

## SUR LA FRONTIÈRE COMPLEXE DU BASSIN D'ATTRACTION DE L'ATTRACTEUR DE FEIGENBAUM : STRUCTURE ET DIMENSION FRACTALE

Reçu le 11/02/2001 – Accepté le 01/10/2002

### Résumé

Ce travail consiste en la détermination, dans le champ complexe, du bassin d'attraction  $B$  de l'Attracteur Cantorien de Feigenbaum. La frontière  $\partial B$  de ce bassin coïncide avec l'ensemble de Julia d'un polynôme quadratique, le tracé de cet ensemble montrant que celui-ci possède une structure fractale. On utilise ensuite l'algorithme de "box-counting" pour estimer numériquement la dimension fractale de cette frontière.

**Mots clés :** *Fractales, Systèmes Dynamiques, Attracteur chaotique, ensemble de Julia, Dimension fractale.*

### Abstract

The aim of this work is the determination of the complex attractive basin  $B$  of the well-known Feigenbaum chaotic attractor. The boundary  $\partial B$  of this basin is identical with the Julia set of a quadratic polynomial, and exhibits a fractal structure. The fractal dimension of  $\partial B$  is numerically calculated using the "box-counting" algorithm.

**Key words :** *Fractals, Dynamical Systems, Chaotic attractor, Julia set, Fractal dimension.*

**Classification AMS** (année 2000) : 28A80, 30D05, 58F13, 58F23.

### N. AKROUNE

Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
et des Sciences de l'Ingénieur  
Université de Béjaïa, Algérie

## I- INTRODUCTION

### I.1- Contexte

Dans son travail sur les ensembles de mesure de Lebesgue nulle, Hausdorff (1919) a souligné que leur caractéristique géométrique commune est la self-similarité : toute partie de l'ensemble considéré garde la structure de l'ensemble-père, et cela à différentes échelles d'examen.

L'étude de ce type d'ensembles a été par la suite relancée dans les années 1975 par Mandelbrot [17]; il lui a donné l'appellation de 'fractale' et a introduit la notion de dimension fractale pour quantifier le degré d'auto-similarité observé ainsi que la densité de l'ensemble dans l'espace de phases. Cette nouvelle donne généralise la dimension topologique usitée en algèbre linéaire et en géométrie différentielle. Contrairement à cette dernière dimension dont la valeur est toujours entière, la dimension fractale est généralement fractionnaire.

De nos jours, les fractales trouvent leurs applications dans maintes branches des sciences et techniques; de ce fait, elles constituent un sujet de recherche important dans pratiquement toutes les disciplines scientifiques [10, 1].

En Mathématiques, on rencontre les fractales surtout dans la théorie des systèmes dynamiques. L'étude du comportement asymptotique des systèmes dynamiques à temps discret a, depuis longtemps, focalisé l'attention de nombreux auteurs. Citons, entre autres, les références [15, 4, 3] dans le cas holomorphe, et [5, 8, 9, 14] dans le cas non holomorphe.

Certains de ces derniers systèmes présentent un caractère particulier: en effet, dans leur évolution, on n'observe de convergence ni vers un point fixe (à distance finie ou non), ni vers un cycle limite, bien que la trajectoire reste dans une partie bornée de l'espace de phases.

En fait, la distance entre deux trajectoires, même issues de points de départ infiniment proches, croît exponentiellement avec le temps. Un tel système dynamique est dit *sensible aux conditions initiales*, et l'ensemble-limite est alors appelé attracteur chaotique [13, 6, 7].

### ملخص

الهدف من هذه المقالة هو إيجاد، في مجموعة الأعداد المركبة، ميدان الجاذبية  $B$  للجذاب الفوضوي (attracteur chaotique) لـ Feigenbaum. نلاحظ أن الحدود  $\partial B$  لهذا الميدان أن مطابقة لمجموعة جوليا المرفقة بكثير حدود ذات الدرجة الثانية، وأن لها بنية كسرية (Fractale). في الأخير، نقوم بالحساب العددي للبعد الكسري (Dimension fractale) لتلك المجموعة، وذلك باستخدام الخوارزمية المسماة "تعداد العلب" (Box-counting).

**الكلمات المفتاحية:** الكسيريات، الأنظمة الدينامية، الجذاب الفوضوي، مجموعة جوليا، البعد الكسري.

## I.2- Objectif de l'article

Les attracteurs chaotiques, ainsi que les ensembles de Julia [3] liés aux systèmes dynamiques holomorphes, présentent, pour la plupart, un aspect fractal. Dans toute la suite,  $E$  désignera soit un attracteur chaotique (sous-ensemble de  $\mathbf{R}$  ou de  $\mathbf{R}^2$ ), soit un ensemble de Julia borné dans  $\mathbf{C}$ .

Selon que l'on s'intéresse aux propriétés métriques (i.e. basées sur la notion de distance) et/ou aux propriétés probabilistes de  $E$  (i.e. : différence des densités de points entre ses régions), on obtient plusieurs algorithmes de calcul numérique de sa dimension fractale. Suivant la propriété et l'algorithme utilisés, on distingue notamment la dimension: de Hausdorff, de capacité, d'information, de corrélation, ponctuelle, etc. [16, 7].

Le présent travail est consacré à l'attracteur chaotique du système dynamique engendré par la transformation logistique [8]. On précisera, tracé à l'appui, son domaine (ou bassin) d'attraction  $B$  dans le champ complexe, puis on donnera deux estimations de la dimension fractale (une de capacité, et l'autre d'information) de la frontière  $\partial B$  de  $B$  et cela par l'algorithme de "box-counting" [6].

## II- RAPPELS SUR LA DIMENSION DE CAPACITE ( $d_{cap}$ ) ET D'INFORMATION ( $d_{inf}$ )

Les deux définitions qui suivent constituent l'ossature de l'algorithme dit de "box-counting" (comptage de boîtes) pour la détermination numérique de  $d_{cap}$  et de  $d_{inf}$  d'un ensemble  $E$ .

### - Principe de l'algorithme

Il consiste en l'immersion de l'ensemble  $E$  considéré dans une grille  $G(\varepsilon)$  de taille  $\varepsilon$ : chaque cellule de la grille est un intervalle de longueur  $\varepsilon$  (resp. un carré de côté  $\varepsilon$ ) si  $E \subset \mathbf{R}$  (resp. si  $E \subset (\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{C})$ ). Les cellules de  $G(\varepsilon)$  sont construites de telle façon qu'un point quelconque de  $E$  appartient à une, et une seule, d'entre elles [20].

On notera, ci-après, par  $T(\varepsilon)$  le nombre de cellules non vides de  $G(\varepsilon)$ , c'est-à-dire qui contiennent au moins un point de l'ensemble  $E$ .

### II.1- Dimension de capacité. Définition

La dimension de capacité  $d_{cap}(E)$  de  $E$  est donnée par :

$$(d_{cap} = d_{cap}(E)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\ln(T(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \quad (\text{lorsque la limite existe});$$

autrement dit, pour  $\varepsilon$  voisin de 0,  $T(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_{cap}}$ .

### II.2- Dimension d'information. Définition

La définition précédente est purement ensembliste; elle ne tient pas compte notamment des caractéristiques géométriques et dynamiques de l'ensemble  $E$ . Pour définir la dimension d'information, on suppose l'existence d'une mesure naturelle  $\mu$  sur  $E$  (voir les références [16, 7] ainsi que [4, 2] sur ce point précis). Pour une cellule  $S$  de la grille  $G(\varepsilon)$ ,  $\mu(S)$  représente la proportion du temps de séjour (appelée aussi la fréquence de visite) du système dynamique (engendrant  $E$ ) dans la cellule  $S$ .

Si l'on note par  $S^{(k)}(\varepsilon)$   $k = 1..T(\varepsilon)$ , les  $T(\varepsilon)$  cellules non vides de  $G(\varepsilon)$ , alors la dimension d'information  $d_{inf}(E)$  est donnée par la limite suivante (lorsqu'elle existe) :

$$(d_{inf} = d_{inf}(E)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}$$

où

$$H(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{T(\varepsilon)} \mu(S^{(k)}(\varepsilon)) \cdot \ln(\mu(S^{(k)}(\varepsilon))).$$

### Remarques:

1) D'après les définitions de  $d_{cap}$  et  $d_{inf}$ , on a toujours l'inégalité:  $d_{cap} \geq d_{inf}$ .

2) Des exemples de fractales  $E$ , pour lesquelles les deux limites précédentes n'existent pas, sont traités dans Lausberg [16].

## II.3- Commentaires sur l'algorithme de box-counting

Grassberger *et al.* [11], et surtout Greenside *et al.* [12], ont montré que l'algorithme de box-counting est impraticable dans  $\mathbf{R}^n$  (pour  $n$  grand); en effet, dans ce cas, la place mémoire requise ainsi que le temps de calcul sont considérables.

On lui préfère alors l'algorithme basé sur l'intégrale de corrélation [7, 16] pour déterminer ainsi la dimension fractale  $D$ , dite alors dimension de corrélation. Dans cette optique, Shirer *et al.* [21] ont traité un exemple concret en météorologie dans l'espace de phases  $\mathbf{R}^n$  avec  $n = 21$ . Cependant, l'algorithme de box-counting reste le plus utilisé quand la dimension de l'espace de phases ne dépasse pas trois, ce qui est notre propos ici.

## II.4- Calcul numérique de $d_{cap}$ et $d_{inf}$

On approche l'ensemble (théorique)  $E$  par un ensemble  $\hat{E}$ , constitué d'un grand nombre  $N$  de points, qu'on recouvre ensuite par une grille  $G(\varepsilon)$ , avec  $\varepsilon$  un rayon de départ fixé et "petit" devant le diamètre de  $\hat{E}$ . La mesure  $\mu(S)$ , qui apparaît dans l'expression de la dimension d'information de chaque cellule  $S$  de  $G(\varepsilon)$ , est approximée par la probabilité qu'a un point de  $\hat{E}$  d'être dans la dite cellule, i.e.:

$$\mu(S) \approx \frac{\text{card}(\hat{E} \cap S)}{N}$$

En faisant ensuite décroître le rayon  $\varepsilon$  vers 0, on obtient, en liaison avec les définitions des deux dimensions (voir ci-dessus), deux nuages de points qui seront notés  $(\ln(\varepsilon), -\ln(T(\varepsilon)))$  et  $(\ln(\varepsilon), H(\varepsilon))$ .

Le moyen le plus couramment utilisé, pour estimer numériquement  $d_{cap}(E)$  et  $d_{inf}(E)$ , consiste à ajuster par une droite aux moindres carrés chacun des deux précédents nuages [7, 16]. Les pentes de ces deux droites nous donnent finalement les estimations respectives cherchées.

## III- L'ATTRACTEUR CHAOTIQUE DE LA TRANSFORMATION LOGISTIQUE

Soit  $f_\lambda$  l'application  $f_\lambda : (I = [0, 1]) \rightarrow I$   $x \mapsto \lambda \cdot x \cdot (1-x)$  où  $\lambda \in [0, 4]$  est un paramètre réel.

Feigenbaum [8, 9] a été le premier à étudier en détails le comportement itératif de cette fonction quadratique. Le système dynamique discret  $(I, N, f_\lambda)$  a fait ensuite l'objet de nombreux travaux dans la littérature [5, 11, 19].

L'intérêt de ce système réside dans ce qui suit: en augmentant la valeur du paramètre  $\lambda$  (à partir de 0), on observe une séquence de bifurcations qui dédouble la période des orbites périodiques; il nous est donc facile de suivre la transition vers le chaos [13].

Plus précisément, la plus petite valeur de  $\lambda$  pour laquelle le système dynamique, engendré par  $f_\lambda$ , admet une infinité d'orbites périodiques distinctes est  $\lambda_c = 3.5699456\dots$

L'ensemble de ces orbites est de longueur nulle, mais est non dénombrable. C'est un attracteur chaotique, de type cantorien (ou "poussière" de Cantor) [17,16]. Cet ensemble fractal, qu'on appellera "attracteur de Feigenbaum", sera noté par  $A$  dans la suite.

#### - Dimension fractale de l'attracteur de Feigenbaum

Comme tout sous-ensemble cantorien de  $\mathbf{R}$ , la dimension fractale  $D$  de l'attracteur  $A$  vérifie donc l'inégalité:  $0 < D < 1$ . Grassberger *et al.* [11] ont donné des estimations, prises comme références dans la littérature, de la dimension de capacité  $d_{cap}$  de  $A$  et de sa dimension d'information  $d_{inf}$ . Ces estimations sont:

$$d_{cap} = 0.538\dots, \quad d_{inf} = 0.517\dots$$

Pour notre part, on a proposé dans [2] un procédé réellement implémentable et expérimentalement efficace, qui utilise l'algorithme du "box-counting" (voir ci-dessus) avec une discrétisation particulière et judicieusement choisie du domaine de variation du rayon  $\varepsilon$ . Cette variante permet d'approcher numériquement les deux précédentes dimensions de n'importe quel sous-ensemble borné de  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{C}$ .

Appliquée à l'attracteur  $A$ , formé de  $N = 250.000$  points, notre méthode a fourni les résultats suivants :

$$d_{cap} = 0.534\dots, \quad d_{inf} = 0.511\dots$$

et ces valeurs sont très proches de celles indiquées dans [11].

#### IV- BASSIN D'ATTRACTION DE L'ATTRACTEUR A DANS LE CHAMP COMPLEXE

Dans le but d'effectuer une étude approfondie, et donc plus complète, du comportement itératif de la fonction  $f_\lambda$  sur l'intervalle  $I$ , il est nécessaire de transposer le problème vers le champ complexe [18]. Dans ce cas, l'ensemble de Julia de la nouvelle transformation  $f_\lambda$  (cette fois-ci définie sur  $\mathbf{C}$ ) joue un rôle essentiel. Nous rappelons brièvement son importance dans ce qui suit.

Soit  $\Gamma$  un ensemble invariant et attractif d'une fonction méromorphe complexe  $g$  (ex: point fixe, cycle, etc.). En notant par  $g^n$  la composée ( $n$  fois) de  $g$ , le domaine total d'attraction  $DT(\Gamma)$  de  $\Gamma$  est défini par :

$$DT(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbf{C} / \exists \hat{z} \in \Gamma : g^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{z} \right\}$$

En fait, la propriété principale de l'ensemble de Julia  $J = J(g)$  est que ses points n'appartiennent à aucun domaine d'attraction [3].

Quand  $g$  est un polynôme quadratique, comme c'est le

cas de la transformation  $f_\lambda(z) = \lambda_c z(1-z)$  avec  $z \in \mathbf{C}$  et  $\lambda$  fixé dans  $\mathbf{C}$ , l'ensemble  $J$  forme une frontière entre, d'une part, le domaine (ou bassin) total d'attraction du point à l'infini (qui est toujours un point fixe super-attractif), et le bassin d'attraction du cycle (ou point fixe) attractif de  $g$  (lorsqu'il existe) d'autre part [4, 15].

Afin de déterminer et de tracer, dans  $\mathbf{C}$ , l'ensemble  $DT(A)$  de l'attracteur  $A$ , on va donc étudier le comportement itératif de la fonction  $f_{\lambda_c}(z) = \lambda_c z(1-z)$ . Pour des raisons de simplifications, il est plus commode de mener cette étude sur la fonction  $g$  qui est topologiquement conjuguée à  $f_{\lambda_c}$  [5, 3]. Cette fonction est

$$g(z) = L \circ f_{\lambda_c} \circ L^{-1}(z) = z^2 + \gamma$$

où

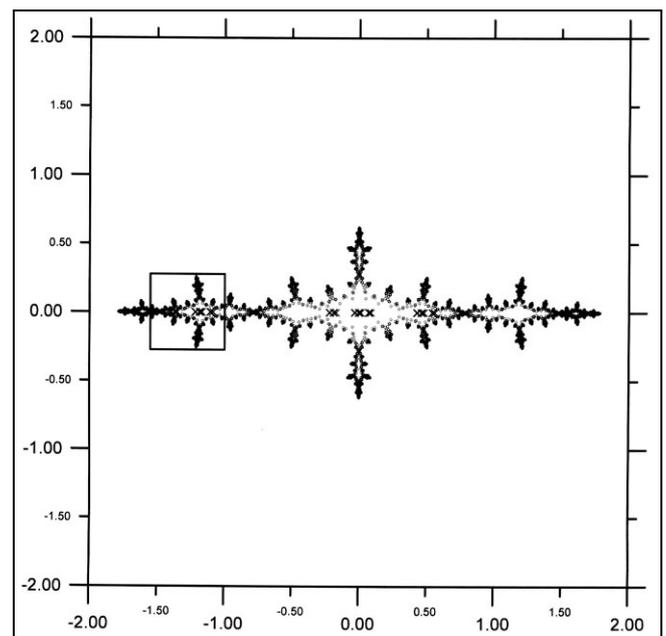
$$\gamma = \frac{\lambda_c}{2} - \frac{(\lambda_c)^2}{4} = -1.4011551\dots$$

et  $L$  est l'application inversible définie par  $L(z) = -\lambda_c z + \frac{\lambda_c}{2}$ .

Outre le point à l'infini (qui, rappelons-le, est point fixe attractif), l'application  $g$  admet, comme points fixes, les réels  $x_1 = 1.7849728\dots$  et  $x_2 = 1 - x_1$ . Comme  $|g'(x_1)| > 1$  et  $|g'(x_2)| > 1$ , les deux points  $x_1$  et  $x_2$  sont tous les deux répulsifs, et l'ensemble de Julia  $J$  du polynôme  $g$  s'en déduit aisément [4] :

$$(J = J(g)) \equiv \overline{\left\{ z \in \mathbf{C} / g^n(z) = z_0; n = 0, 1, 2, \dots \right\}}$$

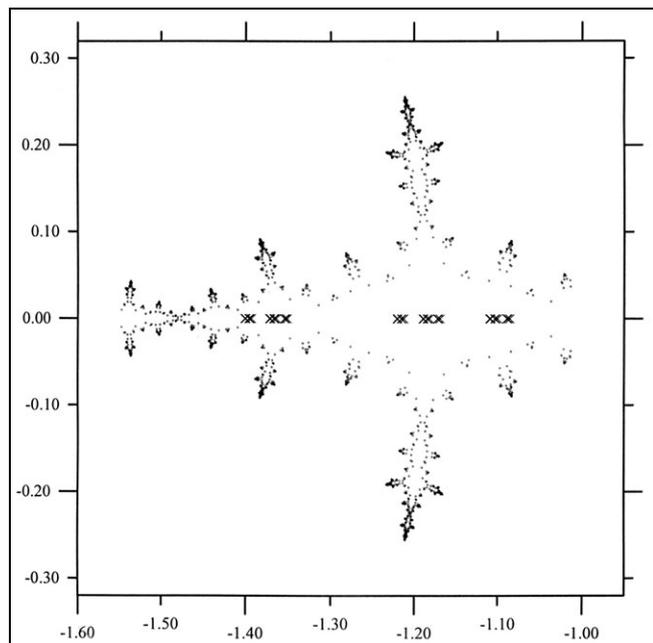
avec  $z_0 = x_1$  (ou  $z_0 = x_2$ ), et où  $\bar{U}$  dénote l'adhérence de l'ensemble  $U$ .



**Figure 1:**  $\times \times \times \times$  : Attracteur de Feigenbaum ( $A' = L(A)$ ).  
 $\dots\dots\dots$  : Ensemble de Julia de  $g(z) = z^2 - 1.4011551\dots$   
 Nombre de points de chaque ensemble :  $N = 20.000$ .

L'ensemble  $J$ , approché par  $N = 20.000$  points, est dessiné en Figure 1. Sur cette même figure, on a tracé aussi l'attracteur  $A' = L(A)$ . Signalons au passage que  $A$  a été transformé en  $A'$  par le biais de la conjugaison topologique ci-dessus. Pour une perception (géométrique) meilleure de

la relation Attracteur / Bassin, on a effectué un zoom sur la région indiquée en figure 1 l'agrandissement obtenu est présenté en figure 2.



**Figure 2 :** Agrandissement du carré indiqué en figure 1.  
 Coordonnées du carré :  $[-1.55, -1] \times [-0.275, 0.275]$ .  
 Nombre de points de l'ensemble de Julia : 3014 (sur 20.000).  
 Nombre de points de l'Attracteur de Feigenbaum : 10.000.

Le compact  $J = J(g)$  présente visiblement une structure fractale [17]; il est connexe et est constitué d'une infinité de courbes de Jordan [3, 4]. Il forme une frontière entre le domaine d'attraction du point à l'infini, et le bassin  $B$  d'un ensemble attractif et non dénombrable qui n'est autre que l'Attracteur de Feigenbaum  $A'$ ; autrement dit,  $J$  est la frontière de  $B : J \equiv \partial B$ .

Connaissant maintenant ( $J=J(g)$ ), il est possible de localiser le bassin  $B_R$  de l'Attracteur  $A'$  sur l'axe réel  $R$ . En effet, les points de  $J$  situés sur l'axe réel vérifient l'inclusion:  $(J \cap R) \subset (H = [-x_1, x_1 = 1.7849728])$ , il vient alors que  $B_R = H - (J \cap R) - A'$ .

### V- CALCUL NUMERIQUE DE LA DIMENSION FRACTALE DE $\partial B$

Le procédé décrit dans [2] a été appliqué à la fractale  $\partial B$  de la figure 1. Les estimations trouvées de la dimension de Capacité  $d_{cap}$  et de la dimension d'Information  $d_{inf}$  sont non entières et valent :

$$d_{cap} = 1.122... \quad \text{et} \quad d_{inf} = 0.943... .$$

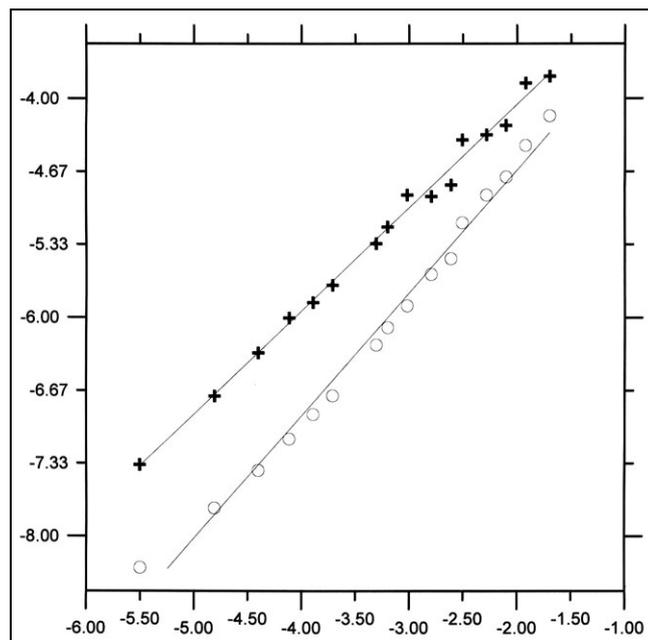
Pour tester la validité de ces valeurs numériques, on a représenté, en figure 3, les deux nuages de points  $(\ln(\varepsilon), -\ln(T(\varepsilon)))$  et  $(\ln(\varepsilon), H(\varepsilon))$  obtenus (se reporter à la section II-4 ci-dessus).

Dans chacun des deux cas, l'allure générale est sensiblement une droite: la méthode des moindres carrés préconisée dans le cadre de notre approche est donc tout à fait valable. D'ailleurs, ceci est confirmé par les coefficients de corrélation (ou de détermination)  $\rho$  issus des ajustements

effectués:

$$\rho_{cap} = 98.92 \quad \text{et} \quad \rho_{inf} = 99.35.$$

Finalement, et pour appuyer ces observations, on trace sur la même figure 3, les deux droites (aux moindres carrés) ainsi trouvées.



**Figure 3 :** Estimation de la dimension fractale de  $J(z^2 - 1.4011551...)$ .

++++ : Nuage de points  $(\ln(\varepsilon), H(\varepsilon))$  pour la dimension  $d_{inf}$ .  
 oooo : Nuage de points  $(\ln(\varepsilon), -\ln(T(\varepsilon)))$  pour la dimension  $d_{cap}$ .  
 — : Droites aux moindres carrés.

### CONCLUSION

Afin d'affiner l'étude du comportement itératif de transformations unidimensionnelles qui donnent naissance à des attracteurs chaotiques, telle que l'application logistique, la méthodologie présentée à travers ce travail consiste en la transposition du problème au champ complexe.

Dans ce plan, l'ensemble de Julia de la nouvelle transformation joue un rôle fondamental. On a montré, à travers l'exemple précité, comment on peut utiliser cet ensemble pour en extraire le bassin d'attraction (réel, cette fois) de l'attracteur chaotique associé à la transformation unidimensionnelle initiale.

Enfin, les résultats numériques et graphiques peuvent être améliorés par l'augmentation du nombre  $N$  de points de l'Attracteur chaotique considéré ainsi que de l'ensemble de Julia correspondant.

### REFERENCES

- [1]- Actes du Séminaire National sur les Fractales dans la Compression d'Images, (S.N.F.C.I - Fractales'98) Alger, 11-12 Mai (1998), pp. 1-137.
- [2]- Akroune N., "Quelques méthodes d'étude locale d'ensembles de Julia et applications", Thèse de Doctorat (3<sup>ème</sup> cycle), Université de Grenoble (1987).
- [3]- Blanchard P., "Complex analytic dynamics on the Riemann sphere", *Bulletin (new series) of the American Mathematical*

- Society*, Vol. 11, N°1 (1984), pp. 85-141.
- [4]- Brolin H., "Invariant sets under iteration of rational functions", *Arkiv fstackrel. or Mathematik*, Band 6, n°6 (1965), pp. 103-144.
- [5]- Collet P., Eckmann J.P., "Iterated maps on the interval as Dynamical Systems", Birkhauser, Boston (1980)
- [6]- Eckmann J.P., Ruelle D., "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Review of Modern Physics*, Vol. 57, n°3 (1985), pp.617-655.
- [7]- Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A., "The dimension of chaotic attractors", *Physica 7 D* (1983), pp. 153-180.
- [8]- Feigenbaum M.J., "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 19 (1978), pp. 25-52.
- [9]- Feigenbaum M.J., "The onset of spectrum turbulence", *Physics Letters B*, Vol. 74 (1979), pp. 375-378.
- [10]- Gouyet J.F., "Physique et structures fractales", Masson, Paris (1992).
- [11]- Grassberger P., Procaccia I., "Measuring the strangeness of strange attractors", *Physica 9 D* (1983), pp. 189-208.
- [12]- Greenside H.S., Wolf A., Swift J., Pignataro T., "Impracticality of a box-counting algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors", *Phys. Rev A*, Vol. 25, n°6 (1982), pp. 3453-3456.
- [13]- Gumowski I., Mira C., "Dynamique chaotique", Cepadues Editions, Toulouse (1980).
- [14]- Henon M., "A two-dimensional mapping with a strange attractor", *Communications in Mathematical Physics*, Vol.50 (1976), pp.69-77.
- [15]- Julia G., "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol.8 (1918), pp. 47-245.
- [16]- Lausberg C., "Calcul numérique de la dimension fractale d'un attracteur étrange", Thèse de Doctorat, Université de Grenoble (1987).
- [17]- Mandelbrot B., "Fractals: form, chance and dimension", Freeman, San-Fransisco (1977).
- [18]- Mandelbrot B., "Fractal aspects of the iteration  $z \rightarrow \lambda \cdot z \cdot (1-z)$  for complex  $\lambda$  and  $z$ ", *Annals of the New York Academy of Sciences*, Vol. 357 (1980), pp. 249-259.
- [19]- Milnor J., "On the concept of attractor", *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 99 (1985), pp. 177-195.
- [20]- Preparata F.P., Shamos M.I., "Computational geometry - An introduction", Springer-Verlag, New-York (1985).
- [21]- Shirer H.N., Fosmire C.J., Wells R., Suci L., "Estimating the correlation dimension of atmospheric time series", *Journal of Atmospheric Sciences*, Vol. 54, n°1 (1997), pp. 211-229. □