Sciences & Technologie **A** – **N°22**, Décembre (2004), pp. 17-21.

PROBLEME DE REPARTITION EQUILIBREE A INDICES MULTIPLES EN ENVIRONNEMENT ALEATOIRE

Reçu le 17/02/2002 – Accepté le 31/12/2004

Résumé

L'objectif de ce travail consiste en la généralisation du problème de répartition équilibrée classique à deux indices au cas d'un problème à indices multiples. Après une mise en valeur de l'aspect aléatoire lié à la demande des consommateurs et aux coûts de transport, le problème est transformé en un problème déterministe équivalent. La méthode que nous proposons pour résoudre ce dernier est basée sur la technique de décomposition de Benders. Des coupes de Gomory peuvent être ajoutées, éventuellement, aux contraintes, pour rendre la solution entière.

Mots clés: *Programmation linéaire, programmation stochastique, méthode de décomposition de Benders, indices multiples.*

Abstract

An extension of the classical weighted transportation problem with two indices is considered with multiple indices. After exhibiting the random aspect of the customer demand and the transportation costs, the problem is transformed into an equivalent deterministic one. The method that we propose to solve this last is based on the Benders decomposition technique. Gomory cuts can be added to the constraints to make the solution integer.

Keywords: *Linear programming, stochastic programming, Benders decomposition method, multiples indices.*

F. BELLAHCENE
Département de Mathématiques
Faculté des sciences
Université Mouloud Mammeri
Tizi-Ouzou 15000 (Algérie)

مخاص

إن الهدف من هذا العمل هو تعميم دراسة مسألة التوزيع الموزون ذو دليلين إلى مسألة توزيع ذو دلائل مضاعفة وهذا بإبراز المظهر الاحتمالي المتعلق بطلب المستهلكين وبأسعار النقل.

بعد تحويل هذه المسألة إلى مسألة معادلة، قدمنا طريقة جديدة لحلها. هذه الطريقة مبينة على طريقة تقطيع "بندرس"، ويمكن إضافة قطع "غوموري" لجعل الحل عددا طبيعيا.

الكلمات الفاتحة: *البرمجة الخطية، البرمجة الإحتمالية، طريقة تقطيع بندرس، دلائل مضاعفة.*

Ces dernières années ont vu se développer, dans le domaine de la recherche opérationnelle, de nouvelles techniques qui se caractérisent par le souci d'une meilleure appréhension des problèmes réels. Parmi elles, la programmation stochastique dont l'objectif est de prendre en compte les phénomènes aléatoires intervenant en pratique, exclus par les méthodes déterministes. En programmation stochastique, deux attitudes de base sont envisageables face à un même problème :

- l'attitude du "wait and see" ou *passive* qui consiste à attendre la réalisation des variables aléatoires pour prendre une décision.
- Lorsque la décision doit précéder la réalisation des variables aléatoires, il s'agit de l'attitude du "here and now" ou *active*. Dans ce cas, la résolution des programmes stochastiques est ramenée systématiquement à la résolution des programmes déterministes équivalents. L'efficacité de l'utilisation des équivalents déterministes est liée à leurs propriétés de linéarité ou de convexité. Ce point est important en pratique, car c'est en effet pour les problèmes linéaires ou convexes que nous connaissons ou nous pouvons développer des algorithmes de résolution efficaces.

Une grande importance est accordée aux problèmes de programmation linéaire liés à des graphes ou à des réseaux dont les matrices des contraintes ont une structure particulière que l'on peut exploiter dans l'algorithme du simplexe. Notre étude se limite à un type de problème de transport [1,2,4,5,6] qui a trait à la répartition équilibrée d'un produit fini disponible en quantité limitée dans m entrepôts. Le problème de base consiste alors à déterminer les quantités de produit à expédier vers n destinations de façon à minimiser le coût total de transport.

Ce papier comporte deux points essentiels. Le premier concerne la généralisation du problème de répartition équilibrée classique (à deux indices) au cas de plusieurs indices en faisant intervenir d'autres facteurs tels que le type et l'état des moyens de transport ainsi que celui des routes, des pneus,… A chaque nouveau facteur est associé un nouvel indice. De plus, nous supposons que les coûts de transport ainsi que la demande future du produit en question ne sont pas connus. On suppose, toutefois, qu'on peut exprimer ces paramètres incertains à l'aide d'une distribution de probabilités discrète définie sur un espace de probabilité (Ω,Ξ,P) où Ξ représente l'ensemble des parties de Ω. Le problème est alors appelé « problème de répartition équilibrée stochastique à indices multiples ». Le deuxième point est consacré à la résolution du problème généralisé. Pour ce faire, nous focalisons sur la philosophie du "here and now" et utilisons la programmation stochastique avec recours [7] pour transformer le problème stochastique en un problème déterministe équivalent. L'objectif est de déterminer l'affectation qui minimise les coûts totaux, ces derniers comprennent les coûts directs de transport et le montant du manque à gagner par suite des demandes non satisfaites. La procédure présentée pour résoudre ce dernier est une adaptation de la méthode de décomposition de Benders [2] au problème envisagé. Si les quantités à transporter sont indivisibles, des coupes de Gomory [8,10] peuvent être ajoutées, éventuellement, aux contraintes, pour rendre la solution entière.

La section 1 se rapporte à la modélisation du problème de répartition équilibrée stochastique à indices multiples et aux notations utilisées. La section 2 concerne la transformation du problème stochastique en un problème déterministe équivalent. Dans la section 3, nous exposons la méthode développée pour la résolution du problème équivalent. Un exemple numérique qui illustre les principales étapes de l'algorithme est présenté dans la section 4. Nous terminons ce papier par une conclusion.

1- NOTATIONS ET MODELISATION DU PROBLEME

En termes de programmation linéaire, le problème de répartition équilibrée à indices multiples en environnement aléatoire s'écrit comme suit :

déterminer les quantités $x_{i_1\ldots i_n}\geq 0$, $i_j = 1,\ldots,k_j$, $j=1,...,n$ qui minimisent la forme linéaire;

$$\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}\cdots\sum_{i_n=1}^{k_n} C_{i_1\ldots i_n}(\xi)x_{i_1\ldots i_n}$$

sous les contraintes

$$\sum_{i_{t_1}=1}^{k_{t_1}}\sum_{i_{t_2}=1}^{k_{t_2}}\cdots\sum_{i_{t_p}=1}^{k_{t_p}} x_{i_1\ldots i_n} = a_{i_{s_1}\ldots i_{s_{n-p}}}^{I_{s_1}\ldots I_{s_{n-p}}}$$

$$\sum_{i_{t_1^*}=1}^{k_{t_1^*}}\sum_{i_{t_2^*}}^{k_{t_2^*}}\cdots\sum_{i_{t_p^*}}^{k_{t_p^*}} \lambda_{i_1\cdots i_n}(\xi)x_{i_1\cdots i_n} = a_{i_{s_1^*}\cdots i_{s_{n-p}^*}}^{I_{s_1^*}\cdots I_{s_p^*}}(\xi)$$

$$x_{i_1\cdots i_n}\geq 0$$

Où $I_{s_j} = [1,\ldots,k_j]$; $j=1,\ldots,n-p$

$$\left\{i_{t_1},\ldots,i_{t_{n-p}},i_{t_1^*},\ldots,i_{t_1^*},i_{s_1},\ldots,i_{s_{n-p}},i_{s_1^*},\ldots,i_{s_{n-p}^*}\right\} = \left\{i_1,\ldots,i_n\right\}$$

$t_1,\ldots,t_p = 1,\ldots,n$; $s\neq t$ et $1\leq p\leq n-1$

Si l'on désigne par A la matrice technologique du premier groupe des contraintes, b le vecteur des disponibilités $a_{i_{s_1}\ldots i_{s_{n-p}}}^{I_{s_1}\ldots I_{s_{n-p}}}$, $C(\xi)$ le vecteur aléatoire des coûts de transport $C_{i_1\ldots i_n}(\xi)$, $h(\xi)$ le vecteur aléatoire des demandes $a_{i_{s_1^*}\ldots i_{s_{n-p}^*}}^{I_{s_1^*}\ldots I_{s_{n-p}^*}}(\xi)$, $\Lambda(\xi)$ la matrice aléatoire des coefficients de pondération $\lambda_{i_1\ldots i_n}(\xi)$, le problème précédent s'écrit sous forme d'un programme linéaire stochastique :

$$\begin{cases}\text{"min"}\, Z(x)=C(\xi)x \\ s.à \qquad Ax=b \\ \qquad \Lambda(\xi)x=h(\xi) \\ \qquad x\geq 0\end{cases} \tag{PS}$$

2- TRANSFORMATION DU PROBLEME

Supposons que ξ suive une loi discrète telle que pour tout $\xi^r\in\Omega$, $r=1,...,R$, $P(\xi^r)=P^r$, $P^r\geq 0$, $\sum_{r=1}^{R}P^r=1$. Puisque le décideur doit établir un plan provisoire de livraison de son produit avant de connaître la demande des consommateurs, il prend en considération toutes les réalisations ξ^r de Ω avec leurs probabilités $P(\xi^r)$ respectives. A chaque scénario, il associe une matrice $\Lambda(\xi^r)$, un vecteur coût $C(\xi^r)$ et un vecteur demande $h(\xi^r)$. Une matrice $W(\xi^r)$ dite de recours est introduite pour mesurer les violations z^r des contraintes stochastiques dans le cas du r-ième scénario de telle sorte que $\Lambda(\xi^r)x+W(\xi^r)\,z^r = h(\xi^r)$. Le décideur peut choisir la même matrice pour tous les scénarios i.e ($W(\xi^r)=W,\ \forall\, r=1,\ldots R$). Pour chaque scénario, si l'on désigne par $q^r=q(\xi^r)$ les coûts des violations z^r, le coût de pénalité est représenté par la fonction de recours suivante :

$$Q(x,\xi^r)=\min_z\left\{(q^r)^t z \;\middle|\; W(\xi^r)\,z = h(\xi^r)-\Lambda(\xi^r)x,\ z\geq 0\right\} \tag{1}$$

Les coûts de pénalité apparaissent après la prise de décision et représentent le montant du manque à gagner par suite des demandes non satisfaites.

Finalement, le problème stochastique (PS) devient un problème stochastique avec recours (PSR) qui consiste à minimiser l'espérance mathématique des coûts totaux : les coûts provisoires de transport fixés par le décideur et les coûts de pénalité i.e.

$$\begin{cases}\min E\left(C^t(\xi)x+Q(x,\xi)\right) \\ s.à \qquad x\in S\end{cases} \tag{PSR}$$

où $S=\left\{x\in R^n \;\middle|\; Ax=b,\ x\geq 0\right\}$ est le polyèdre convexe formé par les contraintes déterministes $Ax=b$.

Le choix des variables x dans S ne peut se faire n'importe comment. Dans le cas du problème (PSR), les décisions sont prises de telle sorte que $Q(x,\xi)$ soit fini avec la probabilité égale à 1, c'est-à-dire

$$x \in K = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, Q(x,\xi^r) < +\infty \,, \forall\ r = 1, \dots, R \right\}.$$

La question est de savoir dans quel cas nous avons $Q(x,\xi^r) < +\infty$? Pour répondre à cette question, nous considérons le dual de $Q(x,\xi^r)$:

$$\max_{\pi}\left\{ \pi_r^t[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x] \,\middle|\, \pi_r^t W(\xi^r) \le q^r \right\} \qquad (2)$$

Proposition [9] : *Soit* $\left\{ \pi^k \mid k \in K \right\}$ *l'ensemble des points extrêmes du domaine réalisable* $P = \left\{ \pi_r \mid \pi_r^t W(\xi^r) \le q^r \right\}$ *de (2) et* $\left\{ \sigma^\delta \mid \delta \in \Delta \right\}$ *l'ensemble de ses rayons extrémaux.*

1°) Si $P = \emptyset$, *alors* $Q(x,\xi^r)$ *est non borné* $(Q(x,\xi^r) = -\infty)$ *ou irréalisable* $(Q(x,\xi^r) = +\infty)$.

2°) Si $P \neq \emptyset$, *alors* $Q(x,\xi^r)$ *est irréalisable ou possède une solution optimale.*

D'autre part, le lemme de Farkas stipule que

$$\left\{ z \mid W(\xi^r)z = h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x,\ z \ge 0 \right\} \neq \emptyset$$

si et seulement si

$$W^t(\xi^r)\sigma_r \le 0 \Rightarrow \sigma_r^t[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x] \le 0$$

Nous déduisons que, pour un $x^0 \in S$ donné, $Q(x^0,\xi^r)$ est irréalisable si et seulement si P a un rayon extrême σ_r tel que $\sigma_r^t[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x^0] > 0$; dans le cas contraire, la valeur optimale de $Q(x^0,\xi^r)$ est donnée par $\pi_r^t[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x^0]$ où π est un point extrême de P. Finalement, pour étudier la réalisabilité du problème $Q(x^0,\xi^r)$, nous devons résoudre le programme

$$\max_{\sigma}\left\{ \sigma_r^t\left[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x^0\right] \,\middle|\, \sigma_r^t W(\xi^r) \le 0,\ \|\sigma_r\|_1 \le 1 \right\} \qquad (3)$$

qui permet de trouver un vecteur de direction σ_r. Notons que la dernière contrainte est ajoutée pour borner σ_r, car, sinon, la valeur maximale serait égale à $+\infty$. Si pour une certaine réalisation ξ^r, $r \in \{1,\dots,R\}$, $\sigma_r^t[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x^0] > 0$, nous aurons trouvé un ξ^r pour lequel $Q(x^0,\xi^r)$ n'est pas réalisable. Nous introduisons, dans ce cas, la coupe de réalisabilité :

$$\sigma_r^t[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x] \le 0 \qquad (4)$$

Supposons maintenant que nous avons déterminé toutes les coupes de réalisabilité. Désignons par $\widetilde{Z}(x)$ et $Q(x)$ les espérances mathématiques de la fonction économique $Z(x)$ et de la fonction de recours $Q(x,\xi)$ respectivement. Ces deux quantités sont données par

$$\widetilde{Z}(x) = E[Z(x)] = \sum_{r=1}^{R} p^r C(\xi^r)x \qquad (5)$$

$$Q(x) = E[Q(x,\xi)] = \sum_{r=1}^{R} p^r (q^r)^T z^r = \sum_{r=1}^{R} p^r Q(x,\xi^r) \qquad (6)$$

Le problème déterministe équivalent de (PSR) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \min \tilde{Z}(x) + Q(x) \\ s.à \qquad x \in \hat{S} \end{cases}$$

où

$$\hat{S} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, Ax = b,\ \sigma_r^{\,t}\big(h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x\big) \le 0,\ r \in \{1,..R\}, x \ge 0 \right\}$$

Ou bien sous la forme

$$\begin{cases} \min \tilde{Z}(x) + \theta \\ s.à \qquad x \in \hat{S} \\ \qquad\quad \theta \ge Q(x) \end{cases} \qquad \text{(DEP)}$$

en introduisant une variable supplémentaire $\theta \ge 0$.

3- METHODE DE RESOLUTION

Avant d'exposer la méthode de résolution du problème (DEP), nous allons établir le lien entre ce problème et le problème stochastique avec recours (PSR).

Proposition : *Si* (x^*,θ^*) *est la solution optimale de (DEP) alors* $\theta^* > \theta,\ \forall \theta \ge 0$.

Preuve : Supposons que (x^*,θ^*) soit une solution optimale pour (DEP) alors

$$\theta^* \ge Q(x^*) = \sum_{r=1}^{R} p^r (\widetilde{\pi}_r)^t\left[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x^*\right]$$

où $\widetilde{\pi}_r$ est la solution optimale du dual (2). Puisque le dual est un problème de maximisation, alors pour toute solution réalisable x de (DEP), on a :

$$\sum_{r=1}^{R} p^r (\widetilde{\pi}_r)^t\left[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x^*\right] \ge \sum_{r=1}^{R} p^r (\widetilde{\pi}_r)^t\left[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x\right]$$

Donc $\theta^* > Q(x) > \theta$.■

Théorème 1 : *Si* (x^*,θ^*) *est la solution optimale de (DEP) alors* x^* *est optimale de (PSR).*

Preuve : On suppose que (x^*,θ^*) est la solution optimale de (DEP) et que x^* est non optimale pour (PSR); alors il existe $x^0 \in S$ tel que :

$$E\big(C^t(\xi)x^0 + Q(x^0,\xi)\big) < E\big(C^t(\xi)x^* + Q(x^*,\xi)\big)$$

ou bien $\widetilde{Z}(x^0) + Q(x^0) < \widetilde{Z}(x^*) + Q(x^*)$

En vertu de la proposition précédente, on obtient $\widetilde{Z}(x^0) + \theta^0 < \widetilde{Z}(x^*) + \theta^*$. Ceci qui contredit l'optimalité de (x^*,θ^*) .■

ALGORITHME

Puisque $Q(x)$ est défini implicitement par un grand nombre de problèmes d'optimisation de type (1), la relation

$\theta \geq Q(x)$ ne peut être considérée comme une contrainte ordinaire. Nous devons donc la séparer des autres contraintes.

Etape 1 : L'exécution de l'algorithme débute sans coupes de réalisabilité et d'optimalité.

- Poser $\theta = -\infty$ puis résoudre le problème linéaire $\min \left\{ \tilde{Z}(x) \mid Ax = b \ , \ x \geq 0 \right\}$. Soit x^0 sa solution optimale (ajouter éventuellement des coupes de Gomory pour rendre cette solution entière).
- Pour chaque r, résoudre le problème (3) et trouver un vecteur de direction σ_r.

Si $\sigma_r^t[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x] \leq 0 \,, \forall \ r = 1, \ldots R$, aller à l'étape 2.

S'il existe $r \in \{1, \ldots, R\}$ tel que $\sigma_r^t[h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x^0] > 0$, construire la coupe de réalisabilité et l'ajouter aux contraintes $Ax = b$. Réoptimiser le problème précédent pour trouver une autre solution et aller à l'étape 2.

Etape 2 :

- Pour chaque r, résoudre le programme dual (2). Utiliser les solutions optimales $\tilde{\pi}_r$ pour calculer $Q(x^0, \xi^r)$ pour $r = 1, \ldots, R$ ainsi que $Q(x^0)$, car les propriétés de dualité imposent que

$$Q(x^0) = \sum_{r=1}^{R} p^r Q(x^0, \xi^r) = \sum_{r=1}^{R} p^r (\tilde{\pi}_r)^t [h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x^0]$$

Si $\theta \geq Q(x^0)$, la solution optimale du problème (DEP) est x^0. Dans le cas contraire, introduire la coupe d'optimalité $\theta \geq Q(x)$:

$$\theta \geq \sum_{r=1}^{R} p^r (\tilde{\pi}_r)^t [h(\xi^r) - \Lambda(\xi^r)x] \,, \ r = 1, \ldots, R$$

- Résoudre le problème (DEP). On obtient ainsi sa solution optimale (x^*, θ^*) où x^* est aussi la solution optimale du programme stochastique avec recours (PSR) et θ^* est le coût de pénalité associé à cette solution.

Puisque seul un nombre fini de bases réalisables venant de la matrice de recours W est possible, il existe seulement un nombre fini de coupes de réalisabilité et d'optimalité. D'autre part, l'ensemble des solutions réalisables est borné et tronqué par l'application répétée des ces coupes et éventuellement, de celles de Gomory. Ceci conduit à la convergence de la méthode en un nombre fini d'étapes.

4- EXEMPLE NUMERIQUE

Pour illustrer l'application de cette méthode, nous traitons le problème à trois indices i_1, i_2 et i_3 avec $p = 2$, $R = 2$ et $k_1 = k_2 = k_3 = 2$.

Les composantes du vecteur $C(\xi^1)$ sont :

$C_{111}(\xi^1) = 6$, $C_{121}(\xi^1) = 8$, $C_{211}(\xi^1) = 13$, $C_{221}(\xi^1) = 17$, $C_{112}(\xi^1) = 11$, $C_{122}(\xi^1) = 14$, $C_{212}(\xi^1) = 3$, $C_{222}(\xi^1) = 7$

Les composantes du vecteur $C(\xi^2)$ sont :

$C_{111}(\xi^{21}) = 10$, $C_{121}(\xi^2) = 4$, $C_{211}(\xi^2) = 9$, $C_{221}(\xi^2) = 5$

$C_{112}(\xi^2) = 11$, $C_{122}(\xi^2) = 6$, $C_{212}(\xi^2) = 7$, $C_{222}(\xi^2) = 3$

$$\Lambda(\xi^1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(\xi^2) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{i_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \ a_{i_2} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}, \ a_{i_3}(\xi^1) = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}, a_{i3}(\xi^2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$q(\xi^1) = (4,3,1,6)$, $\qquad q(\xi^2) = (1,0,5,4)$

$p(\xi^1) = \frac{1}{4}$, $\qquad p(\xi^2) = \frac{3}{4}$

$E[C(\xi)] = P(\xi^1)C(\xi^1) + P(\xi^2)C(\xi^2) = (9,5,10,8,11,8,6,4)$

Etape 1

On pose $\theta = -\infty$ et on résout le problème suivant :

$$\min 9x_{111} + 5x_{121} + 10x_{211} + 8x_{221} + 11x_{112} + 8x_{122} + 6x_{212} + 4x_{222}$$

$$x_{111} + x_{121} + x_{211} + x_{221} = 10$$

$$x_{112} + x_{122} + x_{212} + x_{222} = 6$$

$$x_{111} + x_{211} + x_{112} + x_{212} = 14$$

$$x_{121} + x_{221} + x_{122} + x_{222} = 12$$

$$x_{111}, x_{121}, x_{211}, x_{221}, x_{112}, x_{122}, x_{212}, x_{222} \geq 0$$

La solution optimale est donnée par $x^0 = (0,10,0,0,0,0,4,2)$.

Testons si cette solution $Q(x^0, \xi^r)$ est fini pour $r = 1,2$. Pour cela nous construisons et résolvons le problème (3) pour chacun des scénarios.

$$h(\xi^1) - \Lambda(\xi^1) = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \ h(\xi^2) - \Lambda(\xi^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max \ (-6\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2) \\ -5\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - \sigma_1^2 \leq 0 \\ 4\sigma_1^1 - 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 0 \end{bmatrix}$$, le maximum est atteint en $\sigma_1 = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} \max \ (-3\sigma_2^2) \\ -5\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - \sigma_2^2 \leq 0 \\ 4\sigma_2^1 - 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 0 \end{bmatrix}$$, le maximum est atteint en $\sigma_2 = (0,0)$

$\sigma_1^t\left[h(\xi^1) - \Lambda(\xi^1)\right] = 0$ et $\sigma_2^t\left[h(\xi^2) - \Lambda(\xi^2)\right] = 0$, ceci signifie que $Q(x^0, \xi^r)$ est réalisable pour les deux réalisations ξ^1 et ξ^2.

Etape 2

Résolvons le dual (2) pour $r = 1,2$

$$\begin{bmatrix} \max(-6\pi_1^1 - 6\pi_1^2) \\ -5\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \le 4 \\ 2\pi_1^1 - \pi_1^2 \le 3 \\ 4\pi_1^1 - 3\pi_1^2 \le 1 \\ -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \le 6 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est atteint en } \pi_1 = (-2,-3)$$

$$\begin{bmatrix} \max(-3\pi_2^2) \\ -5\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \le 1 \\ 2\pi_2^1 - \pi_2^2 \le 0 \\ 4\pi_2^1 - 3\pi_2^2 \le 5 \\ -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \le 4 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est atteint en } \pi_2 = \left(-\frac{13}{7}, -\frac{29}{7}\right)$$

$Q(x^0, \xi^1) = 30$

$Q(x^0, \xi^2) = \frac{87}{7}$

$Q(x^0) = \frac{1}{4} Q(x^0, \xi^1) + \frac{3}{4} Q(x^0, \xi^2) = \frac{471}{28}$

La relation $\theta \ge Q(x^0)$ n'est pas satisfaite donc nous introduisons la coupe d'optimalité:

$$\theta \ge \frac{62}{7} x_{111} + \frac{67}{28} x_{121} + \frac{44}{7} x_{211} + \frac{237}{28} x_{221} + \frac{141}{7} x_{112} + \frac{48}{7} x_{122} + \frac{195}{28} x_{212} + \frac{171}{28} x_{222} - \frac{1321}{28}$$

et nous résolvons le problème à nouveau. La solution optimale est $x^0 = (0,10,0,0,0,0,4,2)$ avec un coût optimal de violation des contraintes $\vartheta = \frac{471}{28}$.

CONCLUSION

Lors de ce travail, nous avons généralisé le problème de répartition équilibrée classique à deux indices au cas de plusieurs indices, en tenant compte de l'ensemble des contraintes liées à l'acheminement d'un produit fini dans le but de satisfaire le consommateur. L'approche développée dans ce papier pour résoudre le problème stochastique avec recours ou son équivalent déterministe est une méthode de coupes. Elle est basée sur la méthode de décomposition de Benders. L'extension de cette approche et son utilisation dans la résolution du problème de répartition pondérée stochastique multiobjectifs en nombres entiers est décrite en [2].

REFERENCES

[1]- Bellahcene F., "Problème de transport à capacité à Indices Multiples", Thèse de Magister, Université de Tizi-Ouzou, (1999).

[2]- Bellahcene F., "Problème de répartition pondérée stochastique multiobjectif en variables entières", Résumés des communications, Troisième Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle : Théorie et Applications, Marrakech, 04-06 juin, (2002).

[3]- Benders J.F., "Partioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems", *Numer. Math.*, 4, (1962), pp. 238-252.

[4]- De Werra D., "Eléments de Programmation Linéaire avec Application aux Graphes", Presses Polytechniques Romandes, (1990).

[5]- Glover F.D., Karney D., Klingman and Russell R., "Solving Singly Constrainted Transshipment Problems", *Transportation Science*, 12 (4), (1998), pp.277-297.

[6]- Golstein E., Youdine D., "Problèmes Particuliers de Programmations Linéaire à Indices Multiples", Radio et Communications, Moscou, (1982).

[7]- Kall P., Wallace S.W., "Stochastic Programming", Willey Interscience Series in Systems and Optimization, (1994).

[8]- Minoux M., "Programmation Mathématique", Théorie et Algorithmes, tome 2, Paris, (1983).

[9]- Nemhauser G.L., Wolsey L.A., "Integer and Combinatorial Optimization", Willey Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, (1988).

[10]- Sakarovitch S., "Techniques Mathématiques de la Recherche Opérationnelle : Optimisation dans les réseaux", Institut National de Grenoble, (1977). □