

SYSTEME PARABOLIQUE F-CONTROLABLE ET LES ACTIONNEURS FRONTIERES

Reçu le 15/09/2004 – Accepté le 31/12/2004

Résumé

Le but de ce travail est l'étude de la contrôlabilité frontière d'un système parabolique excité par des actionneurs frontières. On cherche l'existence d'un contrôle qui conduit le système vers un état désiré convenable et à déterminer le contrôle optimal qui assure la F-contrôlabilité avec un énergie minimale.

Mots clés: Contrôlabilité frontière, actionneur frontière, contrôle optimal.

Abstract

The purpose of this paper is to explore the concept of boundary controllability in connection with boundary actuators. We concentrate on the determination of a control achieving boundary controllability with minimum energy., and to give their analytical expression according to the type of used actuators.

Keywords: boundary controllability, boundary actuators, optimal control.

A. BERHAIL

Département de Mathématiques
Université de Guelma
Guelma (Algérie)

A. AYADI

Département de Mathématiques
Université mentouri
Constantine (Algérie)

1- DESCRIPTION DU SYSTEME

Soit Ω un domaine de R^n de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Pour tout $T > 0$, on pose $Q = \Omega \times]0, T[$ le cylindre de frontière $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$. On considère le système décrit par l' équation d'état:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = Ay(x, t) + Bu(t) & Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(\zeta, t) = 0 & \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

A est auto-adjoint à résolvante compacte. Il génère un semi groupe $S(t)$ fortement continue, et admet un système orthonormée des fonction propres (φ_i) associées aux valeurs propres (λ_i) . $B \in L(R^n, H^1(\Omega))$ et $u \in L^2(0, T, R^n)$. La solution du (1.1) est donnée par

$$y_u(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad (1.2)$$

Soit Γ une partie de la frontière $\partial\Omega$, le problème étudié est le suivant:

Etant donné un temps $T > 0$, et un état initiale y_0 , peut-on trouver un contrôle u tel que la solution du système (1.1) vérifie la condition:

$$\chi_\Gamma y_u(T) = y^d \quad (1.3)$$

où y^d est un état désiré défini sur Γ , et $\chi_\Gamma y_u$ la restriction de y_u sur Γ .

ملخص

2- DEFINITIONS ET CARACTERISATIONS

1) Le système (1.1) est exactement frontièrement contrôlable sur Γ si:

$$\forall y^d \in H^{1/2}(\Gamma), \exists u \in U \text{ tel que } \chi_\Gamma(y_0 y_u(T)) = y^d. \quad (2.1)$$

γ_0 est l'opérateur de trace.

2) Le système (1.1) est faiblement frontièrement contrôlable sur Γ si:

$$\forall y^d \in H^{1/2}(\Gamma), \forall \varepsilon > 0, \exists u \in U \text{ tel que } \|\chi_\Gamma(\gamma_0 y_u(T) - y^d)\|_{H^{1/2}} \leq \varepsilon.$$

Remarque 1: Si la relation (2.1) (resp.(2.2)) est vérifiée, le système (1.1) sera dit exactement (resp. faiblement) F -contrôlable sur Γ .

Caractérisation

Pour l'étude de la contrôlabilité frontière exacte (resp. faible) sans perte de généralité, on peut supposer $y_0 = 0$.

On pose $H : U \rightarrow H^1(\Omega)$ définie par

$$\forall u \in U : Hu = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds \quad (2.3)$$

Alors le système (1.1) est exactement (resp. faiblement) F -contrôlable sur si:

$$\text{Im}(\chi_\Gamma \gamma_0 H) = H^{1/2}(\Gamma), \quad \overline{\text{Im}(\chi_\Gamma \gamma_0 H)} = H^{1/2}(\Gamma)$$

Proposition 1

1) Si le semi-groupe est analytique, le système (1.1) est faiblement F -contrôlable sur Γ si et seulement si :

$$\overline{\bigcup_{n \geq 0} \chi_\Gamma \gamma_0 A^n S(t) B U} = H^{1/2}, \quad \forall t \in [0, T]$$

2) Le système (1.1) est exactement F -contrôlable si et seulement si: $\forall y^* \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe $c > 0$ tel que :

$$\|y^*\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c \|B^* S^*(\cdot) \gamma_0^* \chi_\Gamma^* y^*\|_U$$

3- CONTROLABILITE FRONTIERE

3.1- Contrôle Optimal

Soit $y^d \in H^{1/2}(\Gamma)$ un état désiré. Le problème du contrôle optimal peut être formulé comme suit:

$$\begin{cases} \inf_{u \in U_{ad}} J(u) = \inf_{u \in U_{ad}} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \\ U_{ad} = \{u \in / \chi_\Gamma \gamma_0 y(T) = y^d\} \end{cases} \quad (3.1)$$

La solution est donnée par le résultat suivant :

Proposition 2

Si le système (1.1) est exactement F -contrôlable sur Γ , alors le problème (3.1) admet une solution unique donnée par :

$$u^{opt}(t) = (\chi_\Gamma \gamma_0 H)^* R_\Gamma^{-1} (y^d - \chi_\Gamma \gamma_0 S(T) y_0)$$

$$\text{où } R_\Gamma = (\chi_\Gamma \gamma_0 H)(\chi_\Gamma \gamma_0 H)^*$$

3.2- Régionale et frontière contrôlabilité

Soit $y^d \in H^{1/2}(\Gamma)$, y^d son extension dans $\partial\Omega$ et on considère l'ensemble:

$$V = \{R y^d \in H^1(\Omega), \quad y^d \in H^{1/2}(\Gamma)\}$$

$$D = \bigcup_{y^d \in H^{1/2}(\Gamma)} \text{supp } R y^d$$

où R est l'inverse à droite de l'opérateur de trace y_0 tel que: $R : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$

Soit $r > 0$, arbitraire suffisamment petit, on considère:

$F = \bigcup_{z \in \Gamma} B(z, r)$ et soit $\omega_r = F \cap D$ où $B(z, r)$ est la boule de rayon r et de centre z .

Proposition 3

Si le système (1.1) est ω_r -exactement (resp. faiblement) contrôlable [7], alors il est exactement (resp. faiblement) F -contrôlable sur Γ .

4- ACTIONNEURS FRONTIERE ET LA F-CONTROLABILITE

D'après la proposition (3), le problème de la contrôlabilité frontière sur Γ revient à un problème de contrôlabilité régionale sur ω_r .

Soit $\overline{y^d}$ l'extension de y^d sur $\partial\Omega$. Considérons le système:

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \Omega \\ z = \overline{y^d} & \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où Δ est l'opérateur de Laplace. Ce système admet une solution unique $z^d \in H^1(\Omega)$. Alors, le problème d'atteindre y^d sur Γ revient à atteindre z^d dans ω_r .

Soient les ensembles :

$$G = \{g \in H^1(\Omega), \quad \text{tel que } g = 0 \text{ sur } \omega_r\}.$$

$$\overline{G} = \{g \in H^1(\Omega), \quad \text{tel que } g = 0 \text{ sur } \Omega/\omega_r\}.$$

On va étudier la contrôlabilité frontière liée au différents choix d'actionneurs.

4.1- Actionneur zone frontière

On suppose que le système (1.1) est excité par un actionneur zone frontière (Γ_0, g) , donc (1.1) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = Ay(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(\zeta, t) = \chi_{\Gamma_0}(\zeta) g(\zeta) u(t) & \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans le cas de n actionneurs $(\Gamma_i, g_i)_{1 \leq i \leq n}$, avec $\Gamma_i \subset \partial\Omega$, le système (4.3) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = Ay(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(\zeta, t) = \sum_{i=1}^n \chi_{\Gamma_i} g_i(\zeta) u(t) & \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \Omega \end{cases}$$

La méthode de la construction est basée sur les trois étapes suivantes:

Etape 1

Pour $\varphi_0 \in \overline{G}$, on considère le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_r}{\partial t}(x, t) = A^* \varphi_r(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial \nu}(\zeta, t) = 0 & \Sigma \\ \varphi_r(x, T) = \varphi_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (4.4)$$

qui admet une solution unique
 $\varphi_r \in L^2(0, T, H^1(\Omega)) \cap C^0(0, T, L^2(\Omega))$.

Etape 2

On considère le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = A\psi(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(\zeta, t) = -\chi_{\Gamma_0}(\zeta)g(\zeta)\langle g, \varphi_r(t) \rangle_{L^2(\Gamma_0)} & \Sigma \\ \psi(x, T) = y_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (4.5)$$

Considérons alors l'opérateur:

$$M\varphi_0 = P(\psi(T)) \text{ ou } P = \chi_{\omega_r}^* \chi_{\omega_r}$$

M est un opérateur affine qui se décompose en :

$$M\varphi_0 = P(\psi_1(T) + \psi_2(T))$$

où ψ_1 et ψ_2 sont solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(x, t) = A\psi_1(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu}(\zeta, t) = 0 & \Sigma \\ \psi_1(x, T) = y_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}(x, t) = A\psi_2(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu}(\zeta, t) = -\chi_{\Gamma_0}(\zeta)g(\zeta)\langle g, \varphi_r(t) \rangle_{L^2(\Gamma_0)} & \Sigma \\ \psi_2(x, 0) = 0 & \Omega \end{cases} \quad (4.7)$$

Etape 3

On définit l'opérateur linéaire: $\Lambda : \bar{G} \rightarrow \bar{G}^1$ par:

$$\forall \varphi_0 \in \bar{G} : \Lambda \varphi_0 = P\psi_2(T)$$

Donc, le problème de la contrôlabilité régionale conduit à la résolution de l'équation

$$\Lambda \varphi_0 = P(z^d - \psi_1(T)) \quad (4.8)$$

Pour cela, on introduit l'application

$$\varphi_0 \in \bar{G} \rightarrow \int_0^T \langle g, \varphi_r(t) \rangle_{L^2(\Gamma_0)}^2 dt \quad (*)$$

qui définit une semi-norme sur \bar{G} . Nous avons alors le résultat:

Proposition 4

Si le système (1.1) est ω_r -faiblement contrôlable, l'équation (4.8) admet une solution unique $\varphi_0 \in \bar{G}$ et le contrôle optimal qui transfère (1.1) à l'état désiré y^d sur Γ est donné par

$$u^*(t) = -\langle g, \varphi_r(t) \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \quad (4.9)$$

Preuve

Si l'actionneur (Γ_0, g) est ω_r -stratégique, l'application (*) définit une norme. En effet:

$$\|\varphi_0\|_{\bar{G}}^2 = 0 \Rightarrow \langle g, \varphi_r(t) \rangle_{L^2(\Gamma_0)} = 0 \text{ p.p. sur } [0, T]$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_0} g(x)\varphi_r(x, t)dx = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i \geq 1} \exp(\lambda_i(T-t)) \int_{\Gamma_0} \langle \varphi_0, \varphi_i \rangle \langle g, \varphi_i \rangle dx = 0$$

On a (Γ_0, g) est ω_r -stratégique i.e $\langle g, \varphi_i \rangle \notin \ker H^* \chi_{\omega_r}^*$ donc $\langle g, \varphi_i \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \neq 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$.

2) Si on multiplie l'équation (4.7) par φ_r et en intégrant sur \mathcal{Q} par parties, on obtient:

$$\langle \Lambda \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^T \langle g, \varphi_r(t) \rangle_{L^2(\Gamma_0)}^2 dt = \|\varphi_0\|_{\bar{G}}^2$$

On en déduit que Λ est un isomorphisme, d'où l'existence de la solution de l'équation (4.8).

3) Le contrôle u_r^* donné par (4.9) est l'optimum. En effet:

$$\begin{aligned} J(u_r^*)(v - u_r^*) &= \int_0^T u_r^*(v(t) - u_r^*(t))dt = \\ &= -\int_0^T \langle g, \varphi_r(t) \rangle_{L^2(\Gamma_0)} (v(t) - u_r^*(t))dt \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green sur $(\varphi_r, y_v - y_{u_r^*})$, on obtient:

$$\begin{aligned} &\langle \varphi_r(T), y_v(T) - y_{u_r^*}(T) \rangle - \langle \varphi_r(0), y_v(0) - y_{u_r^*}(0) \rangle - \\ &-\int_{\Sigma} \left[(y_v - y_{u_r^*}) \frac{\partial \varphi_r}{\partial \nu} + \varphi_r \left(\frac{\partial y_v}{\partial \nu} - \frac{\partial y_{u_r^*}}{\partial \nu} \right) \right] d\Sigma = \\ &= \int_0^T -(v(t) - u_r^*(t)) \langle g, \varphi_r(t) \rangle dt = \langle \varphi_0, y_v(T) - y_{u_r^*}(T) \rangle \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} y_v(T) - y_{u_r^*}(T) &= \chi_{\omega_r} y_v(T) - \chi_{\omega_r} y_{u_r^*}(T) = \\ &= \chi_{\omega_r} y_v(T) - z_d + z_d - \chi_{\omega_r} y_{u_r^*}(T) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \varphi_0, y_v(T) - y_{u_r^*}(T) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow J(u_r^*)(v - u_r^*) = 0$$

et J est strictement convexe, impliquant que u_r^* est l'optimum.

4.2- Actionneur ponctuel frontière

Dans ce cas où l'actionneur est ponctuel localisé dans $b \in \partial\Omega$, le système (1.1) devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = Ay(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(\zeta, t) = \delta(\zeta - b)u(t) & \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (4.10)$$

Par une approche similaire, on définit l'application:

$$\varphi_0 \in \bar{G} \rightarrow \|\varphi_0\|_{\bar{G}}^2 = \int_0^T \langle g, \varphi_r(t) \rangle_{L^2(\Gamma_0)}^2 dt \quad (4.11)$$

qui définit une semi-norme sur G .

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = A\psi(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v}(\zeta, t) = -\varphi_r(b, t)\delta(\zeta - b) & \Sigma \\ \psi(x, 0) = y_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (4.12)$$

qui peut se décomposer en deux systèmes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(x, t) = A\psi_1(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(\zeta, t) = 0 & \Sigma \\ \psi_1(x, 0) = y_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}(x, t) = A\psi_2(x, t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(\zeta, t) = -\varphi_r(b, t)\delta(\zeta - b) & \Sigma \\ \psi_2(x, 0) = 0 & \Omega \end{cases} \quad (4.14)$$

Le problème du contrôle frontière revient à résoudre l'équation:

$$\Lambda \varphi_0 = P(z_d - \psi_1(T)) \quad (4.15)$$

et on a le résultat:

Proposition 5:

Si l'actionneur (b, δ_b) est ω_r -stratégique, alors l'équation (4.15) admet une solution unique $\varphi_0 \in \bar{G}$. Le contrôle

$$u^*(t) = -\varphi_r(b, t) \quad (4.16)$$

assure le transfert du système (4.10) de y_0 à y^d sur Γ .

5- EXEMPLE NUMERIQUE

On considère le système bidimensionnel suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, t) = -\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y, t) \right] + \delta(x-b, y-b)u(t) & \mathcal{Q} \\ \frac{\partial z}{\partial v}(\zeta, \eta, t) = 0 & \Sigma \\ z(x, 0) = 0 & \Omega \end{cases}$$

Cette équation décrit un système de diffusion qui est excité par un actionneur (b, δ_b) où $b \in \partial\Omega$, tel que

$\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Soit $\omega_r = [0, 1] \times [0, \frac{1}{4}]$, et l'état désiré

$$y^d = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \cos(\pi x) \cos(\pi y) & \text{sur } \omega_r \\ 0 & \text{sur } \Omega/\omega_r \end{cases}$$

en utilisant un algorithme basé sur la méthode des élément finis, permettant de calculer le contrôle optimal.

ALGORITHME

- 1- Initialiser les données Γ, y^d , l'actionneur ε .
- 2- choisir $\varphi_0 \in \bar{G}$.
- 3- Résoudre l'équation (4.4) $\rightarrow \varphi_r(b, t)$.
- 4- Résoudre l'équation (4.13) $\rightarrow \psi_1(., T)$.

5- Résoudre l'équation (4.14) $\rightarrow \psi_2(., T)$.

6- Calculer le contrôle optimal (4.16) $\rightarrow u(t) = -\varphi_r(b, t)$.

7- Calculer la solution de (4.10) $\rightarrow z_u(T)$.

8- Tester si $\|y^d - z_u(T)\| > \varepsilon \rightarrow$ retour à l'étape 2.

9- Calculer la trace de $z_u(T)$ sur Γ .

On obtient alors les graphes représentés sur les figures 1 et 2.

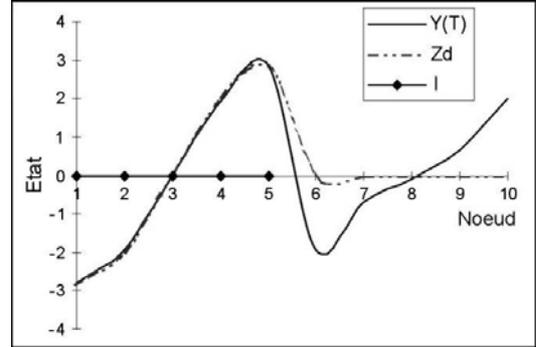


Figure 1: L'état $y(T)$ et l'état désiré z_d .

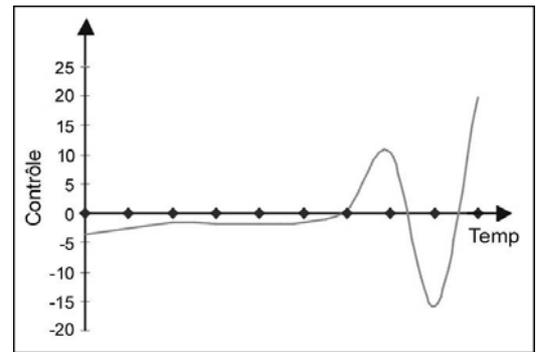


Figure 2: Fonction du contrôle $u(t)$.

On constate dans la figure 1 que l'état, à l'instant T , coïncide avec l'état désiré z_d dans la région considérée, c'est-à-dire dans les noeuds 1, 2, 3, 4 et 5.

Nous avons atteint l'état désiré sur Γ avec une erreur : $\|y(T) - z_d\| = 2.42 \times 10^{-4}$.

REFERENCES

- [1]- Bouthoul A., El Jai A., Zerrik E., "Actuators and regional boundary controllability of parabolic systems", juin (1998).
- [2]- El Jai A., Simon M.C., Zerrik E., Pritchard A.J., "Regional controllability of distributed parameter systems", *Int. J. Control*, Vol. 62, N°6, (1995), pp.1351-1365.
- [3]- El Jai A., Pritchard A.J., "Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués, Masson, (1986).
- [4]- Lions J.L., "Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles", Dunod, Paris (1968).
- [5]- Lions J.L., "Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués", Vol.1, Masson (1988).
- [6]- Touboul J., "Contrôlabilité de l'équation de la chaleur et des ondes, et de leurs approximations en différences finies, par la forme du domaine", Ecole Polytechnique (2003).
- [7]- Zerrik E., "Analyse régional des systèmes distribués", Thèse d'Etat, Université Mohamed V, Rabat (1993). □

