

COUPLAGE DES SOLUTIONS ANALYTIQUE ET NUMERIQUE POUR UN CALCUL DE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Reçu le 09/05/1999- Accepté le 09/01/2002

Résumé

L'utilisation de la méthode des éléments finis s'avère encore lourde pour la modélisation de structures qui font intervenir le mouvement ou les problèmes dits évolutifs tels ceux où apparaissent les courants induits. Pour ce dernier type de cas, outre les inconvénients liés au temps de calcul, l'adaptation de la taille des éléments du maillage à la profondeur de l'effet de peau est nécessaire, ce qui est à l'origine de complications supplémentaires des algorithmes de calcul. Dans cet ordre d'idées, plusieurs contributions ont été proposées dans la littérature pour associer aux Éléments Finis d'autres méthodes de calcul développées dans certaines régions du domaine d'étude afin d'augmenter la souplesse et l'efficacité des modèles.

Les auteurs présentent, dans cet article, une solution mixte alliant les approches analytique et numérique du champ électromagnétique dans un dispositif axisymétrique tenant compte des courants induits. Une nouvelle approche est présentée pour la réalisation du couplage des deux solutions analytique et numérique.

Mots clés: Electromagnétisme, courants induits, axisymétrie, solution analytique, éléments finis.

Abstract

The use of finite element method is still heavy for modeling structures, which involve moving parts, or so-called evolutionary problems such as in which appear induced currents. For this last type of case, besides inconveniences bound in time calculation, the adaptation of mesh element size to the depth of the skin effect is necessary. This is up to supplementary complications of calculation algorithms. In this order of ideas, several contributions have been proposed in literature to associate to finite element other calculus methods developed in certain regions of the survey domain in order to increase the suppleness and the efficiency of models.

The authors present, in this paper, an analytical-numerical mixed solution of electromagnetic field in an axisymmetric device, which takes into account, induced currents. A new approach is presented for coupling both the analytical and numerical solutions.

Key words: Electromagnetic, induced currents, axisymetry, analytical solution, finite elements.

**M.E.H. LATRECHE
R. MEHASNI**

Département d'Electronique
Université Mentouri
Constantine, Algérie

M. FELIACHI

LRTI/GE44
IUT St-Nazaire
Bd. de l'Université
44602 Saint-Nazaire
Cedex, France

ملخص

إن استعمال طريقة الحساب بالعناصر المنتهية وحدها لا يزال يؤدي كبيرة لمحاكات المركبات التي تحتوي على أطراف متحركة أو تلك التي تظهر فيها تيارات متحرضة و ذلك رغم التطور الكبير لوسائل الحساب بالكمبيوتر.

من أجل المساهمة في تطوير أساليب حساب الحقل الكهرمغناطيسي في هذه الحالات إننا نقدم في هذا العرض طريقة تستعمل حساب رياضي محض في الأطراف أين تظهر تيارات التحرض بالازدواج مع طريقة العناصر المنتهية المستعملة على باقي المجال.

الكلمات المفتاحية: الكهرمغناطيسي، تيارات متحرضة، طريقة العناصر المنتهية.

Sur une structure axisymétrique composée d'un ensemble induit-inducteur, telle que représentée sur la figure 1, la région conductrice constituée de l'induit, siège des courants induits, est exclue du maillage. Une solution analytique y est développée puis couplée à la solution Eléments Finis élaborée sur le reste du domaine d'étude à travers la frontière de couplage appelée Γ sur la figure 1. Ce couplage est réalisé par la prise en compte, lors de la résolution, de l'apport de la solution analytique en tant que terme de frontière de type Neumann non homogène.

Pour des raisons d'axisymétrie, l'étude sera limitée à la moitié du domaine indiquée par la figure 1.

FORMULATION ELEMENTS FINIS

Dans le domaine traité par le maillage Eléments Finis, l'équation à résoudre est celle de la magnétostatique:

$$\Delta A = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) = J_s \quad (1)$$

dont la forme intégrale pour le formalisme Eléments Finis est:

$$\iint_{\Omega} \frac{\gamma}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \iint_{\Omega} J_s \alpha dr dz - \iint_{\Gamma} \frac{\gamma}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \alpha dr dz = 0 \quad (2)$$

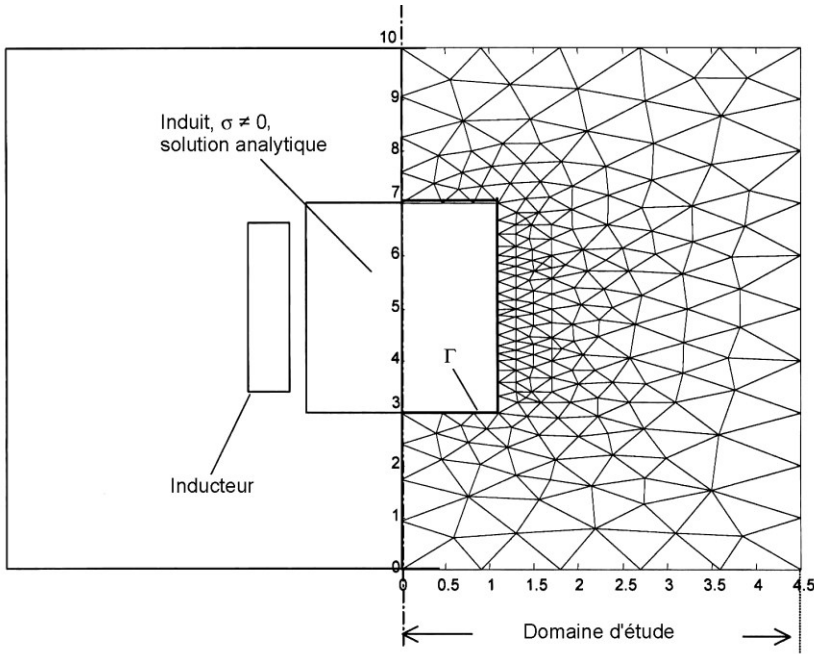


Figure 1: Maillage du dispositif étudié.

L'assemblage de cette équation sur le domaine de résolution aboutit au système matriciel:

$$[C].[A]-[B]=[F] \quad (3)$$

[C] est la matrice de raideur;

[A] est le vecteur des potentiels inconnus;

[B] est le vecteur résultant de la condition $\partial A/\partial n$ sur la frontière;

[F] est le vecteur des sources du champ.

Les termes élémentaire sont calculés par:

$$C_{ij} = \gamma \iint_{\Omega} \nabla \left(\frac{\alpha_i}{r} \right) \nabla \alpha_j \, drdz$$

$$F_i = J \int \alpha_j \, drdz \quad (4)$$

$$B_j = \int_{\Gamma} \frac{\gamma}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \alpha \, d\Gamma$$

Les éléments du vecteurs [B] sont non nuls sur la frontière de coulage des solutions analytique et numérique. Pour leur évaluation, l'établissement de la forme de la solution analytique et de sa dérivée normale sur la frontière Γ est nécessaire.

SOLUTION ANALYTIQUE DANS L'INDUIT

Différentes méthodes sont présentées dans la littérature pour la résolution analytiques des équations elliptiques ou paraboliques de type Laplace ou Poisson. Nous adopterons celle dite à séparation de variables.

Le champ magnétique dans l'induit est régi par l'équation de diffusion :

$$\gamma \Delta A - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

qui s'écrit dans un système de coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \cdot \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \right) = \sigma \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} \quad (6)$$

Dans le cas d'une alimentation sinusoïdale, l'équation (2) se simplifie en:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \cdot \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \right) - j \omega \sigma A_{\varphi} = 0 \quad (7)$$

Le calcul de la solution analytique dans l'induit est fait en procédant à la séparation des variables r et z , et en utilisant le principe de superposition par la décomposition des conditions de frontière de l'induit tel que représenté sur la figure 2.

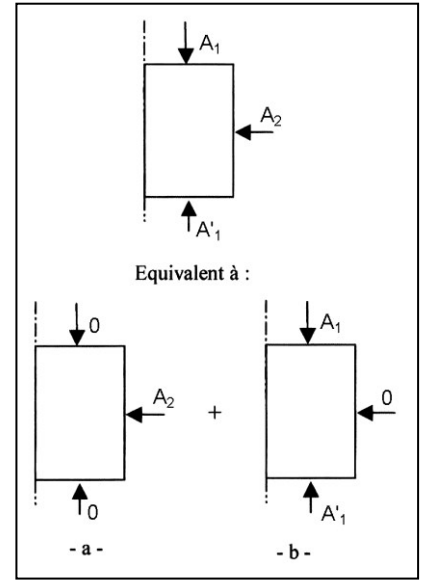


Figure 2: Décomposition des conditions de frontière.

Les solutions des problèmes (a) et (b) sont données par:

$$(a) A_{1\varphi}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_{1n} \cdot \text{sh}(\beta_{1n} z) + D_{2n} \cdot \text{ch}(\beta_{1n} z)) \cdot J_1(\lambda_{1n}) \quad (8)$$

$$(b) A_{2\varphi}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_{1n} \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} z + B_{2n} \cdot \cos \frac{n\pi}{2b} z \right) \cdot J_1(\lambda_{2n}) \quad (9)$$

où λ_{1i} , λ_{2i} , β_{1i} et β_{2i} sont des constantes de séparation calculées par:

$$\lambda_{1n} = \frac{z_n}{a}; \dots \beta_{1n} = \sqrt{\lambda_{1n}^2 - k^2}$$

$$k^2 = -j \omega \sigma \mu; \dots \lambda_{2n} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2}$$

a et b sont respectivement la largeur et la hauteur de l'induit, J_1 est la fonction de Bessel de première espèce, et D_{1i} , D_{2i} , B_{1i} et B_{2i} sont des constantes d'intégration.

La solution générale s'écrit alors sous la forme:

$$A_{\varphi}(r, z) = A_{1\varphi}(r, z) + A_{2\varphi}(r, z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (D_{1n} \cdot \text{sh}(\beta_{1n} z) + D_{2n} \cdot \text{ch}(\beta_{1n} z)) \cdot J_1(\lambda_{1n}) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_{1n} \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} z + B_{2n} \cdot \cos \frac{n\pi}{2b} z \right) \cdot J_1(\lambda_{2n}) \quad (10)$$

Ses projections sur les frontières du domaine génèrent le système:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (D_{1n} \text{sh}(\beta_{1n} b) + D_{2n} \text{ch}(\beta_{1n} b)) J_1(\lambda_{1n} r) = A_1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-D_{1n} \text{sh}(\beta_{1n} b) + D_{2n} \text{ch}(\beta_{1n} b)) J_1(\lambda_{1n} r) = A'_1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (B_{1n} \sin \frac{n\pi}{2b} z + B_{2n} \cos \frac{n\pi}{2b} z) J_1(\lambda_{2n} r) = A_2 \end{cases} \quad (11)$$

A_1 et A'_1 sont des fonctions inconnues qui ne dépendent que de la variable r , et A_2 une fonction qui ne dépend que de la variable z .

CALCUL DU TERME $\partial A / \partial n$

La variable d'étude en coordonnées axisymétriques étant $A = r A_\varphi$, on peut calculer:

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} (r \cdot A_\varphi) = \frac{\partial (r \cdot A_\varphi)}{\partial r} \cdot n_r + \frac{\partial (r \cdot A_\varphi)}{\partial z} \cdot n_z \quad (12)$$

que l'on calcule à partir des expressions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} (D_{1n} \text{sh}(\beta_{1n} z) + D_{2n} \text{ch}(\beta_{1n} z)) \cdot \lambda_{1n} \cdot J_0(\lambda_{1n} r) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left(B_{1n} \sin \frac{n\pi}{2b} z + B_{2n} \cos \frac{n\pi}{2b} z \right) \cdot \lambda_{2n} \cdot J_0(\lambda_{2n} r) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= \sum_{n=1}^{\infty} (D_{1n} \text{ch}(\beta_{1n} z) - D_{2n} \text{sh}(\beta_{1n} z)) \cdot \beta_{1n} \cdot r \cdot J_1(\lambda_{1n} r) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2b} \left(B_{1n} \cos \frac{n\pi}{2b} z - B_{2n} \sin \frac{n\pi}{2b} z \right) \cdot r \cdot J_1(\lambda_{2n} r) \end{aligned} \quad (14)$$

COUPLAGE DES SOLUTIONS

Le couplage est assuré par la résolution de l'équation (3) qui tient compte de la solution analytique en tant que terme de frontière pour la solution Eléments Finis.

Dans l'équation (3), les éléments du vecteur [B] dépendent des coefficients D_{1n} , D_{2n} , B_{1n} et B_{2n} intervenant dans la solution analytique et sa dérivée normale.

Appelons $[A_3]$ le vecteur des coefficients inconnus et dont la dimension est déterminée par le nombre de termes retenus pour assurer la convergence des séries de Fourier-Bessel (11) :

$$[A_3] = [D_{11} \dots D_{1n} \ D_{21} \dots D_{2n} \ B_{11} \dots B_{1n} \ B_{21} \dots B_{2n}] \quad (15)$$

Le vecteur [B] peut alors être mis sous la forme:

$$[B] = [W] \cdot [A_3]$$

On peut alors écrire l'équation (3) sous la forme:

$$[C] \cdot [A] - [W] \cdot [A_3] = [F] \quad (16)$$

qui peut se décomposer en:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

où on désigne par l'indice 1 les nœuds compris dans la région concernée par le calcul numérique Eléments Finis, et par l'indice 2, ceux situés sur la frontière de couplage des solutions analytique et numérique.

L'équation (17) peut se mettre aussi sous la forme:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

CONSTANTES D'INTEGRATION

Les équations du système (11) indiquent que D_{1n} , D_{2n} , B_{1n} et B_{2n} représentent les coefficients des expansions en séries de Fourier-Bessel des conditions de frontières $A_1(r)$, $A'_1(r)$, et $A_2(z)$. Ils peuvent être calculés par:

$$\begin{cases} D_{1n} = \frac{2 \int_0^a r \cdot A_1 \cdot J_1(\lambda_{1n} r)}{[a \cdot J_1(\lambda_{1n})]^2} \\ D_{2n} = \frac{2 \int_0^a r \cdot A'_1 \cdot J_1(\lambda_{1n} r)}{[a \cdot J_1(\lambda_{1n})]^2} \\ B_{1n} = \frac{2}{T} \int_0^r A_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} z \cdot dz \\ B_{2n} = \frac{2}{T} \int_0^r A_2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2b} z \cdot dz \end{cases} \quad (19)$$

Le calcul analytique de ces intégrales est possible si l'on admet une forme de variation des potentiels A_1 , A'_1 et A_2 .

Le couplage des solutions est alors assuré par le calcul des séries de Fourier (13, 14) permettant le calcul de la dérivée normale (12), dans chacun des nœuds de discrétisation de la frontière de couplage $\Gamma[1]$ (Fig.3).

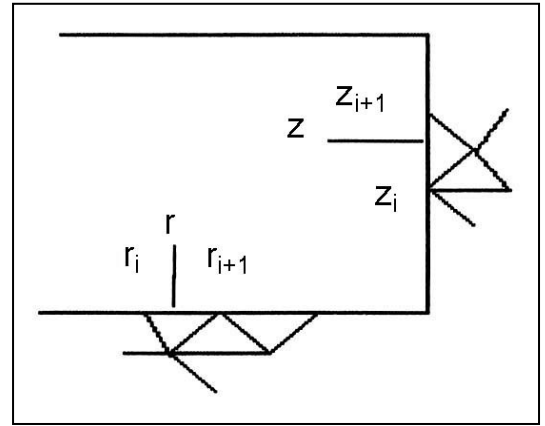


Figure 3: Discrétisation de A_1 , A'_1 et A_2 .

Pour notre part, on approchera les potentiels A_1 , A'_1 et A_2 par les fonctions d'approximation Eléments Finis calculées à partir des potentiels des nœuds situés sur les frontières de couplage. Ils sont calculés par:

$$\begin{aligned} A_1 \text{ (ou } A'_1) &= \sum_{i=1}^{nbr} \left(\frac{r - r_i}{r_{i+1} - r_i} A_{i+1} + \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i} A_i \right) \\ A_2 &= \sum_{i=1}^{nbz} \left(\frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i} A_{i+1} + \frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i} A_i \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Le calcul des intégrales (19) donne alors:

$$B_{1n} = \sum_{i=1}^{n_1} S_n(A_i f_1 + A_{i+1} f_2) \quad (21-a)$$

$$B_{2n} = \sum_{i=1}^{n_1} S_n(A_i f'_1 + A_{i+1} f'_2) \quad (21-b)$$

avec:

$$S_n = \frac{1}{2b J_1(\lambda_{2n} a)(z_{i+1} - z_i)}$$

$$f_1 = \left(\frac{2b}{n\pi}\right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{2b} z_i - \sin \frac{n\pi}{2b} z_{i+1} \right) + (z_{i+1} - z_i) \left(\frac{2b}{n\pi}\right) \cos \left(\frac{n\pi}{2b} z_i\right)$$

$$f_2 = \left(\frac{2b}{n\pi}\right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{2b} z_{i+1} - \sin \frac{n\pi}{2b} z_i \right) + (z_i - z_{i+1}) \left(\frac{2b}{n\pi}\right) \cos \left(\frac{n\pi}{2b} z_{i+1}\right)$$

$$f'_1 = \left(\frac{2b}{n\pi}\right)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{2b} z_i - \cos \frac{n\pi}{2b} z_{i+1} \right) + (z_{i+1} - z_i) \left(\frac{2b}{n\pi}\right) \sin \left(\frac{n\pi}{2b} z_i\right)$$

$$f'_2 = \left(\frac{2b}{n\pi}\right)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{2b} z_{i+1} - \cos \frac{n\pi}{2b} z_i \right) + (z_i - z_{i+1}) \left(\frac{2b}{n\pi}\right) \sin \left(\frac{n\pi}{2b} z_{i+1}\right)$$

$$D_{1n} = \frac{\alpha_n - \chi_n}{2\text{sh}(\beta_n b)} \quad \text{et} \quad D_{2n} = \frac{\alpha_n + \chi_n}{2\text{sh}(\beta_n b)} \quad (21-c,d)$$

avec :

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{nh} \left(\frac{k_n}{\lambda_{1n}^3} \right) [A_i (r_{i+1} \lambda_{1n} I_1 - I_2) + A_{i+1} (I_2 - r_i \lambda_{1n} I_1)]$$

$$\chi_n = \sum_{i=1}^{nb} \left(\frac{k_n}{\lambda_{1n}^3} \right) [A_i (r_{i+1} \lambda_{1n} I_1 - I_2) + A_{i+1} (I_2 - r_i \lambda_{1n} I_1)]$$

nh et nb représentent respectivement les nombres de nœuds sur les parties haute et basse de la frontière de couplage, avec:

$$I_1 = 4 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\lambda_{1n} r_{i+1}}{2}\right)^{2m+3}}{(2m+3)m!(m+1)!} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\lambda_{1n} r_i}{2}\right)^{2m+3}}{(2m+3)m!(m+1)!} \right)$$

$$I_2 = (\lambda_{1n} r_{i+1})^2 J_2(\lambda_{1n} r_{i+1}) - (\lambda_{1n} r_i)^2 J_2(\lambda_{1n} r_i)$$

$$k_n = \frac{2}{[a J_2(\lambda_{1n} a)]^2 (r_{i+1} - r_i)}$$

Ces relations font apparaître une dépendance des éléments du vecteur $[A_3]$ en fonction de ceux des potentiels nodaux $[A_2]$.

$$[A_3] = [K] \cdot [A_2]$$

ou encore:

$$[I] \cdot [A_3] - [K] \cdot [A_2] = 0 \quad (22)$$

où $[I]$ est la matrice diagonale et $[K]$ celle des coefficients

exprimant la dépendance de $[A_3]$ vis-à-vis de $[A_2]$ et calculés par les relations (19).

Le système d'équation (18) peut alors être augmenté en:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & -W \\ 0 & K & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

dont la résolution permet aussi bien le calcul des valeurs nodales recherchées du potentiel vecteur que celui des coefficients inconnus de la solution analytique.

MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE

Pour la mise en œuvre de la méthode proposée, nous avons construit un code de calcul capable de prendre en charge les approches numériques par éléments finis, le calcul analytique ainsi que leur couplage par l'intermédiaire du terme frontière en $\partial A / \partial n$ dans la solution numérique. Le code construit est réservé aux structures axisymétriques. Il tient compte des non linéarités du circuit magnétique et intègre les équations des deux modèles magnétostatique et magnétodynamique. Sa structure globale est donnée sur la figure 4.

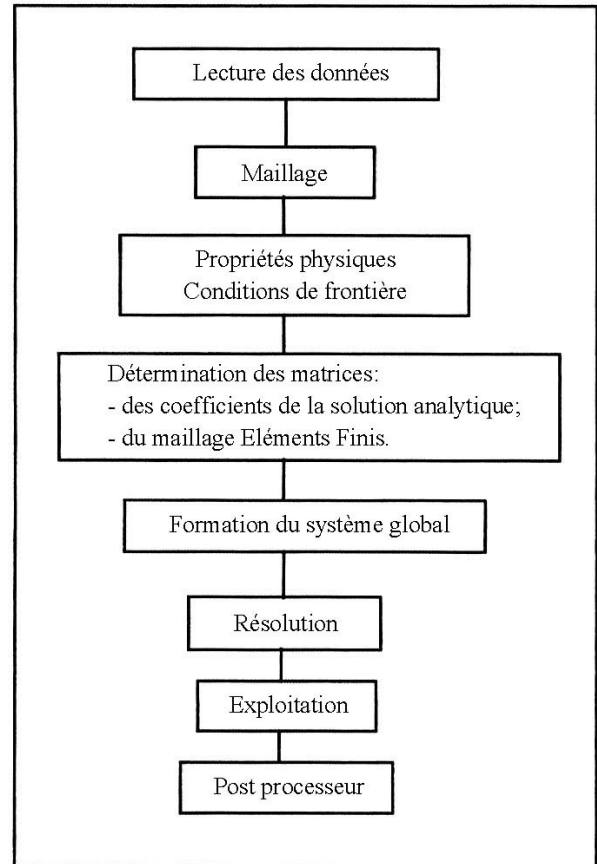


Figure 4: Organigramme des codes construits.

APPLICATION

Le modèle que nous avons construit est appliqué à un dispositif axisymétrique induit/inducteur tel que représenté sur la figure 1. L'induit est caractérisé par une conductivité

électrique de $3.5e7$ et l'inducteur est alimenté de manière sinusoïdale. La figure 5 montre le tracé des lignes de champ sur une partie du domaine d'étude faisant un zoom sur la surface de l'induit et de l'inducteur.

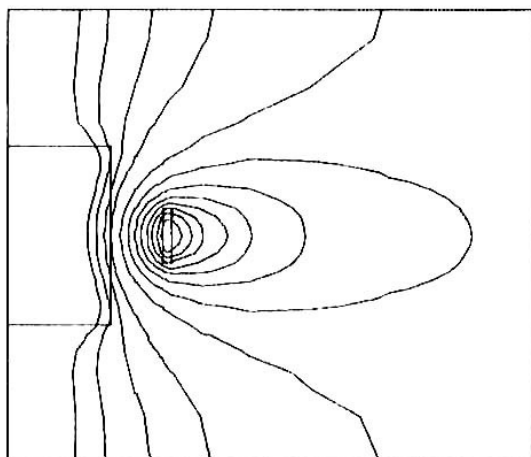


Figure 5: Tracé des lignes de champ.

Densité de courant induit et puissance dissipée:

La densité des courants induits est donnée par:

$$J_{ind} = \sigma E = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (24)$$

qui donne, pour une alimentation sinusoïdale:

$$\begin{aligned} J_{ind} &= -j\omega\sigma A \\ &= -j\omega\sigma \sum_{n=1}^{nz} (D_{1n} \text{sh}(\beta_{1n}z) + D_{2n} \text{ch}(\beta_{1n}z)) J_1(\lambda_{1n}r) \\ &= + \sum_{n=1}^{nk} \left(B_{1n} \sin \frac{n\pi}{2b} z + D_{2n} \cos \frac{n\pi}{2b} z \right) J_1(\lambda_{2n}r) \end{aligned} \quad (25)$$

Les figures 6 et 7 représentent les variations de la densité de courant dans l'induit respectivement en fonction des paramètres r (rayon) et z (hauteur) et comparent les résultats donnés par notre modèle à ceux donnés par le logiciel de calcul par éléments finis Pdetool de Matlab.

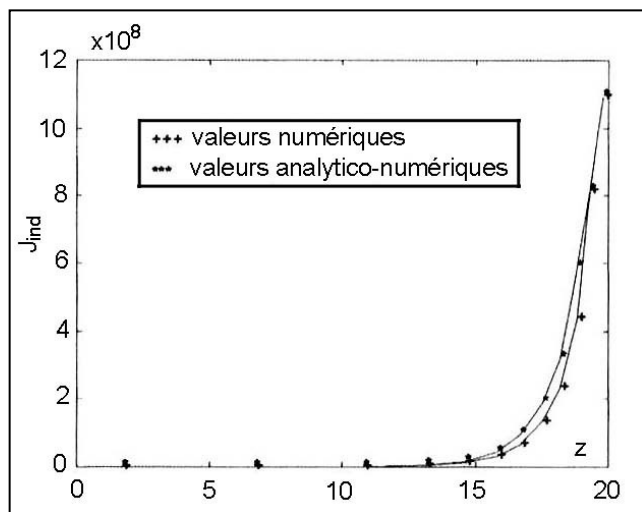


Figure 7: Variation de J_{ind} avec z .

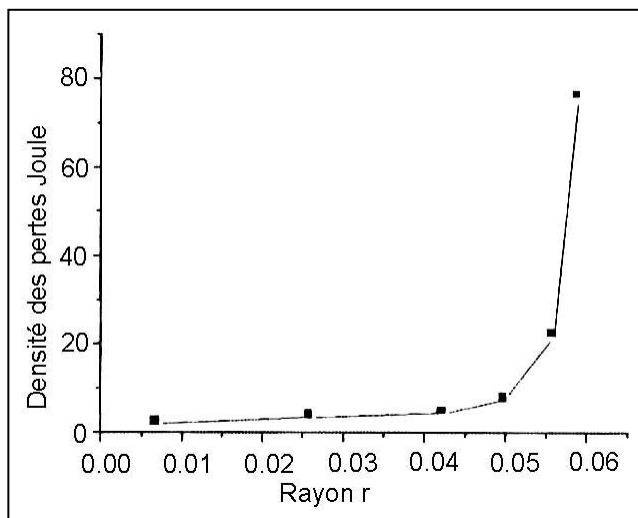


Figure 8: Densité de puissance en fonction du rayon r .

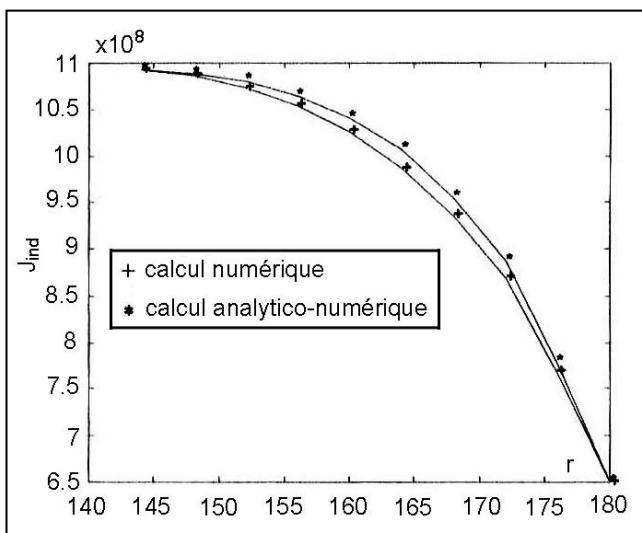


Figure 6: Variation de J_{ind} avec r .

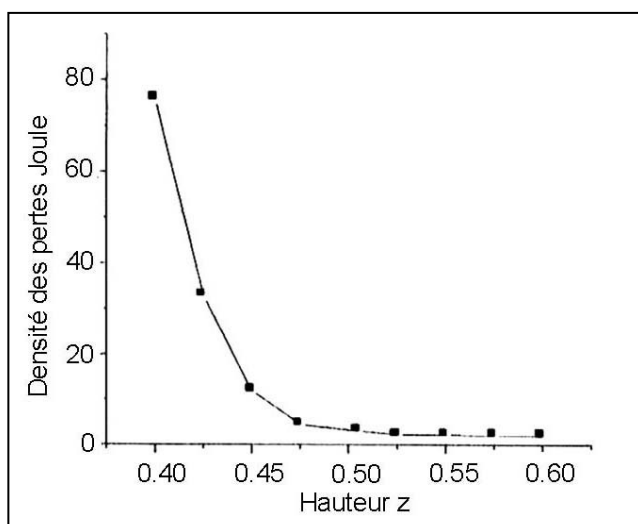


Figure 9: Densité de puissance en fonction de la hauteur.

La densité de puissance dissipée est donnée quant à elle par l'expression:

$$P(r, z) = \frac{J^2}{\sigma} = -\sigma\omega^2 A^2$$

$$= -\sigma\omega^2 \sum_{n=1}^{nk} (D_{1n} \text{sh}(\beta_{1n} z) + D_{2n} \text{ch}(\beta_{1n} z)) J_1(\lambda_{1n} r) \quad (26)$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{nk} \left(B_{1n} \sin \frac{n\pi}{2b} z + D_{2n} \cos \frac{n\pi}{2b} z \right) J_1(\lambda_{2n} r) \right)^2$$

Les figures 8 et 9 montrent les variations de la densité de puissance dissipée dans l'induit en fonction du rayon r et de la hauteur z .

CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés à la formulation d'un modèle de résolution analytico-numérique dans les dispositifs d'actionnement électromagnétique. Cette approche vise notamment à soulager les lourdeurs du maillage Eléments Finis, essentiellement en présence de l'effet de peau.

L'intérêt de notre approche consiste en l'intégration du calcul des coefficients de la solution analytique à l'intérieur du système généré par le maillage Eléments Finis. Outre le fait de se passer de toute hypothèse admise *a priori* sur la nature et la valeur du potentiel sur la frontière de couplage, cette approche évite de recalculer les sommes des séries (11, 13, 14) en chacun des points du maillage de la frontière de couplage Γ .

Afin de permettre la mise en œuvre de notre approche, un code de calcul a été développé. Celui-ci permet, outre les fonctionnalités offertes par les logiciels Eléments Finis

standards, de tenir compte de la solution analytique à travers le calcul du terme $\partial A / \partial n$ sur les frontières de couplage.

Une application du modèle proposé à un problème typique du chauffage par induction a ensuite été faite et a permis d'en vérifier la validité par une comparaison notamment des résultats obtenus avec ceux donnés par le logiciel de calcul numérique par éléments finis Pdetool de Matlab.

REFERENCES

- [1]- Mohellebi H. and Feliachi M., "Coupled 2D analytical and finite element analysis for the eddy current computation", 3th International Workshop of Electric and Magnetic Fields, Liege (Belgium), 6-9 May (1996), pp. 339-344.
- [2]- Gong L., Hagel R., Zhang K., Unbehauen R., "Solution of the Helmholtz equation with eddy currents in cylindrical coordinate by longitudinal components", *IEEE Trans. On magnetics*, vol.28, N°2, March (1992).
- [3]- Al-Shaikhli A.K.M., Hobson L., "Novel technique for the design of induction billet heaters", *IEE Proceeding*, vol. 133, p.b. NC 5, Sept. (1986).
- [4]- Liu Z.J., Bi C., Tan H.C. and Low T-S., "A combined numerical and analytical approach for magnetic field Analysis of permanent magnet machines", *IEEE Trans. On magnetics*, vol. 31, N°3, May (1995).
- [5]- Kladas A.G., Tegopoulos John A., "Eddy current modeling in solid iron by using analytic element", *IEEE Trans. On magnetics*, vol. 30, N°5, Sept. (1994).
- [6]- Lee K.S. *et al*, "Coupling finite elements and analytical solution in the airgap of electric machines", *IEEE Trans. On magnetics*, vol.27, N°5, Sept. (1991). □