linéaire, $\Delta {}^t \bar{\epsilon}^*_{ij}$ partie non linéaire.

La partie non linéaire est donnée par :

$$\Delta {}^t \bar{\epsilon}^*_{ij} = \frac{1}{2} [A_t \bar{U}_{k,j} A_t \bar{U}_{k,i}] \quad (5)$$

En introduisant la loi de comportement incrémentale du matériau, on obtient :

$$\Delta {}^t \bar{S}_{ij} = {}_t c_{ijkl} \cdot \Delta {}^t \bar{\epsilon}_{kl} \quad (6)$$

c_{ijkl} : coefficients d'élasticité.

On linéarise l'expression (3) en négligeant les termes non linéaires contenant le produit de deux accroissements. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\bar{V}} ({}^t \bar{\sigma}_{ij} \delta \Delta {}^t \bar{\epsilon}^*_{ij} + {}_t c_{ijkl} \Delta {}^t \bar{\epsilon}_{kl} \delta {}^t \bar{\epsilon}_{ij}) d {}^t \bar{V} \\ = \Delta {}^t W_{ext} - \int_{\bar{V}} {}^t \bar{\sigma}_{ij} \delta \Delta {}^t \bar{\epsilon}_{ij} d {}^t \bar{V} \end{aligned} \quad (7)$$

La méthode des éléments finis conduit à une formulation discrétisée des problèmes non linéaires qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[K_T] \{\Delta u\} = \{\Delta p\} \quad (8)$$

$[K_T]$ représente la matrice de rigidité tangente.

$\{\Delta u\}$ représente le vecteur des incréments des inconnues nodales.

$$[K_T] = [K_0] + [K\sigma] \quad (9)$$

$[K_0]$: Matrice de rigidité initiale.

$[K\sigma]$: Matrice des contraintes initiales.

$$\text{et} \quad [K^0] = \int_{\bar{V}} [B]^T [C][B] dV \quad (10)$$

$[B]$: Matrice liant les déformations aux déplacements nodaux.

$[C]$: Matrice de l'élasticité reliant les déformations aux contraintes.

La matrice de rigidité élémentaire globale est composée des contributions indépendantes des rigidités de membrane, de flexion et de cisaillement transversal.

$$[K^0] = [K_m] + [K_f] + [K_c]$$

$$[K_m] = EA \int_x [B_m]^T [B_m] dx$$

$$\text{avec :} \quad [K_f] = EI \int_x [B_f]^T [B_f] dx$$

$$[K_c] = G \int_x [B_c]^T [B_c] dx$$

où : $[K_m]$ représente la matrice de rigidité de membrane.

$[K_f]$ représente la matrice de rigidité de flexion.

$[K_c]$ représente la matrice de rigidité de cisaillement.

Avec I : l'inertie de la section, A : la section de l'élément.

$$\text{et} \quad [K\sigma] = \int [G]^T [\sigma][G] dV \quad (11)$$

$$\text{avec :} \quad \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} = [G] \{\Delta u\} \quad (12)$$

W : représente le déplacement transversal.

CRITERE DE LA STABILITE INCREMENTALE

Le critère de la stabilité est un critère énergétique. Pour un état d'équilibre stable, l'énergie potentielle totale atteint un minimum pour tout déplacement cinématiquement admissible (CA).

En analyse non linéaire, les caractéristiques de rigidité de la structure sont non-linéaires. On résout ce problème en faisant l'hypothèse de la linéarité des déplacements en fonction du paramètre de charge λ au voisinage d'une position d'équilibre non linéaire.

Le déplacement peut être linéarisé comme suit :

$$u^1 = u^0 + \Delta \lambda u$$

Le critère de stabilité s'énonce :

$$\delta^2 \pi = \frac{1}{2} \int_{\bar{V}} (c_{ijkl} \Delta \bar{\epsilon}_{kl} \delta \bar{\epsilon}_{ij} + \sigma_{ij}^1 \delta \Delta {}^t \bar{\epsilon}^*_{ij}) dV > 0, \forall u \text{ C.A} \quad (13)$$

Le champ de contrainte résultant s'écrit :

$$\{\sigma^1\} = \{\sigma^0\} + \Delta \lambda \{\sigma\} \quad (14)$$

Le développement mathématique du critère de stabilité nous amène à un problème de valeurs propres. Sous forme discrétisée, le critère de stabilité prend la forme suivante :

$$[K] \{\Delta u\} = \{0\} \quad (15)$$

avec :

$$K = \int_V ([B_L]^T C [B_L] + \{\sigma^0\} + \Delta\lambda \{\sigma\})^T [B_{NL}] dV \quad (16)$$

Ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\det[K_T^0 + \Delta\lambda K_\sigma] = 0 \quad (17)$$

METHODES DE RESOLUTION

L'étude de la stabilité demande un algorithme performant pour la détermination du chemin d'équilibre (la courbe charge – déplacement). En raison de sa fiabilité et rapidité, la méthode incrémentale itérative de Newton Raphson est employée.

Pour cette méthode, le processus incrémental est associé à une correction d'équilibre sur chaque incrément, en utilisant un processus itératif. L'itération de Newton Raphson exige le calcul d'une nouvelle matrice tangente à chaque itération. Son aspect rigoureux en fait une méthode très sûre, conduisant généralement à une convergence très rapide. Cependant, elle présente un inconvénient provenant du calcul de la matrice tangente à chaque itération qui nécessite un temps de calcul souvent élevé.

Pour cela, la méthode incrémentale itérative type Newton Raphson est associée à des techniques de contrôle à savoir :

- la technique de contrôle en charge imposée,
- la technique de contrôle en longueur d'arc imposée.

La résolution du problème de stabilité formulé sous forme d'un problème aux valeurs propres est effectuée par l'utilisation de la méthode des sous espaces, enchaînant les opérations suivantes :

- Choisir p vecteurs initiaux,
- Exécuter une itération inverse pour calculer simultanément les p vecteurs de Ritz $\{q_i\}$ en résolvant ;

$$\begin{aligned} [K_t] \{q_i\} &= [K\sigma] \{\Delta u_i\} \\ [K_t] [Q] &= [K\sigma] \{\Delta u_i\} \end{aligned}$$

- Appliquer la méthode de Ritz pour chercher les vecteurs propres dans le sous espace de Ritz,
- Tester la convergence de $\Delta\lambda_i$ et répéter, si c'est nécessaire, les trois dernières opérations.

VALIDATION

Introduction

La valeur de la charge critique est donnée pour l'analyse de stabilité linéaire ainsi que pour l'analyse de stabilité non linéaire, afin de faire apparaître la différence.

La valeur de $\Delta\lambda$ décroît jusqu'à atteindre un $\Delta\lambda$ solution qui tend vers zéro. Le passage à zéro de cette valeur définit la valeur de la charge critique. Le changement de la variation de $\Delta\lambda$ exprime la transition d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre instable.

Il est à noter que dans cette analyse, la majorité des exemples traités ont l'avantage d'être symétriques. Cependant, cette condition de symétrie n'est pas utilisée pour permettre la manifestation du comportement antisymétrique.

Par ailleurs, il est à signaler que seuls la première charge critique et le premier mode ont une signification

pratique. L'instabilité par les modes suivants n'a généralement que peu de signification, car le système aura déjà flambé à la charge critique la plus basse.

Arc de Williams

Il s'agit d'un arc composé de deux branches formant un V renversé, très surbaissé encastré à ses deux extrémités et chargé en son centre par une charge concentrée P . Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données à la figure 1.

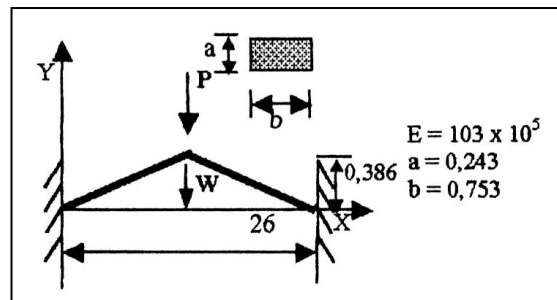


Figure 1: Arc de WILLIAMS [3].

La structure est modélisée par 4, 8 et 16 éléments. On fournit, pour chaque modèle, la valeur de la charge critique pour les deux types d'analyse linéaire et non linéaire au tableau 1.

Nombre d'éléments	Stabilité linéaire λl	Stabilité non linéaire λnl	Rapport $\lambda l / \lambda nl$
4	124.21	40,32-41	3.08
8	101.34	35,12-36	2.88
16	93.94	33,35-34	2.82

Tableau 1: Valeurs de la charge critique pour les deux types d'analyse de stabilité.

On contrôle le processus incrémental itératif par les deux techniques de pilotage qui présentent un nombre moyen de 3 itérations par incrément. On vérifie que l'instabilité est produite par point limite en charge imposée. A ce niveau, la valeur de $\Delta\lambda$ passe par zéro pour la charge initiale $\lambda_1 = 1$ et l'annulation de la matrice de rigidité $[K_t]$ correspond à ce point. Une meilleure façon pour faire apparaître ce qu'on vient de dire est de tracer les courbes $(\Delta\lambda, p)$ et $(\Delta\lambda, \lambda)$ (Fig. 2).

Pour $p = \lambda$, la valeur de $\Delta\lambda$ tend vers zéro. On peut représenter également la convergence de la valeur de λ (charge critique) à la valeur de la charge appliquée au niveau du point limite en traçant la courbe $\lambda(p)$ et la droite $\lambda = p$ (Fig. 3).

En raison de la différence remarquable entre les deux valeurs la charge critique linéaire et non linéaire, ces deux valeurs ne sont pas représentées sur la courbe qui décrit tout le chemin d'équilibre. On se propose de tracer une autre courbe qui représente les valeurs de la charge critique linéaire et non linéaire en fonction du nombre d'éléments (Fig. 4).

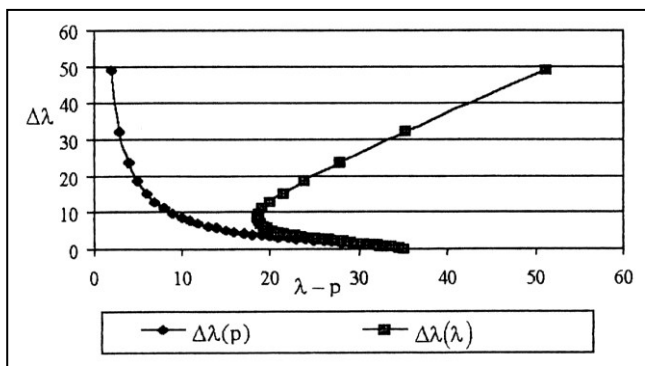


Figure 2: Courbes $\Delta\lambda(\lambda)$, $\Delta\lambda(p)$.

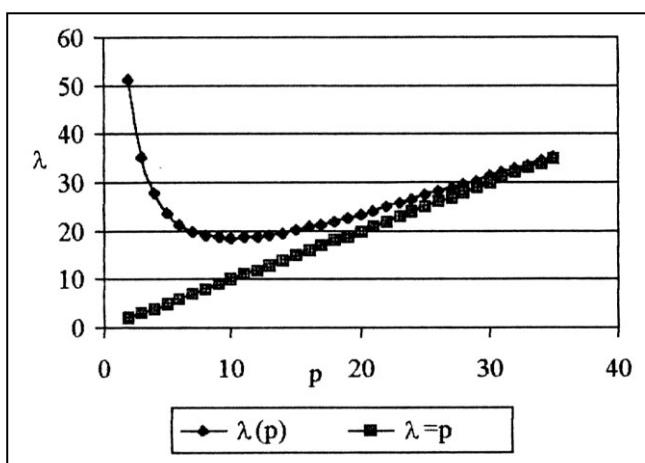


Figure 3: Intersection de la courbe $\lambda(p)$ et la droite $\lambda = p$.

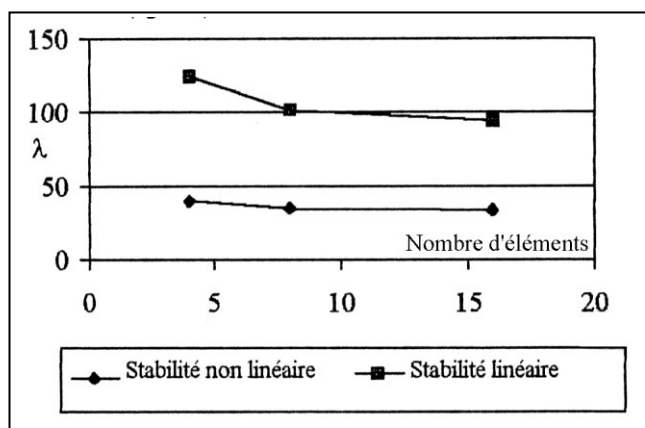


Figure 4: Valeurs de λ pour les deux types d'analyse de stabilité en fonction du nombre d'éléments.

On remarque que la valeur de la charge critique la plus précise, celle déterminée pour 16 éléments, est nettement supérieure à la valeur de la charge critique en stabilité linéaire. La différence est donnée sous forme de rapports des deux valeurs 2.82, soit 64.50% (Tab. 1).

On déduit que le recours au calcul de la stabilité non linéaire répond à la satisfaction de la mesure sécuritaire des structures.

Cet exemple représente un problème de claquement [10]; ce dernier n'a pas été détecté pour la valeur de la

charge initiale $\lambda_1 = 1$. On se propose de changer cette valeur, soit $\lambda_1 = 5$. On constate que la détection de valeur critique est considérée pour un $\Delta\lambda$ passant à zéro. A ce niveau, le processus incrémental itératif est continu, mais cependant, il ne peut pas décrire tout le chemin d'équilibre parce que la zone instable n'est pas détectée.

Le changement de variation de $\Delta\lambda$ explique le problème de claquement. La représentation de la courbe $\Delta\lambda(\lambda)$ est nécessaire pour illustrer le résultat (Fig. 5). On remarque l'apparition de valeurs propres négatives (Fig. 6).

La figure 7 représente le comportement de tout le chemin d'équilibre.

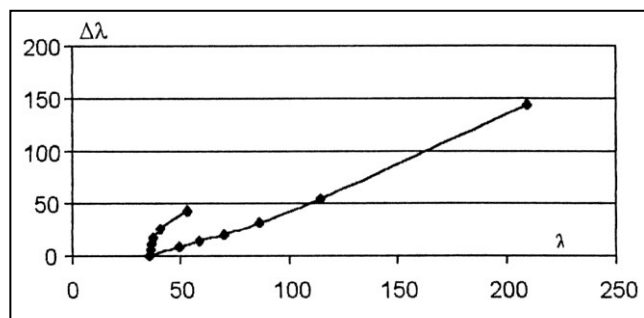


Figure 5: Courbe $\Delta\lambda(\lambda)$.

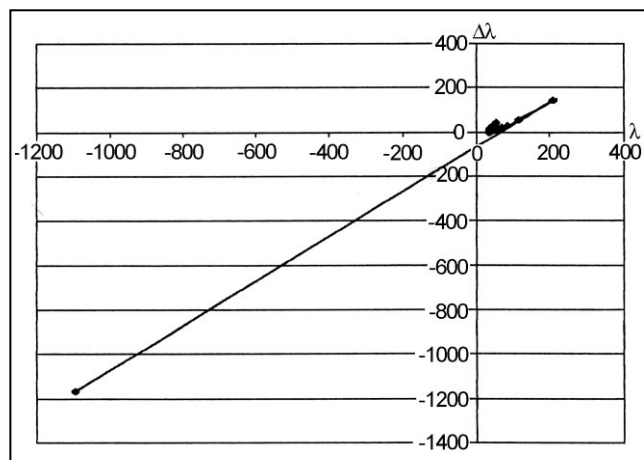


Figure 6: Courbe $\Delta\lambda(\lambda)$.

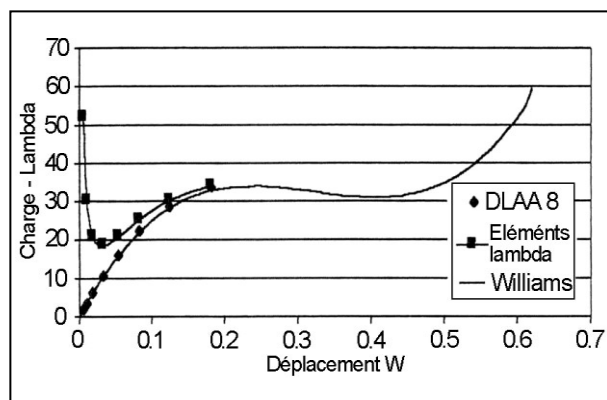


Figure 7: Les courbes $P(w)$, $\lambda(w)$.

Mât encastré

C'est une structure constituée par un mât encastré à une extrémité et soumis à une charge de compression à l'autre extrémité. Un défaut est donné à ce mât afin de pouvoir initier le calcul en grands déplacements. Ce défaut est causé par une charge parasite très faible $P_0 = 10$ daN appliquée au début du calcul seulement, et agissant latéralement à l'extrémité libre du mât (Fig. 8).

On modélise la structure par 4 et 20 éléments. La technique de pilotage employée est celle de la longueur d'arc imposée. Le tableau 2 résume les résultats obtenus.

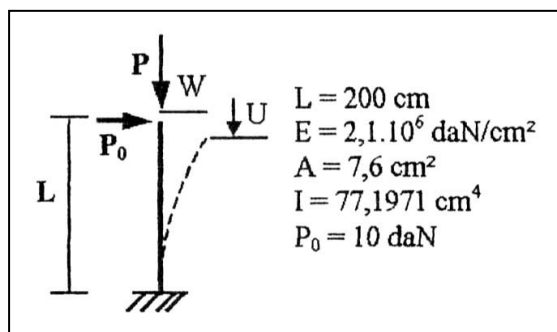


Figure 8: Mât encastré [3].

Nombre d'éléments	Stabilité linéaire λl	Stabilité non linéaire $\lambda n l$	Rapport $\lambda l / \lambda n l$
4	10113,76	10056.83	1.01
20	9990,11	9968.20	1.01

Tableau 2: Valeurs de la charge critique pour les deux types d'analyse de stabilité.

La valeur de la charge critique calculée, en utilisant l'équation différentielle de la ligne élastique, vaut :

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Cette formule donne une valeur de la charge critique $p_{cr} = 10000$ daN.

On remarque que ce résultat est en excellent accord avec celui fourni par l'analyse de stabilité linéaire qui est un cas particulier de l'analyse non linéaire.

On constate que la charge critique est très peu sensible au nombre d'éléments finis considérés. La différence entre les calculs avec 4 et 20 éléments est de 0.88 %.

On remarque que les deux valeurs de la charge critique se rapprochent. Le phénomène d'instabilité se produit par bifurcation d'état d'équilibre.

On note également que la convergence est plus rapide en contrôlant le processus incrémental itératif en longueur d'arc imposée : 3 itérations par incrément, contre 4 à 5 itérations pour le contrôle effectué en charge imposée.

La courbe analytique est tronquée afin de faire apparaître la détection de la charge critique (Fig. 9 et 10).

Cadre à section variable

Il s'agit d'un cadre à section variable, sollicité par deux forces verticales P aux nœuds A et B. Pour provoquer l'instabilité, on a imposé une petite force horizontale

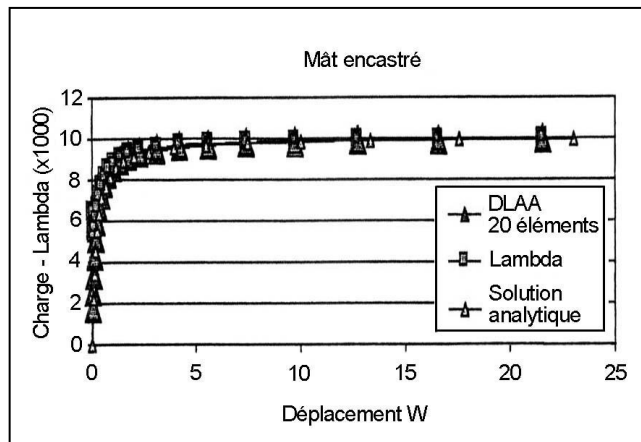


Figure 9: Courbes $P(w)$, $\lambda(w)$.

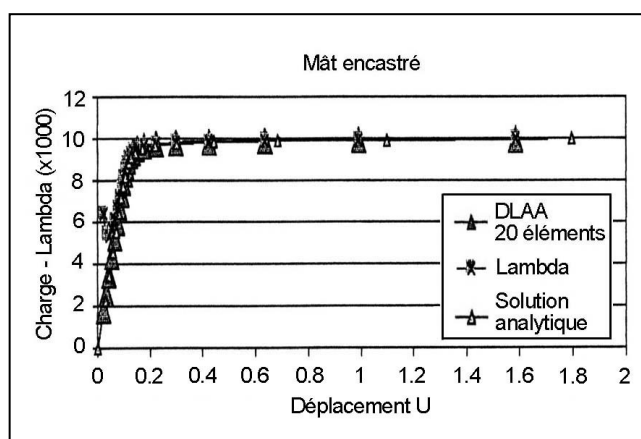


Figure 10: Courbes $P(u)$, $\lambda(u)$.

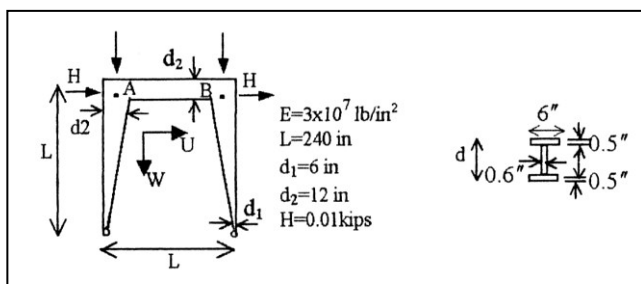


Figure 11: Cadre à section variable [19].

constante $H = 0,01$ Kips aux points d'application de P . Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont représentées sur la figure 11.

Le cadre est modélisé par 9 éléments ; 4 éléments pour chaque colonne et 1 élément pour la traverse. Cet exemple est testé par le programme Finelg conçu par Frey [11]. Ce programme analyse les problèmes de grands déplacements des structures élasto-plastiques en régime statique.

Le tableau 3 résume les résultats obtenus.

La valeur de la charge critique, qui dérive de l'analyse de la stabilité linéaire, est $p_{cr} = 178.2$ Kips [19]. L'analyse de la stabilité non linéaire effectuée par le programme Finelg [19] donne une valeur de $p_{cr} = 164$ Kips.

On constate que la modélisation par des éléments à

La charge initiale	Stabilité linéaire λl	Stabilité non linéaire λnl	Déplacement	Rapport $\lambda l / \lambda nl$
5	177.94	175.09	0.66	1.02
10	177.94	170.47	0.24	1.04
20	177.94	162.26	0.099	1.10

Tableau 3: Valeurs de la charge critique pour les deux types d'analyse de stabilité.

section constante augmente la rigidité du cadre. Cependant, la valeur de la charge critique est pratiquement la même, soit une différence maximale de 6.34 %.

L'influence de la valeur de la charge initiale sur la détection de la charge critique est peu sensible, soit une différence maximale de 7.33 %. Cependant, nous remarquons que le déplacement augmente avec la considération d'une charge initiale faible, c'est-à-dire des petits pas d'incrémentations. La lenteur du processus de chargement influence donc le déplacement de la structure, qui augmente d'une façon remarquable.

Le choix de la charge initiale, opération menée par l'utilisateur, est d'une importance primordiale. Le recours à des petits pas augmente le déplacement au voisinage de la charge critique.

On constate que le déplacement obtenu coïncide avec celui fourni par Spacone [19] au niveau de la charge critique pour les valeurs de charge 20 et 10, soit une différence maximale de 9 %.

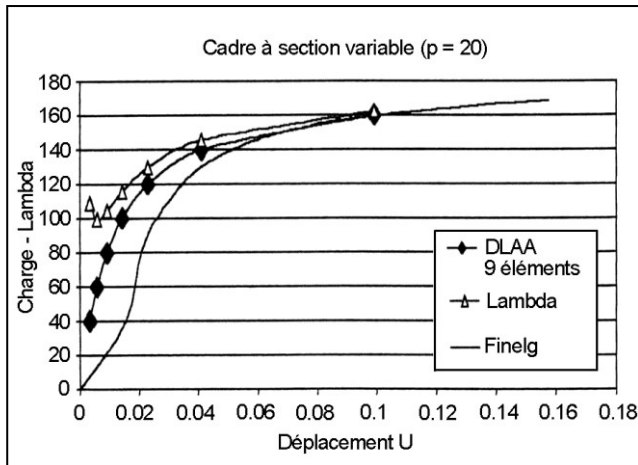


Figure 12: Courbes $P(u)$, $\lambda(u)$.

Arc de Harrison

Il s'agit d'un arc articulé aux extrémités et chargé en son centre par une charge concentrée P . Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données sur la figure 13.

La structure est modélisée par 8 éléments de poutres; les deux techniques de contrôle du processus incrémental itératif sont utilisées.

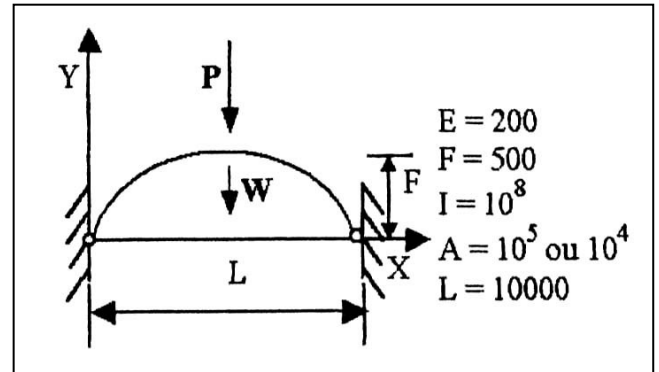


Figure 13: Arc de Harrison [11].

Pour cet exemple, on dispose des valeurs des charges critiques résultant des comportements symétrique et antisymétrique. La solution analytique est donnée par Harrison [11], et la solution numérique est donnée par Frey [11] qui traite cet exemple en le modélisant par 4 éléments de poutres courbes.

On discute l'effet de la symétrie, la modélisation des arcs par des éléments de poutres droites et les rapports de la stabilité linéaire à la stabilité non linéaire pour les deux types de comportement.

Comme on l'a déjà signalé, la condition de symétrie n'est pas utilisée, du fait que la charge critique résultant d'un comportement antisymétrique peut être inférieure à celle résultant d'un comportement symétrique. Afin de faire apparaître la surestimation de la valeur de la charge critique, on ne modélise que la moitié de l'arc circulaire de Harrison par 4 éléments de poutres. Le tableau 4 résume les résultats obtenus.

La modélisation de la moitié de l'arc en imposant les conditions de symétrie donne une surestimation de la charge de 19.1% pour $A = 10^5$ et 9.69% pour $A = 10^4$. On doit donc faire abstraction de la condition de symétrie.

Section	Paramètre de contrôle	Stabilité non-linéaire λnl		Stabilité linéaire λl		Rapport $\lambda l / \lambda nl$	
		Antisymétrique	Symétrique	Antisymétrique	Symétrique	Antisymétrique	Symétrique
10^5	Charge imposée	1805.46	2231.89	2077.46	4911.02	1.15	2.2
	Longueur d'arc imposée	1837.5	2229.46			1.13	2.2
10^4	Charge imposée	1232.41	1364.76	2193.41	5023.94	1.78	3.68
	Longueur d'arc imposée	1281.68	1318.57			1.71	3.81

Tableau 4: Valeurs de la charge critique pour les deux types d'analyse de stabilité.

La confrontation des résultats obtenus à ceux donnés par Frey [11], qui modélise cet arc en élément de poutres courbes, montre que l'approximation faite par la modélisation en élément de poutres droites est acceptable. Cette déduction est justifiée par le calcul de la différence maximale entre les résultats obtenus et ceux donnés par Frey [11], soit une différence maximale de 6.54% (Fig. 14, 15 et 16).

La structure perd sa stabilité pour une charge critique 4 fois inférieure à celle donnée par un calcul linéaire (Tab. 4). Ce résultat justifie la nécessité d'un calcul non linéaire.

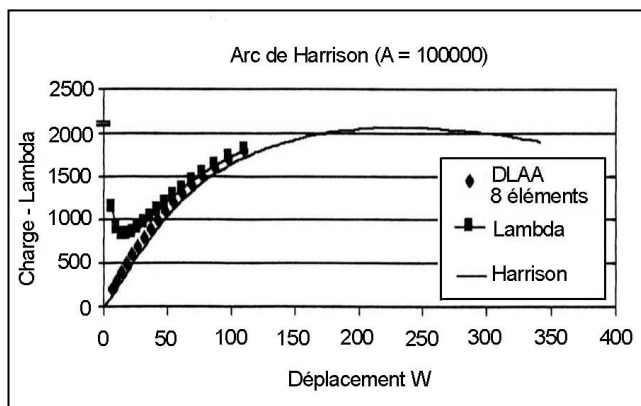


Figure 14: Courbes P(w), λ(w).

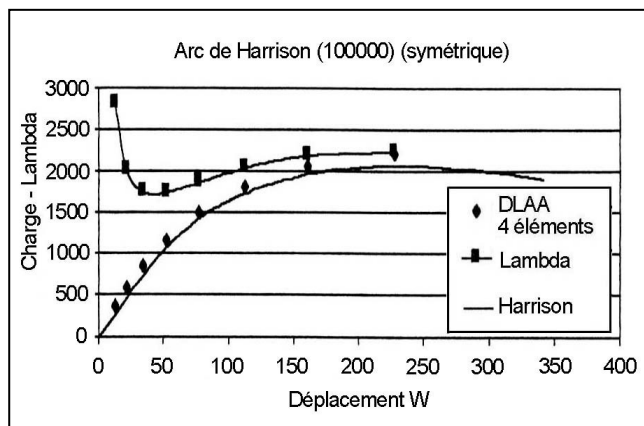


Figure 15: Courbes P(w), λ(w).

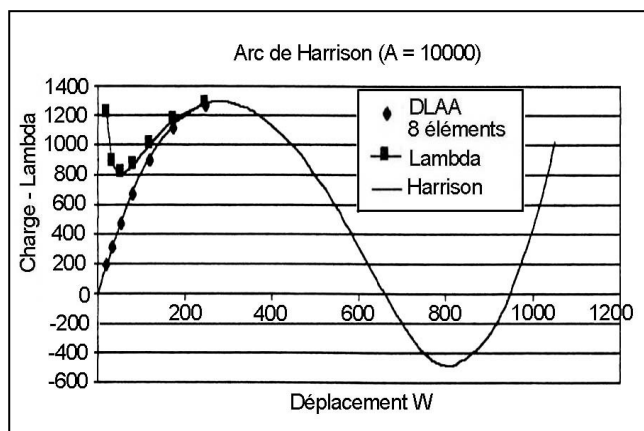


Figure 16: Courbes P(w), λ(w).

CONCLUSION

Cette étude est une contribution au calcul non-linéaire géométrique et de stabilité incrémentale des structures. Les résultats obtenus permettent de constater que la convergence est rapide en contrôlant le processus incrémental itératif en longueur d'arc imposé (3 à 4 itérations par incrément). On bénéficie d'un gain appréciable du temps de calcul et d'une précision satisfaisante. Le pilotage en charge imposée nécessite plus d'itération. L'approximation faite par la modélisation des arcs par des éléments de poutres droites est acceptable, ce qui met en évidence l'efficacité de l'élément fini développé. Au niveau du point limite, la détection de la charge critique correspond au point où la matrice de rigidité s'annule. Au niveau de ce point, Δλ passe à zéro. Le changement de variation de Δλ après son passage à zéro exprime la transition d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre instable.

L'abstraction de la condition de symétrie permet la manifestation des modes antisymétriques et répond à la mesure de sécurité des structures. L'emploi de l'analyse de stabilité linéaire pour des structures fortement non-linéaire s'effectue au détriment de la sécurité des structures. Le recours à l'analyse de la stabilité incrémentale est donc motivé par la satisfaction de la mesure sécuritaire des structures.

NOTATION

- $\bar{\sigma}_{ij}$: Tenseur de contrainte de Cauchy.
- $\bar{\varepsilon}_{ij}$: Tenseur de déformation linéaire.
- \bar{S}_{ij} : Tenseur de contrainte Piola Kirchhoff n^o2.
- \bar{e}_{ij} : Tenseur de déformation complet.
- $\delta_t^t \bar{e}_{ij}$: Variation du tenseur de déformation à la date t.
- ${}^t W_{ext}$: Travail virtuel des forces extérieures à la date τ.
- ${}^t \Delta \bar{S}_{ij}$: Accroissement du tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff entre (t) et (t + Δt = τ).
- ${}^t \Delta \bar{e}_{ij}$: Accroissement du tenseur de déformation entre (t) et (t + Δt = τ).
- $c_{ijkl, c}$: Coefficients d'élasticité.
- $[K_T]$: Matrice de rigidité tangente.
- $[B]$: Matrice liant les déformations aux déplacements nodaux.
- $[C]$: Matrice d'élasticité reliant les déformations aux contraintes.
- $[K_0]$: Matrice de rigidité initiale.
- $[K\sigma]$: Matrice des contraintes initiales.
- $[K_m]$: Matrice de rigidité de membrane.
- $[K_f]$: Matrice de rigidité de flexion.
- $[K_c]$: Matrice de rigidité de cisaillement.
- W : Déplacement transversal.

REFERENCES

- [1]- Bathe K.J. "Finite element procedures", Prentice-Hall, New Jersey, (1996), pp. 629-636, 954-978.
- [2]- Batoz J.L. et Dhatt G., "Modélisation des structures par éléments finis", Tome 1, Solides élastiques, Ed. Hermès, Paris, (1990), 449 p.
- [3]- Boudjahem H., "Développement d'éléments finis de poutre pour l'analyse linéaire et non linéaire géométrique des structures", Thèse de Magistère en Génie Civil, Centre universitaire de Guelma, (1998), 129 p.
- [4]- Chajes A., "Principles of structural stability theory", Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, (1974).
- [5]- Coirier J., "Mécanique des milieux continus", Concepts de base, Ed. Dunod, Paris, (1997).
- [6]- Cook R.D., "Concepts and applications of finite element analysis", John Wiley et Sons, (1989), pp. 529-533.
- [7]- De Ville de Goyet V., "L'analyse non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique", Thèse de Doctorat. Faculté des sciences appliquées, Université de Liège, (1988-1989).
- [8]- Dhatt G. et Touzot G., "Une présentation de la méthode des éléments finis", 543 pages, Ed. Maloine, Compiègne, (1981), pp. 277-409.
- [9]- Djeghaba K., "Contribution à l'analyse non linéaire géométrique de coques minces en théorie de Marguerre", Thèse de Doctorat, Institut national des sciences appliquées, Lyon, Juin (1990), pp. 19-59, 151-212.
- [10]- Frey F., "L'analyse non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique", Thèse de Doctorat, Faculté des sciences appliquées, Université de Liège, (1977-1978).
- [11]- Frey F., "Incremental instability", Internal report, 8615, p. 1-30, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Avril (1986).
- [12]- Gallagher R.H., "Introduction aux éléments finis", Ed. Pluralis, (1976), pp. 395-419.
- [13]- Guenfoud M., "Contribution à la résolution des problèmes de la stabilité et de la non-linéarité géométrique des coques", Annales, Séries : Théories et méthodes de calcul, Institut technique du bâtiment et des travaux publics, 349, N°528, Pris. Novembre (1994), pp. 14-27.
- [14]- Guenoun N., "Méthodes de semidiscretisation pour l'étude de la stabilité des coques", Université de Liège, (1987), Thèse de Doctorat, pp. 42-64.
- [15]- L'Hermite R., "Flambage et stabilité", Le flambage élastique des pièces droites, Ed. Eyrolles, Paris, (1974).
- [16]- Imbert J.F., "Analyse des structures par éléments finis", Ed. Cépaduès, (1991), 506 p.
- [17]- Jaamei S., "Etude des différentes formulations Lagrangiennes pour l'analyse non linéaire des coques et des plaques minces élasto-plastiques en grands déplacements et grandes rotations", Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, Juin (1986), pp.1-39.
- [18]- Lebouvier F., "Analyse non linéaire et ruine de structures planes formées de poutres et d'arcs", Thèse de Doctorat, Université de technologie de Compiègne, Juin (1985), pp.1-29.
- [19]- Spacone E., "Poutre plane non-linéaire à section variable", IREM. Rapport interne 89/2, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Février, (1989), 24 p.
- [20]- Timoshenko S.P., "Théorie de la stabilité élastique", Edition Dunod, (1966), Paris, 542 p.
- [21]- Wang P.C., "Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles", Ed. Dunod, Paris, (1969).
- [22]- Zienkiewicz O.C., Taylor. R.L., "La méthode des éléments finis", Formulation de base et problèmes linéaires, Ed. Afnor, (1991), 620 p. □