SUR UNE EQUATION INTEGRALE DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE

Reçu le 04/12/2000 – Accepté le 28/04/2003

Résumé

Dans cette article, on s'intéresse a une équation intégrale qui provient de la théorie de l'élasticité. On montre que l'opérateur intégral est borné dans un espace de Banach adéquat, mais non compact. En supposant l'existence de la solution, on approche celle-ci par la méthode de la section finie.

***Mots clés**: Elasticité linéaire, équation intégrale, méthode de section finie.*

Abstract

This paper is concerned with an integral equation derived from a boundary value problem of the theory of elasticity. We prove that the integral operator is bounded in an adequate Banach space, but is not compact. Under the existence assumption, we approach the solution by finite section method.

***Keywords**: Linear elasticity, integral equations ,finite section method.*

L. CHORFI
L. ALEM
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université Badji Mokhtar
B.P. 12, 23000 Annaba, Algérie

ملخص

نهتم في هذا المقال بدراسة معادلة تكاملية ناتجة عن نظرية المرونة. نبرهن أن المؤثر التكاملي محدود في فضاء بناخ معين ولكن غير متراص. بافتراض وجود الحل نقترح طريقة المقطع المنته لتقريب هذا الحل.

***الكلمات المفتاحية:** مرونة خطية، معادلة تكاملية، طريقة المقطع المنته.*

1- POSITION DU PROBLEME

Soit l'ouvert :

$$\Omega =]a,+\infty[\times]0,+\infty[$$

pour $(r,z)\in\Omega$ et $u(r,z)=(u_1(r,z),\ u_2(r,z))$.

Considérons le problème aux limites qui consiste à trouver $u\in C^2(\Omega)^2\cap C^1(\overline{\Omega})^2$ tel que:

$$(P)\qquad \begin{cases} Au=0 \text{ dans } \Omega, \\ \sigma_{rr}(u)\big|_{r=a}=\Psi_1(z)\ ,\quad \sigma_{rz}(u)\big|_{r=a}=\Psi_2(z)\ , \\ \sigma_{zz}(u)\big|_{z=0}=0\ ,\quad \sigma_{rz}(u)\big|_{z=0}=0\ , \\ u=O\left(\dfrac{1}{R}\right),\quad R=\sqrt{r^2+z^2}, \\ \text{avec } \Psi_i\in C_0^1(]0,+\infty[),\quad i=1,2. \end{cases}$$

où A est l'opérateur d'élasticité en coordonnées cylindriques défini par (voir [1]) :

$$(Au)_1=\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left((\lambda+2\mu)r\frac{\partial u_1}{\partial r}+\lambda u_1+\lambda r\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)+\left(\frac{\lambda+2\mu}{r}\right)u_1-\frac{\partial}{\partial z}\left(r\mu\frac{\partial u_3}{\partial z}+r\mu\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\right]$$

$$(Au)_3=\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial u_3}{\partial r}+r\mu\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)r\frac{\partial u_3}{\partial z}+\lambda u_1+\lambda r\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)\right]$$

et $\sigma(u)=(\sigma_{rr}(u),\sigma_{rz}(u),\sigma_{zz}(u))^T$ désigne le tenseur des contraintes associé au déplacement u défini par :

$$\begin{cases} \sigma_{rz}(u) = \mu\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial r} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz}(u) = (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial r} + \dfrac{u_1}{r} \right) \\ \sigma_{rr}(u) = (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial u_1}{\partial z} + \lambda \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial z} + \dfrac{u_1}{r} \right) \end{cases} \qquad (1)$$

Le couple (λ, μ) désigne les coefficients de Lamé .

Le problème (P) décrit l'équilibre d'un demi-espace élastique avec un puits vertical soumis à une force radiale. On suppose que la surface horizontale est libre. On rencontre ce modèle dans les techniques de prospection géophysique (sismique de puits) [6].

2- REPRESENTATION DE LA SOLUTION

En utilisant la méthode des fonctions propres vectorielles (voir [7,8]), on sait représenter la solution du problème (P) sous la forme suivante :

$$u_1(r,z) = \int_0^{+\infty} \left\{ -\frac{D(\lambda)}{\lambda} K_1(\lambda r) + B(\lambda)\left[r K_0(\lambda r) + \frac{4(m-1)}{\lambda m} K_1(\lambda r) \right] \right\} \cos(\lambda z)\, d\lambda$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left\{ A(t) e^{-tz} + C(t)\left[\frac{3m-4}{m} e^{-tz} - t z e^{-tz} \right] \right\} \frac{1}{t} N_1(tr)\, dt.$$

$$u_2(r,z) = -\int_0^{+\infty} \left\{ \frac{D(\lambda)}{\lambda} K_0(\lambda r) - B(\lambda)\, r\, K_1(\lambda r) \right\} \sin(\lambda z)\, d\lambda +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left\{ -A(t) e^{-tz} + C(t)\, t z e^{-tz} \right\} \frac{1}{t} N_0(tr)\, t\, dt.$$

avec $m = \dfrac{2(\lambda + \mu)}{\lambda}$ qui désigne le nombre de Poisson et

$$N_1(tr) = \frac{J_1(tr) Y_1(t) - Y_1(tr) J_1(t)}{J_1^2(t) + Y_1^2(t)}$$

$$N_0(tr) = \frac{J_0(tr) Y_1(t) - Y_0(tr) J_1(t)}{J_1^2(t) + Y_1^2(t)}$$

$J_n(x)$, $Y_n(x)$ sont les fonctions de Bessel et $K_n(x)$ les fonctions de Bessel modifiés. Les coefficients $A(t)$, $B(\lambda)$, $C(t)$ et $D(\lambda)$ sont des fonctions à déterminer .

En substituant la solution $u = (u_1, u_2)$ dans (1) on obtient les relations suivantes :

$$\sigma_{rr}(u) = \int_0^{+\infty} \left\{ D(\lambda)\left[K_0(\lambda r) - \frac{1}{\lambda r} K_1(\lambda r) \right] \right.$$

$$\left. - B(\lambda)\left[\lambda r K_1(\lambda r) + \frac{3m-2}{m} K_0(\lambda r) + \frac{4(m-1)}{\lambda r m} K_1(\lambda r) \right] \right\} \cos(\lambda z)\, d\lambda$$

$$+ \frac{1}{r} \int_0^{+\infty} \left\{ A(t) e^{-tz} + C(t)\left[\frac{3m-4}{m} e^{-tz} - t z e^{-tz} \right] \right\} N_0(tr)\, t\, dt.$$

$$\sigma_{zz}(u) = -\int_0^{+\infty} \left\{ D(\lambda) K_1(\lambda r) - \right.$$

$$\left. - B(\lambda)\left[\lambda r K_0(\lambda r) - \frac{2(m-1)}{m} K_1(\lambda r) \right] \right\} \sin(\lambda z)\, d\lambda$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left\{ -A(t) e^{-tz} + C(t)\left[-2\frac{m-1}{m} e^{-tz} - t z e^{-tz} \right] \right\} N_1(tr)\, t\, dt.$$

$$\sigma_{rz}(u) = -\int_0^{+\infty} \left\{ D(\lambda) K_1(\lambda r) - \right.$$

$$\left. - B(\lambda)\left[\lambda r K_0(\lambda r) - \frac{2(m-1)}{m} K_1(\lambda r) \right] \right\} \sin(\lambda z)\, d\lambda$$

$$- \int_0^{+\infty} \left\{ -A(t) e^{-tz} + C(t)\left[-2\frac{m-1}{m} e^{-tz} - t z e^{-tz} \right] \right\} N_1(tr)\, t\, dt.$$

Les conditions aux limites du problème (P) sont vérifiées si $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ satisfont le système d'équations intégrales de deuxième espèce :

$$(S) \quad \begin{cases} A(t) + \displaystyle\int_0^{+\infty} k_1(\lambda, t)\, B(\lambda)\, d\lambda = f_1(t), & \forall t > 0, \\ B(\lambda) + \displaystyle\int_0^{+\infty} k_2(t, \lambda)\, A(t)\, dt = f_2(\lambda), & \forall \lambda > 0. \end{cases}$$

avec les définitions suivantes :

$$k_1(\lambda,t) = -\frac{4}{\pi} \frac{\lambda t K_1(\lambda)}{(\lambda^2 + t^2)^2}; \quad k_2(t,\lambda) = \frac{4}{\pi} \frac{\lambda^2 N_0(t) t^2}{\lambda K_1(\lambda) \Delta(\lambda) (\lambda^2 + t^2)^2}$$

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{t} \frac{\hat{\Psi}(\lambda)}{(\lambda^2 + t^2)} d\lambda; \quad f_2(\lambda) = \frac{g(\lambda) - \hat{\Psi}_1(\lambda)}{\lambda K_1(\lambda) \Delta(\lambda)}$$

avec

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{K_0^2(\lambda)}{K_1^2(\lambda)} + \frac{2(m-1)}{m \lambda^2} \qquad (2)$$

$$g(\lambda) = \hat{\Psi}_2(\lambda)\left[\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)} + \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$et \quad \hat{\Psi}_i(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \Psi_i(z) \cos(\lambda z)\, dz, \quad i = 1,2$$

Remarque 2.1- Dans les calculs on a utilisé les représentations intégrales suivantes (voir [7]) :

$$K_0(\lambda r) = \frac{-2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{N_0(tr)}{\lambda^2 + t^2} dt \qquad (3)$$

$$\lambda r K_1(\lambda r) = -\frac{2}{\pi} \lambda^2 \int_0^{+\infty} \left[\frac{K_0(\lambda)}{\lambda^2 + t^2} + \frac{2 \lambda K_1(\lambda)}{(\lambda^2 + t^2)^2} \right] N_0(tr)\, dt \qquad (4)$$

et les intégrales de Fourier :

$$e^{-tz} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t}{\lambda^2+t^2}\cos(\lambda z)\,d\lambda$$

$$ze^{-tz} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t^2-\lambda^2}{(\lambda^2+t^2)^2}\cos(\lambda z)\;d\lambda$$

En éliminant l'inconnue $B(\lambda)$, le système (S) se réduit à l'équation intégrale

(E) $\qquad Kx - x = y$

où K est l'opérateur intégral :

$$(E) \qquad (Kx)(t) = \int_0^{+\infty} k(t,s)\,x(s)\;ds$$

de noyau

$$k(t,s) = -\frac{16}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^3\,\lambda^2\,N_0(s)}{\Delta(\lambda)(s^2+\lambda^2)^2\;(\lambda^2+t^2)^2}\,d\lambda$$

et le second membre

$$y(s) = \frac{2s}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t\hat{\Psi}_2(t)}{(s^2+t^2)}\,dt$$

Remarque 2.2- Une fois $x(t)$ déterminé on trouve $A(t) = t^{-2}x(t)$ et $B(\lambda)$ exprimé par la deuxième équation du système intégral (S).

L'objectif de ce travail est l'étude de l'équation (E) dans un espace de Banach adéquat. On va s'inspirer des articles [2,5] qui étudient une classe d'équations intégrales sur le demi-axe $(0,+\infty)$.

3- ETUDE DE L'EQUATION INTEGRALE (E)

Nous introduisons l'espace fonctionnel :

$$E = \left\{ x \in C([0,+\infty[) \quad \text{tel que} \quad \lim_{s\to+\infty} x(s) = 0 \right\}$$

muni de la norme

$$\| x \|_E = \sup_{s>0} | x(s) |$$

On peut montrer sans difficultés que $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach. Maintenant, on va étudier les propriétés de l'opérateur K en tant qu'opérateur linéaire agissant dans E. Pour cela, on démontre d'abord deux lemmes.

Lemme 3.1- On a la formule :

$$1-\Phi(\lambda) = \frac{8\lambda^2}{\pi\Delta(\lambda)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi^2\,t[J_1^2(t)+Y_1^2(t)](\lambda^2+t^2)^2}\,dt$$

avec

$$\Phi(\lambda) = \frac{2(m-1)}{m\lambda^2\,\Delta(\lambda)}$$

Preuve. Cela découle des formules (3) et (4) en remarquant que :

$$N_0(s) = \frac{-2}{\pi\;s\;[J_1^2(s)+Y_1^2(s)]} \qquad \blacksquare \qquad (5)$$

Lemme 3.2- Le noyau $k(t,s)$ satisfait les deux propriétés :

1) $\forall t>0, \quad \int_0^{+\infty} | k(t,s) | ds \le 1$

2) $\forall t>0, \quad \lim_{\xi\to t}\int_0^{+\infty} | k(\xi,s) - k(t,s) | ds = 0.$

Preuve. 1) On a **:**

$$\int_0^{+\infty}| k(t,s) | ds = \frac{16}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^3\,\lambda^2\,N_0(s)}{\Delta(\lambda)(\lambda^2+t^2)^2(\lambda^2+s^2)^2}\,d\lambda\right)ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini et la formule (5), on obtient

$$\int_0^{+\infty}| k(t,s) | ds =$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{4t^3}{\pi(\lambda^2+t^2)^2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{8\,\lambda^2\;ds}{\pi^2\,s\,\Delta(\lambda)\;(\lambda^2+s^2)^2\,[J_1^2(s)+Y_1^2(s)]}\right\}d\lambda$$

D'après le lemme 3.1, on a:

$$\int_0^{+\infty}| k(t,s) | ds = \int_0^{+\infty}(1-\Phi(\lambda))\frac{4t^3}{\pi(\lambda^2+t^2)^2}\;d\lambda\,.$$

Grâce à la formule

$$\frac{4t^3}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+t^2)^2}\,d\lambda = 1 \qquad (6)$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty}| k(t,s) | ds = \le \sup_{\lambda>0}|1-\Phi(\lambda)|$$

En vertu du lemme 3.1, on a : $0<\Phi(\lambda)\le 1$, d'où le résultat.

2) Montrons maintenant la deuxième propriété. On a :

$$|k(t,s)-k(\xi,s)| \le$$

$$\frac{32}{\pi^3 s}\frac{1}{[J_1^2(s)+Y_1^2(s)]}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^2}{\Delta(\lambda)(s^2+\lambda^2)^2}\times\left|\frac{t^3}{(t^2+\lambda^2)^2}-\frac{\xi^3}{(\xi^2+\lambda^2)^2}\right|d\lambda$$

ce qui entraîne

$$\int_0^{+\infty}|k(\xi,s)-k(t,s)|ds \le \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}(1-\Phi(\lambda))\times\left|\frac{t^3}{(t^2+\lambda^2)^2}-\frac{\xi^3}{(\xi^2+\lambda^2)^2}\right|d\lambda$$

On peut trouver une fonction $g(t)$ finie telle que :

$$|k(\xi,s)-k(t,s))\;|\;ds \le g(t)|t-\xi|\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(t^2+\lambda^2)^2\;(\xi^2+\lambda^2)^2}$$

Lorsque $\xi \to t$, on obtient le résultat. $\blacksquare$

Posons :

$$y(t):=(Kx)(t)=\int_0^{+\infty} k(t,s)\,x(s)\,ds, \qquad x\in E$$

Proposition 3.1- On a :

1) $Kx \in E$, pour tout $x \in E$

2) $K \in L(E)$ et $\|K\| \le 1$.

Preuve.

1) La fonction $y(t)$ est continue d'après la deuxième propriété du lemme 3.2 .

Montrons que $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0.$ On a :

$$y(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{(\lambda^2+t^2)^2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{8\lambda^2 x(s)ds}{\pi^2 s[J_1^2(s)+Y_1^2(s)]\Delta(\lambda)(\lambda^2+s^2)^2}\right\}d\lambda$$

d'où:

$$|y(t)|\le C\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{(\lambda^2+t^2)^2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^2|x(s)|}{\Delta(\lambda)(\lambda^2+s^2)^2}ds\right\}d\lambda.$$

On pose :

$$z(\lambda)=\int_0^{+\infty}\frac{|x(s)|}{(\lambda^2+s^2)^2}ds$$

Comme x est continue, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $s_0>0$ tel que : $\forall s>s_0,\quad |x(s)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Le nombre s_0 étant fixé, on considère la décomposition :

$$z(\lambda)=\int_0^{s_0}+\int_{s_0}^{+\infty}=z_1(\lambda)+z_2(\lambda).$$

On obtient les estimations :

$$\begin{cases} z_1(\lambda)\le \dfrac{\|x\|s_0}{\lambda^4} & \\ & \text{pour } \lambda \text{ assez grand} \\ z_2(\lambda)\le \dfrac{C\varepsilon}{\lambda^3} & \end{cases}$$

On en déduit :

$$|y(t)|\le C_1t^3\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda^2+t^2)}d\lambda+C_2\varepsilon t^3\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+t^2)^2}d\lambda$$

$$\le\left(\frac{Log(t)}{t}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\le C_3\,\varepsilon,\qquad \text{si } t>T \ (T \text{ assez grand})$$

d'où $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$.

2) De la propriété du lemme 3.2 on déduit que $K\in L(E)$ *et* $\|K\|\le 1$. ■

Remarque 3.1- En fait, on peut montrer que $\|K\|=1$ ce qui revient à trouver une suite, (x_n) tel que :

$$\|x_n\|=1 \ \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\|Kx_n\|=1.$$

Pour cela on choisit $x_n(t)=1$ si $t\le n$.

Proposition 3.2- L'opérateur K est non compact .

Preuve. On va raisonner par l'absurde. On suppose que K est compact et considère la suite (x_n) dans E définie par :

$$x_n(s)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le s\le n\\ n+1-s & \text{si } n<s\le n+1\\ 0 & \text{si } s>n+1\end{cases}$$

Comme $\|x_n\|=1$, on peut extraire de $y_n=Kx_n$ une sous- suite qui converge vers $y\in E.$ On peut voir facilement que :

$$y_n(t)\ge\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{(\lambda^2+t^2)^2}\left\{\int_0^{n}\frac{8\lambda^2\,ds}{\pi^2 s[J_1^2(s)+Y_1^2(s)]\,\Delta(\lambda)(\lambda^2+s^2)^2}\right\}d\lambda,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t)=y(t)\ge\int_0^{+\infty}(1-\Phi(\lambda))\frac{4t^3}{\pi(\lambda^2+t^2)^2}d\lambda.$$

et la formule (6) entraîne :

$$y(t)\ge 1-\frac{4t^3}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda^2+t^2)^2}d\lambda$$

En tenant compte du comportement de $\Phi(\lambda)$ à l'infini, il existe $C\ge 0$ tel que :

$$|\Phi(\lambda)|\le\frac{C}{\lambda},\qquad\text{pour}\quad \lambda\ge 1$$

ce qui entraîne :

$$y(t)\ge 1-C_1\frac{4t^3}{\pi}\int_0^{1}\frac{1}{(\lambda^2+t^2)^2}d\lambda+C_2\frac{4t^3}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\lambda(\lambda^2+t^2)^2}d\lambda.$$

Par suite

$$y(t)\ge 1-\left[\frac{C_1}{t}+C_2\frac{Log(t)}{t}\right].$$

Lorsque $t\to+\infty$, obtient $\lim_{t\to+\infty} y(t)\ge 1,$ ce qui contredit le fait que $y\in E.$ ■

Remarque 3.2-

1) Dans l'article [4], on montre que K est compact si et seulement si K vérifie, en plus des propriétés 1et 2 du lemme3.2, la propriété :

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\xi\ge t}\int_0^{+\infty}|k(\xi,s)-k(t,s)|ds=0.$$

2) Cependant, on peut montrer que K est compact de

$$E_1=\{x\in E \ \text{ tel que } \lim_{t\to+\infty} tx(t)=0\}$$

(muni de la norme $\|x\|_{E_1}=\sup_{t>0}|(1+t)\,x(t)|$) vers E . Pour la preuve, on utilise le critère suivant (voir [5]):

$H \subset E$ est précompact si H est borné, équicontinu et $\lim_{s \to +\infty} x(s) = 0$ uniformément pour tout $x \in H$.

L'équicontinuité découle de l'estimation suivante : il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a :

$$|Kx(t)| \leq C \frac{Log(t)}{t} \|x\|_1 \quad , \quad \forall t > 1$$

Commentaires :

1) l'opérateur K n'est pas contractant, donc on ne peut pas utiliser les séries de Neumann ($I-K$ n'est pas nécessairement inversible).
2) L'opérateur K n'étant pas compact, l'alternative de Fredholm n'est pas applicable ([3]). Donc la question d'existence reste un problème ouvert.

4- EQUATION APPROCHEE (E_n)

Supposons que l'équation (E) possède une solution. On va essayer d'approcher celle-ci par la méthode de section finie ([2]) qui consiste à tronquer l'intervalle d'intégration. On considère l'équation approchée de (E) :

$$(E_n) \qquad \exists x \in E_n \quad x - K_n x = y .$$

avec

$$(K_n x)(t) = \int_0^n k(s,t) x(s) ds$$

et $E_n = C([0,n])$ l'espace de Banach muni de la norme $\|x\|_n = \sup_{0 \leq t \leq n} |x(t)|$.

Il est facile de voir que l'opérateur $K_n \in L(E_n)$ est compact.

Proposition 4.1- L'équation (E_n) possède une solution unique x_n telle que :

$$\|x_n\|_n \leq \frac{\|y\|_n}{\delta_n} \qquad \text{avec} \qquad \delta_n = O\left(\frac{Log\, n}{n}\right)$$

Preuve. On peut montrer (comme dans le lemme 3.2) que

$$\int_0^{+\infty} |k(t,s)| \, ds \leq 1 - C \frac{Log\, t}{t} \quad , \quad \text{si } t \text{ est assez grand.}$$

Il en résulte

$$\|K_n x\|_n \leq 1 - C \frac{Log\ n}{n}$$

Donc l'opérateur K_n est contractant, et par suite l'équation (E_n) possède une solution unique x_n telle que (voir [3]) :

$$\|x_n\| = \|(I - K_n)^{-1} y\|_n$$

En utilisant la série de Neumann on obtient :

$$\|x_n\|_n \leq \frac{1}{1 - \|K_n\|_n} \|y\|_n \leq \frac{1}{\delta_n} \|y\|_n \qquad \blacksquare$$

Proposition 4.2- Supposons que l'équation (E) admet une solution x qui satisfait :

$$(H) \qquad \lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} x(t) = constante \text{ pour un certain } \alpha > 1$$

alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\|_n = 0,$$

Preuve. Posons :

$$z_n = x - x_n$$

alors z_n vérifie :

$$-z_n + K_n z_n = y_n$$

avec

$$y_n(t) = -\int_0^n k(t,s) \, x(s) \, ds \quad ,$$

Grâce à l'hypothèse (H), on obtient

$$\forall t \in [0,n], \quad |y_n(t)| \leq \sup_{s>0} ((1+s)^{\alpha} |x(s)|) \int_n^{+\infty} \frac{k(t,s)}{s^{\alpha}} ds$$

On a :

$$\int_n^{+\infty} \frac{k(t,s)}{s^{\alpha}} ds \leq \frac{16}{\pi^2} t^3 \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2}{\Delta(\lambda)(\lambda^2 + t^2)^2} \cdot \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + s^2)^2 s^{\alpha}} ds \right\} d\lambda.$$

En utilisant les comportements asymptotiques :

$$\begin{cases} \Delta(\lambda) \approx \dfrac{1}{\lambda^2} & (\lambda \to 0) \\ \\ \Delta(\lambda) \approx \dfrac{1}{\lambda} & (\lambda \to +\infty) \end{cases}$$

on obtient :

$$\|y_n\|_n \leq \frac{C}{n^{\alpha}} \sup_{s>0} ((1+s)^{\alpha} |x(s)|) = \frac{C}{n^{\alpha}} \|x\|_{\alpha},$$

d'où l'inégalité

$$\|z_n\|_n \leq \frac{C}{n^{\alpha-1} \, Log n} \|x\|_{\alpha}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \|z_n\|_n = 0 \quad \text{car} \quad (\alpha > 1). \qquad \blacksquare$$

Proposition 4.3- Supposons que x_n est la solution de (E_n) et x solution de (E) .

Considérons $\tilde{x} \in E$ tel que :

$$\tilde{x}_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & t \leq n \\ 0 & t > n+1 \end{cases}$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \|x - \tilde{x}_n\| = 0$$

Preuve. Il suffit de remarquer que :

$$\|x - \tilde{x}_n\| \leq \left(\frac{C}{n^{\alpha-1} \, Log\, n} + \frac{1}{n^{\alpha}} \right) \|x\|_{\alpha} \leq \frac{C}{n^{\beta}} \text{ avec } (\beta \geq \alpha - 1 > 0) \qquad \blacksquare$$

Remarque concernant l'existence de la solution

Comme on l'a déjà remarqué, la question d'existence de la solution n'est pas claire, c'est pourquoi on énonce un résultat qui nous permet de trouver la solution de l'équation (E) à partir de la suite des solutions approchées (de (E_n)).

Proposition 4.4- Soit x_n solution de l'équation :

$$(E_n) \qquad (I-K_n)x=y$$

Si la suite x_n est bornée, alors il existe une sous-suite x_{n_i} qui converge vers $x \in E$ (uniformément sur chaque compact); de plus, x est solution de l'équation

$$(I-K)x=y$$

Pour la preuve, on peut voir l'article [5, théorème 6.1]. Cette proposition a un intérêt numérique, car on peut toujours vérifier si la suite (x_n) est bornée dans E. Cela ne contredit pas l'estimation donnée dans la proposition 4.1.

ANNEXE
METHODE DES FONCTIONS PROPRES VECTORIELLES

Le système de Lamé :

$$2\frac{m-1}{m-2}\,grad\,div\,u - rot\,rot\,u = 0, \qquad \left(m = 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)$$

est équivalent à

$$\begin{cases} \Delta u = -\dfrac{m}{m-2}\nabla p, & p = div\,u \\ \Delta p = 0 \end{cases}$$

Par la méthode de séparation de variables :

$$p = Z(z)S(r),$$

on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 S}{d r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d S}{d r} + \lambda^2 S = 0 \\ Z - \lambda^2 Z = 0 \end{cases}$$

d'où les solutions générales

$$S(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \text{ et } Z(z) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z}$$

On cherche u sous forme :

$$u = u_r\,\vec{e}_r + u_z\,\vec{k}$$

avec

$$\begin{cases} u_r = u(z)\dfrac{d S}{d r} \\ u_z = w(z)S(r) \end{cases}$$

$u(z)$ et $u(r)$ doivent vérifier les équations :

$$(S)\begin{cases} w' - u'' - 2\dfrac{m-1}{m-2}(w' - \lambda^2 u) = 0 \\ \lambda^2 (w - u') - 2\dfrac{m-1}{m-2}(w'' - \lambda^2 u') = 0 \end{cases}$$

La solution du système (S) s'écrit :

$$\begin{cases} w_\lambda(z) = A(\lambda)e^{\lambda z} + B(\lambda)e^{-\lambda z} + C(\lambda)z e^{\lambda z} + D(\lambda) z e^{-\lambda z} \\ \lambda^2 u_\lambda(z) = \lambda A(\lambda)e^{\lambda z} - \lambda B(\lambda)e^{-\lambda z} + C(\lambda)\left(\dfrac{3m-4}{m} + \lambda z\right)e^{\lambda z} \\ + D(\lambda)\left(\dfrac{3m-4}{m} - \lambda z\right)e^{-\lambda z} \end{cases}$$

REFERENCES

[1]- Achenbach J.D., "Wave propagation in elastic solids", North-Holland, (1980).

[2]- Chadler-Wilde S.N., "On asymptotic behavior at infinity and the finite section method for integral equations on the half – line", *Integral equation and applications*, (1994), pp. 37-74.

[3]- Kress R., "Linear Integral Equations", Springer-Verlag, 1998.

[4]- Sloan I.H., "Quadrature methods for integral equations of the second kind over infinite intervals", *Math.Comp*, 36 (1981), pp. 511-523.

[5]- Sloan I.H., "Integral Equation on the Half-line", *Journal of integral equation*, (1985), pp. 3-23.

[6]- Telford W.M. *and al.*, Prospection géophysique, *Edition ERG*, 1980.

[7]- Ulitko A.F., "La solution exacte d'un problème sur la concentration des contraintes au voisinage d'un trou dans une couche élastique", Mécanique appliquée, Comptes rendus Académie de l'Ukraine, 4, (1968), pp. 37-45 .

[8]- Ulitko A.F., "Method of eigen-vector functions in the problems of the space theory of elasticity", PMM 30(9), (1968), pp. 1-11; 56 (7), (1991), pp. 1040-1050. □