ETUDE DE L'ACTION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE POLARISEE CIRCULAIREMENT SUR UN ATOME A DEUX NIVEAUX PAR LE FORMALISME DES INTEGRALES DE CHEMINS

Reçu le 07/07/2001 – Accepté le 01/04/2002

Résumé

L'action d'une onde électromagnétique polarisée circulairement sur un atome à deux niveaux est étudiée par le formalisme des intégrales de chemins. L'utilisation de l'espace des phases et de certaines rotations dans l'espace des états cohérents ont permis de simplifier énormément les calculs. Les fonctions d'onde correspondantes ont été retrouvées exactement.

***Mots clés**: Intégrale de chemins, Equation non-relativiste, Oscillation de Rabi.*

Abstract

The action of a circularly polarized electromagnetic wave on an atom with two levels is studied by the formalism of Path integrals. The use of the phase space and certain rotations in the space of the coherent states simplify strongly the calculations. The corresponding wave functions are exactly deduced.

***Key words**: Path-integral, no-relativistic equation, Rabi oscillation.*

PACS 03.65.Pm – PACS 03.65.Ge – PACS 03.65.Db

M. AOUACHRIA
Département de Physique
Faculté des Sciences
Université Mentouri
Constantine, Algérie

ملخص

تأثير موجة كهرومغناطسية مستقطبة دائريا على ذرة ذات مستويين درست باستخدام المكاملات على المسلك وأن استعمال فضاء الطور وبعض الدورانات في فضاء الحالات المتلاحمة سمحت باختصار الحسابات. دوال الموجة الموافقة قد حددت بدقة.

***الكلمات المفاتيح**: التكاملات على المسلك – المعادلة اللانسبية / اهتزاز رابي.*

Jusqu'à présent, toute une classe de potentiels a pu trouver un traitement dans le formalisme path-integral grâce à l'utilisation de certaines transformations [1]. Cependant, il est connu que les interactions les plus réalistes sont celles qui font intervenir le spin, grandeur dont il est utile de souligner l'importance en physique. Du point de vue application, le calcul explicite de propagateurs pour de telles interactions par le formalisme path-integral sont à notre connaissance assez rares [2].

Récemment, le comportement d'un atome à deux niveaux soumis a une onde électromagnétique polarisée circulairement a été étudié par l'équation de Schrödinger [3].

Le but de cet article est d'étudier, par le formalisme des intégrales de chemins, le comportement d'un atome possédant deux niveaux en interaction avec une onde électromagnétique polarisée circulairement.

Cet atome à deux niveaux de masse m, de fréquence angulaire ω, a un moment dipolaire **D**. La dynamique de l'atome avec ce type d'interaction faisant intervenir le spin est décrite par l'Hamiltonien suivant:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z-\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t-kz)}\sigma_+-\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t-kz)}\sigma_- \qquad (1)$$

$\frac{p^2}{2m}$ étant l'énergie cinétique associée au centre de masse de l'atome, le terme $\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$ décrit le mouvement interne de l'atome, et les deux derniers termes associés à l'interaction entre l'atome et le champ électromagnétique. σ_z, σ_+ et σ_- s'écrivent dans l'approximation dipolaire:

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \sigma_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \qquad (2)$$

qui sont les matrices de Pauli habituelles.

FORMALISME INTEGRALE DE CHEMINS EN REPRESENTATION DES ETATS COHERENTS

Diverses façons existent pour introduire le spin dans le formalisme intégral de chemins [4, 5]. La formulation la plus simple consiste à remplacer σ par un doublet (u,d) d'oscillateurs fermioniques [6]:

$$\sigma \to \left(u^+, d^+\right)\sigma\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{3}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \sigma_z \to u^+u - d^+d \\ \sigma_+ \to u^+d \\ \sigma_- \to ud^+ \end{cases} \tag{4}$$

L'Hamiltonien (1) en fonction de ce doublet devient:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega\left(u^+u - d^+d\right) - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}u^+d - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}ud^+ \tag{5}$$

Pour la description du système, nous allons considérer l'état quantique $\left|z;\alpha,\beta\right\rangle$, reliant le mouvement extérieur et intérieur de l'atome qu'on peut séparer en produit direct. Le mouvement extérieur est décrit par la variable réelle z tandis que les variables de Grassmann (α,β) décrivent la dynamique du spin. L'amplitude de transition de l'état initial $\left|z_i;\alpha_i,\beta_i\right\rangle$ à $t_i = 0$ vers l'état final $\left|z_f;\alpha_f,\beta_f\right\rangle$ à $t_f = T$ est définie par les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution comme suit:

$$\mathbf{K}(f,i,T) = \left\langle z_f;\alpha_f,\beta_f\right|\hat{\mathrm{U}}(T;0)\left|z_i;\alpha_i,\beta_i\right\rangle \tag{6}$$

avec

$$\hat{\mathrm{U}}(T;0) = \mathbf{T}_D \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H(t)dt\right) \tag{7}$$

$\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation path-integral, subdivisons l'intervalle de temps $[0,T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissent régulièrement entre 0 et T. Utilisons d'abord la formule de Trotter:

$$\hat{\mathrm{U}}(T;0) = \lim_{N\to\infty}\left[e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H}\right]^{N+1} \quad \text{avec} \quad T = (N+1)\varepsilon \tag{8}$$

Introduisons les relations de fermeture entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ comme suit:

$$\int |z_n\rangle\langle z_n|dz_n = 1 \quad et$$
$$\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\beta}_n d\beta_{n-1}}\left|\alpha_n,\beta_n\right\rangle\left\langle\alpha_n,\beta_n\right| = 1 \tag{9}$$

avec

$$z_{N+1} = z_f \quad \text{et} \quad z_0 = z_i \tag{10}$$

Alors, l'expression du propagateur (6) prend la forme suivante:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N} dz_n \times$$
$$\times\int\prod_{n=1}^{n=N}\left(d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\beta}_n d\beta_{n-1}}\right) \tag{11}$$
$$\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle z_n;\alpha_n,\beta_n\right| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(u^+,d^+,u,d;z,t_n-t_{n-1})}\left|z_{n-1};\alpha_{n-1},\beta_{n-1}\right\rangle.$$

Rappelons pour cela les propriétés des variables de Grassmann:

$$\begin{cases} u\left|\alpha_n,\beta_n\right\rangle = \alpha_n\left|\alpha_n,\beta_n\right\rangle \ et \ \left\langle\alpha_n,\beta_n\right|u^+ = \left\langle\alpha_n,\beta_n\right|\bar{\alpha}_n \\ d\left|\alpha_n,\beta_n\right\rangle = \beta_n\left|\alpha_n,\beta_n\right\rangle et \ \left\langle\alpha,\beta\right|d^+ = \left\langle\alpha_n,\beta_n\right|\bar{\beta}_n \\ \left\langle\alpha_n,\beta_n|\alpha_{n-1},\beta_{n-1}\right\rangle = e^{\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} + \bar{\beta}_n d\beta_{n-1}} \end{cases} \tag{12}$$

Finalement, le propagateur (11) s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}$$
$$\times\int\prod_{n=1}^{n=N} dz_n \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(z_n - z_{n-1})^2$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\left(d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\beta}_n\beta_{n-1}}\right) \tag{13}$$
$$\times\exp\left[\left(1 - i\varepsilon\frac{\omega}{2}\right)\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} + \left(1 + i\varepsilon\frac{\omega}{2}\right)\bar{\beta}_n\beta_{n-1} + \right.$$
$$\left. + i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{-i(\omega_L t_n - kz_n)}\bar{\alpha}_n\beta_{n-1} + i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{i(\omega_L t_{n-1} - kz_{n-1})}\bar{\beta}_n\alpha_{n-1}\right]$$

CALCUL DU PROPAGATEUR

Pour intégrer, il faut d'abord diagonaliser l'Hamiltonien. Pour cela, éliminons e^{-ikz_n} et $e^{-ikz_{n-1}}$ qui interviennent dans (13) à l'aide du changement des variables de Grassmann suivant:

$$\begin{cases} \alpha \to \lambda \\ \alpha = e^{ikz}\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\alpha} \to \bar{\lambda} \\ \bar{\alpha} = e^{-ikz}\bar{\lambda} \end{cases} \tag{14}$$

Alors, en fonction des nouvelles variables λ et $\bar{\lambda}$, le propagateur (13) devient:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}$$
$$\times\int\prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(z_n - z_{n-1})^2$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\left(d\bar{\lambda}_n d\lambda_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\lambda}_n\lambda_n - \bar{\beta}_n\beta_n}\right)$$
$$\exp\left[\left(1 - i\varepsilon\frac{\omega}{2}\right)\bar{\lambda}_n\lambda_{n-1} + \left(1 + i\varepsilon\frac{\omega}{2}\right)\bar{\beta}_n\beta_{n-1} + ik\Delta z_n\bar{\lambda}_n\lambda_{n-1}\right.$$
$$- \frac{1}{2}k^2\Delta z_n^2\bar{\lambda}_n\lambda_{n-1} - i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{-i(\omega_L t_n)}\bar{\lambda}_n\beta_{n-1}$$
$$\left. - i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{i(\omega_L t_{n-1})}\bar{\beta}_n\lambda_{n-1}\right] \tag{15}$$

Or, le terme en Δz_n^2 peut être estimé et remplacé par un terme correctif $i\frac{\varepsilon\hbar}{m}$: c'est-à-dire qu'il intervient par un potentiel effectif. Rassemblons les termes dépendant de la vitesse Δz en un seul. Nous avons ainsi séparé le mouvement intérieur de l'atome du mouvement extérieur. Introduisons l'identité suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}exp\left[\frac{-i\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2+\frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n\right]=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}}\,exp\frac{im}{2\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2 \qquad (16)$$

et en tenant compte du fait que $\lambda^2=0$ (propriétés des variables de Grassmann), le propagateur (15) du système physique devient:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{n=N}dz_n$$
$$\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\sum_{n=1}^{n=N+1}\left[-i\frac{\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2+\frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n\right]$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}(d\bar\lambda_n d\lambda_n d\bar\beta_n d\beta_n e^{-\bar\lambda_n\lambda_n-\bar\beta_n\beta_n})$$
$$\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\exp\left[\left(1-i\varepsilon(\frac{\omega}{2}+\frac{\hbar k^2}{2m}+\frac{p_nk}{m})\right)\bar\lambda_n\lambda_{n-1}\right.$$
$$+\left(1+i\varepsilon\frac{\omega}{2}\right)\bar\beta_n\beta_{n-1}+i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{-i(\omega_Lt_n)}\bar\lambda_n\beta_{n-1}$$
$$\left.+i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{i(\omega_Lt_{n-1})}\bar\beta_n\lambda_{n-1}\right] \qquad (17)$$

Intégrons sur les N variables z_n. On trouve que (17) s'écrit comme suit:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{n=N+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}$$
$$\times\prod_{n=1}^{n=N}(2\pi\hbar\delta(p_n-p_{n+1}))\exp\left[\sum_{n=1}^{n=N+1}\left[-i\frac{\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2+p_{n+1}z_{n+1}-p_1z_0\right]\right]$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}(d\bar\lambda_n d\lambda_n d\bar\beta_n d\beta_n e^{-\bar\lambda_n\lambda_n-\bar\beta_n\beta_n})$$
$$\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\exp\left[\left(1-i\varepsilon(\frac{\omega}{2}+\frac{\hbar k^2}{2m}+\frac{p_nk}{m})\right)\bar\lambda_n\lambda_{n-1}\right.$$
$$+\left(1+i\varepsilon\frac{\omega}{2}\right)\bar\beta_n\beta_{n-1}+i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{-i(\omega_Lt_n)}\bar\lambda_n\beta_{n-1}$$
$$\left.+i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{i(\omega_Lt_{n-1})}\bar\beta_n\lambda_{n-1}\right] \qquad (18)$$

La présence de la distribution de Dirac dans (18) reflète la conservation de l'impulsion de l'atome durant le mouvement:

$$p_1=p_2=...=p_{N+1}=p. \qquad (19)$$

Alors le propagateur (18) prend la forme suivante:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}(d\bar\lambda_n d\lambda_n d\bar\beta_n d\beta_n e^{-\bar\lambda_n\lambda_n-\bar\beta_n\beta_n})\prod_{n=1}^{n=N+1}\exp\left[(\bar\lambda_n,\bar\beta_n)\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}\left(1-i\varepsilon(\frac{\omega}{2}+\frac{\hbar k^2}{2m}+\frac{pk}{m})\right) & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{-i(\omega_Lt_n)}\\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{i(\omega_Lt_n)} & \left(1+i\varepsilon\frac{\omega}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{n-1}\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}\right] \qquad (20)$$

Pour diagonaliser l'hamiltonien du système physique, introduisons une transformation sur les variables de Grassmann (λ,β).

$$\begin{cases}(\lambda,\beta)\to(\psi,\varphi)\\ \begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\end{pmatrix}=e^{-i\frac{\omega_L}{2}t\sigma_z}e^{-i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}t}e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y}\begin{pmatrix}\psi_n\\ \varphi_n\end{pmatrix}\end{cases}$$

et (21)

$$\begin{cases}(\bar\lambda,\bar\beta)\to(\bar\psi,\bar\varphi)\\ (\bar\lambda,\bar\beta)=e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y}e^{i\frac{\omega_L}{2}t\sigma_z}e^{i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}t}(\bar\psi,\bar\varphi)\end{cases}$$

avec

$$\sin\theta=\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{\hbar^2\Omega^2+(\hbar\Delta\omega+\Delta e_p)^2}},$$
$$\cos\theta=\frac{(\hbar\Delta\omega+\Delta e_p)}{\sqrt{\hbar^2\Omega^2+(\hbar\Delta\omega+\Delta e_p)^2}} \qquad (22)$$

$$\Delta\omega=\omega-\omega_L \quad \text{et} \quad \Delta e_p=\frac{(p+\hbar k)^2}{2m}-\frac{p^2}{2m}. \qquad (23)$$

Le propagateur (20), en fonction des nouvelles variables, est le suivant:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}(d\bar\psi_n d\psi_n d\bar\phi_n d\phi_n e^{-\bar\psi_n\psi_n-\bar\phi_n\phi_n})$$
$$\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\exp\left\{(\bar\psi_n,\bar\phi_n)\begin{pmatrix}\psi_{n-1}\\ \phi_{n-1}\end{pmatrix}-i\varepsilon\left(\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\hbar^2\Omega^2+(\hbar\Delta\omega+\Delta e_p)^2}\right)\right.$$
$$\left.\times(\bar\psi_n,\bar\phi_n)[\sigma_z]\begin{pmatrix}\psi_{n-1}\\ \phi_{n-1}\end{pmatrix}\right\} \qquad (24)$$

Nous avons achevé la diagonalisation de l'action, il ne reste qu'à intégrer sur les variables de Grassmann ψ, ϕ. Dans ce but, introduisons le vecteur $\mathbf{q}_n=\begin{pmatrix}\psi_n\\ \phi_n\end{pmatrix}$ et $\bar{\mathbf{q}}_n=(\bar\psi_n,\bar\phi_n)$; alors, le propagateur (24) prend la forme suivante:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}(d\bar{\mathbf{q}}_n d\mathbf{q}_n)\times\exp\left[\sum_{n=1}^{n=N}-\bar{\mathbf{q}}_n\mathbf{q}_n+\sum_{n=1}^{n=N+1}\bar{\mathbf{q}}_n\mathbf{R}(n)\mathbf{q}_{n-1}\right] \qquad (25)$$

où :

$$\mathbf{R}(n)=\begin{pmatrix} e^{-i\varepsilon\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\hbar^2\Omega^2+(\hbar\Delta\omega+\Delta e_p)^2}} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\hbar^2\Omega^2+(\hbar\Delta\omega+\Delta e_p)^2}} \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. (26)

Définissons

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{q}_1\\ .\\ .\\ .\\ \mathbf{q}_N\end{pmatrix},\quad \mathbf{V}=\begin{pmatrix}\mathbf{R}(1)\mathbf{q}_0\\ 0\\ .\\ .\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{W}^+=\left(0,...,0,\bar{\mathbf{q}}_{N+1}\mathbf{R}(N+1)\right) \tag{27}$$

$$\mathbf{M}=\delta_{j,n}-\mathbf{R}(n)\delta_{j,n+1}\quad ;\quad n,j\in[1,N] \tag{28}$$

En substituant ces expressions dans le propagateur (25) on trouve:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]$$
$$\times\int d\bar{\mathbf{P}}d\mathbf{P}\exp(-\bar{\mathbf{P}}\mathbf{M}\mathbf{P}+\bar{\mathbf{P}}\mathbf{V}+\mathbf{W}^+\mathbf{P}) \tag{29}$$

Faisons ensuite le changement de variable:

$$\mathbf{P}\to\mathbf{P}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}\quad \text{et}\quad \bar{\mathbf{P}}\to\bar{\mathbf{P}}+\mathbf{W}^+\mathbf{M}^{-1} \tag{30}$$

Le propagateur (29) devient:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]$$
$$\times\exp(\mathbf{W}^+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V})\int d\bar{\mathbf{P}}d\mathbf{P}\exp(-\bar{\mathbf{P}}\mathbf{M}\mathbf{P}) \tag{31}$$

Le résultat de la dernière intégration dans (31) est simple:

$$\int d\bar{\mathbf{P}}d\mathbf{P}\exp(-\bar{\mathbf{P}}\mathbf{M}\mathbf{P})=\det\mathbf{M} \tag{32}$$

Ainsi le propagateur (31) devient:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\det\mathbf{M}\exp(\mathbf{W}^+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V})$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right] \tag{33}$$

Comme le déterminant de $\mathbf{M}$ égale à 1, alors le propagateur (33) devient:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]$$
$$\times\exp[\bar{\mathbf{q}}_f\mathbf{R}(T)\mathbf{q}_0] \tag{34}$$

avec

$$\mathbf{R}(T)=e^{-i\frac{T}{2\hbar}\sqrt{\hbar^2\Omega^2+(\hbar\Delta\omega+\Delta e_p)^2}\,\sigma_z} \tag{35}$$

D'où, enfin, la forme que prend le propagateur (34):

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]$$
$$\times\exp\left[\left(\bar{\psi}_f,\bar{\phi}_f\right)\mathbf{R}(T)\begin{pmatrix}\psi_i\\ \phi_i\end{pmatrix}\right] \tag{36}$$

Alors, l'expression finale du propagateur (36) est:

$$\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]\exp\left[\left(\bar{\alpha}_f,\bar{\beta}_f\right)\mathbf{S}(T)\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right]$$

où (37)

$$\mathbf{S}(T)=\begin{pmatrix}e^{ikz_f} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}e^{-i\frac{\omega_L}{2}T\sigma_z}e^{-i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T}e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y}$$
$$\times\mathbf{R}(T)e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y}\begin{pmatrix}e^{-ikz_i} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{38}$$

Ce qui résout notre problème.

FONCTIONS D'ONDE

Calculons d'abord l'amplitude de transition entre les états propres de spin en prenant à titre d'exemple le calcul de l'élément de matrice $K_{\uparrow\uparrow}(z_f,z_i;T)$ où:

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f,z_i;T)=\left\langle\uparrow\left|K(z_f,z_i;T)\right|\uparrow\right\rangle \tag{39}$$

Introduisons ici les relations de fermeture suivantes (9). Alors :

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f,z_i;T)=\int d\bar{\alpha}_f d\alpha_f d\bar{\beta}_f d\beta_f d\bar{\alpha}_i d\alpha_i d\bar{\beta}_i d\beta_i$$
$$\times e^{-\bar{\alpha}_f\alpha_f-\bar{\beta}_f\beta_f}e^{-\bar{\alpha}_i\alpha_i-\bar{\beta}_i\beta_i}\left\langle\uparrow\left|\alpha_f,\beta_f\right.\right\rangle\left\langle\alpha_i,\beta_i\left|\uparrow\right.\right\rangle$$
$$\times\mathbf{K}(z_f;\alpha_f,\beta_f;z_i;\alpha_i,\beta_i;T). \tag{40}$$

avec:

$$\left\langle\uparrow\left|\alpha_f,\beta_f\right.\right\rangle=\alpha_f\ ,\ \left\langle\alpha_i,\beta_i\left|\uparrow\right.\right\rangle=\bar{\alpha}_i\ ,\ \alpha_f\bar{\alpha}_i=e^{-\bar{\alpha}_i\alpha_f}-1. \tag{41}$$

En substituant les expressions précédentes dans $K_{\uparrow\uparrow}(z_f,z_i;T)$, on trouve que $K_{\uparrow\uparrow}(z_f,z_i;T)$ s'écrit sous la forme:

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f,z_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]}$$
$$\times\int d\bar{\alpha}_f d\alpha_f d\bar{\beta}_f d\beta_f d\bar{\alpha}_i d\alpha_i d\bar{\beta}_i d\beta_i e^{\bar{\alpha}_f\alpha_f+\bar{\beta}_f\beta_f}e^{\bar{\alpha}_i\alpha_i+\bar{\beta}_i\beta_i}$$
$$\times\alpha_f\bar{\alpha}_i\exp\left[\left(\bar{\alpha}_f,\bar{\beta}_f\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12}\\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right] \tag{42}$$

L'introduction du vecteur ν à quatre composantes défini par:

$$\nu=\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \alpha_f\\ \beta_i\\ \beta_f\end{pmatrix} \tag{43}$$

donne au propagateur la forme Gaussienne suivante:

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f,z_i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]}$$
$$\times\int d\nu^+d\nu\left[\exp\nu^+M'\nu-\exp\nu^+M\nu\right] \tag{44}$$

où M et M' sont les deux matrices suivantes:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{S}_{11} & -1 & \mathbf{S}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{S}_{21} & 0 & \mathbf{S}_{22} & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ \mathbf{S}_{11} & -1 & \mathbf{S}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{S}_{21} & 0 & \mathbf{S}_{22} & -1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

L'identité:

$$\int d\mathbf{P}^{+} d\mathbf{P} \exp(-\mathbf{P}^{+}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}) = \det \mathbf{\Omega} \quad (46)$$

appliquée à la forme Gaussienne précédente donne:

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f, z_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\left[\frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]} [\det M' - \det M] \quad (47)$$

Un calcul très simple montre que:

$$\det M' = 1 + \mathbf{S}_{11} \qquad \text{et} \qquad \det M = 1 \quad (48)$$

et par conséquent :

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f, z_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\left[\frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]} \cdot \mathbf{S}_{11} \quad (49)$$

De même, on trouve pour les autres éléments des formules analogues. Le résultat se met sous la forme matricielle suivante:

$$K(z_f, z_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\left[\frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - i\frac{\Delta e_p}{2m\hbar} T\right]} \cdot \mathbf{S}(T) \quad (50)$$

Substituons l'expression de $\mathbf{R}(T)$ dans $\mathbf{S}(T)$. Le propagateur prend la forme suivante:

$$K(z_f, z_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\left[\frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar}\right]} \cdot \begin{pmatrix} e^{ikz_f} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\times e^{-i\frac{\omega_L}{2}T\sigma_z} e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y} e^{-i\frac{T}{2\hbar}\sqrt{\hbar^2\Omega^2 + (\hbar\Delta\omega + \Delta e_p)^2}\sigma_z} e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y} \begin{pmatrix} e^{-ikz_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Déduisons la fonction d'onde à l'instant T à partir de l'état initial par l'intermédiaire de l'équation d'évolution:

$$\Psi(z,T) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z,T) \\ \Psi_2(z,T) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z,y;T)\Psi(y,0)dy. \quad (52)$$

Les résultats concordent exactement avec ceux de la littérature [3].

CONCLUSION

Nous avons étudié, dans le formalisme intégral de chemins, le problème d'un atome à deux niveaux en interaction avec une onde électromagnétique de polarisation circulaire. Les matrices de Pauli, représentant les deux niveaux de l'atome, ont été remplacées par un doublet d'opérateurs fermioniques. Par conséquent, l'amplitude de transition a été exprimée dans l'espace élargi relatif au mouvement extérieur (centre de masse) et intérieur. Le calcul a nécessité l'introduction des états cohérents relatifs aux fermions. Par le biais d'une première rotation sur les variables de Grassmann, nous avons pu intégrer sur les variables extérieurs (x,p). Ensuite, une deuxième rotation a été introduite pour éliminer la dépendance en temps de l'interaction. Enfin, une troisième rotation dans l'espace des états cohérents nous a permis de diagonaliser l'hamiltonien. De ce fait, l'expression explicite et exacte de l'amplitude de transition a été obtenue. Les fonctions d'onde ont été déduites en appliquant les principes de la mécanique quantique. Les résultats concordent exactement avec ceux de la littérature [3].

REFERENCES

[1]-Grosche C. and Steiner F., Handbook of Feynman Path Integrals, Springer-Verlag (1998).

[2]-Boudjedaa T., Bounames A., Chetouani L., Hammann T.F., *J. Math. Phys*., 36, 1602 (1995).
Nouicer Kh., Chetouani L., *Phys. Lett*., A 281, 218 (2001),
Merdaci, Boudjedaa T. and Chetouani L., *Phys. Scripta*, 64, 19 (2001).
Merdaci, Boudjedaa T. and Chetouani L., *Czech. J. Phys*., 51, 865 (2001)

[3]-Gao-Jian, Shi-Lun Zhou, Sheng-Mei Ao, Zhao-Yang Zeng, *Phys. Rev*. A 55, 2945 (1997)

[4]-Perelomov A.M., *Commun. Math. Phys*., 26, 22 (1972).

[5]-Klauder J., *Ann. Phys*. (NY) 11, 123 (1960), Coherent states, edited by J. R. Klauder and B. Skagerstam, Word Scientific, Singapore, (1985).

[6]-Ohnuki Y. and Kashiwa T., *Prog. Theor. Phys*., 60, 548 (1978).

[7]-Masato Nakamura and Kazuo Kitahara, *J. Phys. Soc. of Japan* 60, 1388 (1991). ☐