Sciences & Technologie **A** – **N°34** Décembre. (2011), pp. 35-40

ANALOGIES ENTRE LA THÉORIE STOCHASTIQUE ET LA THÉORIE QUANTIQUE

I. BENDAHMANE et B. BENTAG
Laboratoire de physique mathématique et subatomique, Département de physique,
Université Mentouri Constantine (Algérie)

Reçu le 21/04/2010 – Accepté le 29/08/2011

Résumé

Des analogies ont été faites entre la théorie quantique et la théorie stochastique qui décrivent des modèles d'évolution complètement différents dans des statuts mathématiques semblables ; Les processus stochastiques markoviens permettent une description acceptable des problèmes de la physique quantique. L'équation quantique de Schrödinger et l'équation stochastique de Chapman-Kolmogorov ont la même forme différentielle et peuvent par conséquent partager les mêmes solutions. Un lien profond existe entre l'intégrale de chemin de Feynman et l'intégrale de chemin stochastique de Wiener. Néanmoins, l'expression du propagateur de Wiener est mieux définie ; la constante de proportionnalité imposée par Feynman en raison de la normalisation a été naturellement déduite dans l'intégrale de chemin de Wiener. Ce résultat constitue la contribution originale de ce travail.

Mots clés: ***Théorie quantique, théorie stochastique, processus markoviens, équation de Schrödinger, équation de Chapman-Kolmogorov, intégrales de chemin de Wiener et Feynman, constante de proportionnalité.***

Abstract

Some Analogies were found between the quantum theory and the stochastic theory that they describe completely different models of evolution with a very similar mathematical framework; the Markovian stochastic processes allow an acceptable description of the quantum problems. The Schrödinger quantum equation and the stochastic Chapman-Kolmogorov equation have the same differential form and consequently can have the same type of solutions. A profound link exists between Feynman's path integral and the stochastic Wiener path integral. Nevertheless the propagator expression of Wiener is better defined; the proportionality constant imposed by Feynman for normalization reasons was deduced directly using Wiener path integral. This result represents the original contribution of this paper.

Keywords: Quantum theory, stochastic theory, Markovian processes, Schrödinger equation, Chapman-Kolmogorov equation, Wiener and Feynman path integrals, proportionality constant.

ملخص

وجدت تشابهات بين النظرية الكوانتية و النظرية الستوكاستيكية اللتان تصفان نماذج مختلفة و لكن في إطار رياضي متشابه; العمليات الستوكاستيكية الماركوفية تسمح بوصف مقبول للظواهر الكوانتية. معادلة شرودينجر الكوانتية و معادلة شبمان-كولمجروف الستوكاستيكية لهما نفس الشكل التفاضلي مما يسمح بتشاركهما لنفس الحلول. يوجد رابط عميق بين تكامل المسار لفاينمان و تكامل المسار الستوكاستيكي لوينر. و مع ذلك فإن هذا الأخير يعتبر أدق تعريفا; لأن ثابت التناسب الموضوع من طرف فاينمان بغرض التقنين يستخلص بصفة مباشرة بإستعمال تكامل المسار لوينر. هذه النتيجة تعتبر المساهمة الأصلية في هذا العمل.

الكلمات المفتاحية : النظرية الكوانتية، النظرية الستوكاستيكية، عمليات ماركوفية، معادلة شرودينجر، معادلة شابمان-كولمجروف، تكاملات المسار لوينر و فاينمان، ثابت التناسب.

.

Introduction

La théorie des processus stochastiques est le cadre théorique utilisé pour analyser tout phénomène d'évolution temporelle dont seul le calcul des probabilités peut permettre la description. Les exemples sont innombrables, en physique ou ailleurs. Dans le domaine de la physique, le mouvement brownien constitue le socle de cette discipline.

L'observation du mouvement Brownien est bien antérieure à Brown lui-même. Parmi les précurseurs, nous pouvons citer le hollandais Ingen-Housz qui observa le mouvement erratique de poussières de charbon dans l'alcool. Des observations similaires faites par Buffon et d'autres naturalistes montrent que des particules organiques, en suspension dans un fluide, effectuent ce mouvement surprenant et désordonné dont on ignore l'origine. On parle alors de particules « irritables » et on avance des théories vitalistes qui attribuent une autonomie propre à ces petites particules (la nature moléculaire du fluide n'est pas connue à cette époque).

Le terme mouvement brownien provient du botaniste Brown qui observe à son tour le mouvement imprévisible de grains de pollen en suspension dans l'eau. Brown se livre à des observations systématiques de ce mouvement et ses conclusions, confirmées et améliorées par d'autres expériences soigneuses à la fin du 19$^{\text{éme}}$ siècle (en particulier par le physicien Gouy) sont les suivantes [1] :

1- Le mouvement est très irrégulier et imprévisible, il n'est pas possible d'assigner des tangentes à la trajectoire.
2- Le mouvement est indépendant de la nature de la particule.
3- Le mouvement est d'autant plus erratique que la particule est petite, la température élevée, la viscosité faible.
4- Le mouvement ne cesse jamais.

Il est alors admis que le mouvement n'est pas d'origine « vitaliste », mais bien mécanique. Cependant sa complexité et son caractère apparemment aléatoire montrent qu'il ne peut pas être sujet à une explication simple. Dans un siècle dominé par le déterminisme, ces déplacements browniens imprévisibles, et dont les vitesses ne pouvait être déterminées posaient des problèmes d'interprétation tout à fait nouveaux.

Dans la même période, l'hypothèse atomique motive einstein à établir un lien entre ce mouvement et la nature moléculaire du fluide en admettant que le mouvement d'une particule en suspension est dû aux collisions avec celles du fluide. Einstein adopte un point de vue purement probabiliste pour la description des trajectoires browniennes [1], renonçant à tout concept faisant intervenir la vitesse et la mécanique. Einstein inaugure et montre l'importance d'une science nouvelle, la théorie des fluctuations. Il laisse cependant ouvert le problème de la formulation d'une théorie dynamique du mouvement brownien. Il faut rappeler les travaux parallèles dans cette direction de Smoluchowski [2,3], mais il vient à Langevin d'avoir réconcilié le mouvement brownien avec la mécanique en introduisant la notion de force aléatoire et ouvrant ainsi le chapitre des équations différentielles stochastiques.

A la suite des travaux d'einstein, N. Wiener à introduit le concept d'intégrale de chemin [4] dans le but de décrire les propriétés statistiques du mouvement brownien. Le mouvement brownien peut être considéré comme la limite continue d'une marche au hasard markovienne en temps discrets. Le mouvement au temps t est déterminé par la probabilité $p(x',x)$ d'aller du point x au point x'. En conséquence, partant du point x_0 la probabilité $p_n(x_n,x_0)$ d'atteindre le point x_n au temps n est donnée par

$$p_n(x_n,x_0) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} w(x_n,x_{n-1}) \dots w(x_2,x_1) w(x_1,x_0)$$

L'ensemble des intégrations sur les variables x_i peut s'interpréter comme une somme pondérée sur tous les chemins $\{x_i\}$ qui vont de x_0 à x_n dans un temps t_i qui prend des valeurs entières $0,1,\dots,n$.

Asymptotiquement cependant, pour $n \to \infty$, la discrétisation du temps ne joue plus de rôle. Par ailleurs, comme conséquence du théorème de la limite centrale de la théorie des probabilités, la distribution $p(x',x)$ peut alors être remplacée par une distribution gaussienne de la forme $e^{-\frac{(x-x')^2}{2D}}$. Ce processus limite conduit à une intégrale de chemin : les propriétés statistiques du mouvement brownien s'expriment en termes de sommes sur tous les chemins possibles fonctions d'un temps continu et obéissant à une loi de probabilité gaussienne.

Bien entendu, l'histoire moderne de l'intégrale de chemin commence avec les articles de Feynman [5] qui formule l'évolution quantique en termes de sommes sur un ensemble de trajectoires pondérées par $e^{-is/\hbar}$, où s est la valeur de l'action classique correspondant à la trajectoire. Du point de vue purement mathématique, l'intégrale de chemin a mis en évidence les relations mathématiques profondes entre la théorie quantique et la théorie stochastique qui aurait été très difficile à percevoir autrement. Cette classe de problèmes contient comme exemple le plus simple le mouvement brownien qu'a motivé la construction de la première intégrale de chemin ou l'intégrale de Wiener.

L'un des objectifs de cet article est de parcourir en premier lieu les principales analogies qui existent entre la théorie quantique et la théorie stochastique et de confirmer que ces analogies ne sont pas perceptibles uniquement sous l'angle de l'intégrale de chemin. D'autre part, nous démontrons que la constante de proportionnalité inconnue de Feynman, constante imposée, peut être obtenue rigoureusement à partir de l'intégrale de chemin de Wiener. Ainsi, ce résultat particulièrement significatif montre encore une fois que le formalisme de l'intégrale de chemin est particulièrement bien adapté aux processus aléatoires.

2. Analogie entre un processus markovien et le processus dynamique

La nature probabiliste de la théorie quantique ne garantit pas sa description par le bagage mathématique spécifique aux processus stochastiques car on sera confronté à l'ambiguïté de son caractère dynamique. Néanmoins, d'un point de vue purement mathématique, la théorie des processus stochastiques est une extension naturelle de la théorie de systèmes dynamiques à des phénomènes aléatoire se déroulent dans le temps, il est alors tentant de songer à développer une stratégie générale qui conduit à définir la physique quantique directement à partir de la physique stochastique et par conséquent représenter les phénomènes dynamiques par les outils de cette dernière.

Dans ce sens, nous allons établir une analogie entre le traitement dynamique formé de n points est un processus stochastique Markovien. Pour ceci, considérons l'équation différentielle du premier ordre $\dot{x}(t) = F[x(t)]$. Soit $\varphi(x_0, t - t_0)$ le flot de l'équation donnant la trajectoire de $x(t)$ correspondant à la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Les points de cette trajectoire sont choisis d'une façon aléatoire $\{x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n\}$ étant donné que la condition initiale détermine complètement la solution, on a :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(x_0, t_1 - t_0),\\
x_2 &= \varphi(x_0, t_2 - t_0) = \varphi(x_1, t_2 - t_1),\\
&\vdots\\
x_n &= \varphi(x_0, t_n - t_0) = \varphi(x_{n-1}, t_n - t_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Comme La particule partant de $\{x_0, t_0\}$ et passera avec certitude par tous les points $\{x_i, t_i\}_{i=1}^{n}$, on traduit cette certitude est par la distribution de probabilité suivante :

$$
\begin{aligned}
&W(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \delta[x_1 - \varphi(x_0, t_1 - t_0)]\\
&\delta[x_2 - \varphi(x_0, t_2 - t_0)] \times \dots \times \delta[x_n - \varphi(x_0, t_n - t_0)]\\
&= \delta[x_1 - \varphi(x_0, t_1 - t_0)]\delta[x_2 - \varphi(x_1, t_2 - t_1)] \times \dots\\
&\qquad \times \delta[x_n - \varphi(x_{n-1}, t_n - t_{n-1})] \dots (\mathbf{1}).
\end{aligned}
$$

Étant donné que $\{x_0, t_0\}$ est un événement initial donné, nous pouvons écrire

$$
\begin{cases}
w(x_1, t_1) \equiv \delta[x_1 - \varphi(x_0, t_1 - t_0)]\\
W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) \equiv \delta[x_i - \varphi(x_{i-1}, t_i - t_{i-1})]
\end{cases} \dots (2)
$$

Et donc la relation (1) définit bien un processus stochastique de Markov. En effet, comme conséquence des relations (2), nous pouvons confirmer que la dynamique est de caractère markovien [6]. Nous notons que ce processus dynamique est devenu markovien via l'approximation définie par la relation (2) où la fonction δ de Dirac exprime les probabilités de transitions. Nous en déduisons que d'une manière générale l'attribution de la propriété de Markov à un processus dynamique dépend du choix des variables stochastiques et des conditions initiales. Ainsi, cette analogie nous autorise à dire que les processus stochastiques markoviens permettent une description acceptable des problèmes de la physique quantique car cette propriété de Markov est l'équivalent stochastique aux processus dynamiques.

3- Analogie entre Les équations stochastiques et l'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger est la base de la théorie la plus utilisée pour décrire le mouvement des particules microscopique dans un potentiel extérieur bien déterminé. Dans cette approche formulée par Schrödinger, l'état d'un système est repéré par une fonction d'onde dont l'évolution temporelle est régie par cette équation différentielle. Cependant, la théorie des processus stochastique s'applique à formuler les modèles d'évolution où le système est excité par des forces extérieures que l'on n'arrive pas à décrire. Malgré cette différence fondamentale entre ces deux théories, il serait intéressant de situer l'analogie entre leurs équations différentielles. En effet, sachant que toutes les équations stochastiques s'obtiennent depuis l'équation de Chapman-Kolmogorov, nous allons montrer que la forme différentielle de cette dernière est de même type que celle de l'équation de Schrödinger. Pour ce faire, on définit un certain opérateur T_τ sur la base de l'ensemble des positions $(\mathrm{x_i}, \mathrm{x_j})$, (i et j = $\overline{1, \mathrm{n}}$) qui représentent un processus stochastique de Markov caractérisé par n points, comme suit :

$$\langle \mathrm{x_j} | \mathrm{T}_\tau | \mathrm{x_i} \rangle = \mathrm{T_{ij}} = \mathrm{W}(\mathrm{x_j}, \mathrm{t_j} | \mathrm{x_i}, \mathrm{t_i}), \qquad \tau = \Delta \mathrm{t} = \mathrm{t_j} - \mathrm{t_i} \dots (3)$$

Il est clair que l'opérateur T_τ est une matrice $n \times n$ dont les éléments sont les probabilités de transition du processus stochastique. Dans ce cas, l'équation différentielle de Chapman-Kolmogorov s'écrit pour cet opérateur [6]

$$\forall (x', x) : \frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | T_\tau | x' \rangle = A^+(\tau) \langle x | T_\tau | x' \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau = A^+ T_\tau \dots (4)$$

Où A est l'opérateur qui représente la variation des espérances [6].

Il est facile de vérifier que T_τ est l'opérateur d'évolution d'un processus stochastique et que l'équation (4) est de même type que l'équation de Schrödinger associée à l'opérateur d'évolution quantique U_t qui satisfait à

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} U_t = H U_t \dots (5)$$

Par conséquent, cette analogie nous motive à nouveau à dire que les solutions de l'équation stochastique de Chapman-Kolmogorov peuvent constitue des solutions de l'équation de Schrödinger qui gouverne la physique quantique.

4- Analogies entre l'intégrale de chemin de Wiener et de Feynman : déduction de la constante de proportionnalité

L'intégrale de chemin de Feynman et sa version euclidienne, l'intégrale de chemin de Wiener est une méthode générale qui permet d'exprimer les probabilités de transition en mécanique quantique, et plus généralement les fonctions de corrélation en mécanique statistique et les propagateurs en théorie quantique des champs à l'aide d'une somme sur les chemins possibles du système. Néanmoins, malgré la différence de l'interprétation et des status mathématiques de l'intégrale de Wiener et de Feynman, le mathématicien M. Kac [7,8] a développé un théorème connu sous le nom du théorème de Feynman-Kac reliant l'intégrale de chemin de Wiener relative à un hamiltonien dont le potentiel est $V(x)$ et les solutions d'une équation différentielle partielle et établissant indirectement le lien entre l'intégrale de chemin de Wiener et l'intégrale de chemin de Feynman.

Suivant ce théorème, la fonction $u(x,t)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = D\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - V(x)u(x,t) \;\dots\mathbf{(6)}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0\\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = \delta(x)\end{cases} \dots\mathbf{(7)}$$

Où D est la constante de diffusion et $\delta(x)$ est la fonction delta de Dirac.

Les solutions de l'équation (6) s'expriment en termes d'intégrale de chemin de Wiener

$$\int_{\mathcal{T}} exp\left\{-\int_0^t V[x(\tau)]\,d\tau\right\} d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx \;\dots\mathbf{(8)}$$

Où $d_w x$ définit la mesure de Wiener.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que la dérivation de l'expression du propagateur quantique à partir des notions de la physique stochastique est possible en utilisant le théorème de Feynman-Kac. En effet il suffit d'écrire l'équation différentielle (6) sous une forme similaire à celle de l'équation de Schrödinger. Ceci se fait facilement par l'introduction des changements suivants [9]

$$\begin{cases} D = \dfrac{i\hbar}{2m}\\ V(x) = \dfrac{i}{\hbar}\,v(x)\end{cases} \dots(9)$$

Après substitutions dans (6), nous obtenons une équation dont la forme est exactement celle de l'équation de Schrödinger régissant le mouvement d'une particule quantique de mass m dans un potentiel $v(x)$.

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + v(x)u(x,t) \;\dots(10)$$

Ce résultat n'implique que les fonctions $u(x,t)$, solutions de l'équation (6) sont des fonctions d'onde qui repère l'état d'une particule quantique de mass m sous l'action d'un potentiel $v(x)$.

Comme la fonction $u(x,t)$ vérifie les conditions aux limites de la relation (7), nous pouvons alors appliquer directement le théorème de Feynman-Kac avec les substitutions définies dans la relation (9)

$$\int_{\mathcal{T}} exp\left\{-\int_0^t \frac{i}{\hbar}v(x)\,d\tau\right\} d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx \;\dots(11)$$

Où le membre de gauche représente une intégrale de chemin inconditionnelle qui peut être exprimée en terme d'intégrale de Wiener conditionnelle comme suit [4]

$$\int_{\mathcal{T}} exp\left\{-\int_0^t \frac{i}{\hbar}v(x)\,d\tau\right\} d_w x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{\mathcal{T}(x_0,t_0;x,t)} exp\left\{-\int_0^t \frac{i}{\hbar}v(x)\,d\tau\right\} d_w x \;\dots(12)$$

D'après les relations (11) et (12), nous pouvons immédiatement déduire

$$\int_{\mathcal{T}(x_0,t_0;x,t)} exp\left\{-\int_0^t \frac{i}{\hbar}v(x)\,d\tau\right\} d_w x = u(x,t;x_0,t_0) \;\dots(13)$$

Où nous avons remplacé $u(x,t)$ par $u(x,t;x_0,t_0)$ car il s'agit d'une intégrale de chemin de Wiener conditionnelle caractérisée par la trajectoire $\mathcal{T}(x_0,t_0;x,t)$.

Ce type d'intégrale donne une distribution de probabilité conditionnelle dite probabilité de transition.

La mesure de Wiener $d_w x$ [4] avec les changements de la relation (9) devient :

$$d_w x = exp\left\{-\int_0^t \frac{1}{4D}\dot{x}^2\,d\tau\right\}\prod_{\tau=0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}}$$

$$= exp\left\{-\int_0^t \frac{1}{4\frac{i\hbar}{2m}}\dot{x}^2\,d\tau\right\}\prod_{\tau=0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\frac{i\hbar}{2m}\pi d\tau}}$$

$$\Rightarrow d_w x = exp\left\{-\int_0^t \frac{m}{2i\hbar}\dot{x}^2\,d\tau\right\}\prod_{\tau=0}^{t}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar d\tau}}\,dx(\tau)$$

L'expression de la relation (13) peut donc être réécrite sous la forme

$$\int_{\mathcal{T}(x_0,t_0;x,t)} \prod_{\tau=0}^{t}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar d\tau}}\,dx(\tau)\;\; exp\left\{-\int_0^t \frac{i}{\hbar}v(x)\,d\tau\right\}$$

$$exp\left\{-\int_0^t \frac{m}{2i\hbar}\dot{x}^2\,d\tau\right\} = u(x,t;x_0,t_0)$$

$$\Rightarrow u(x,t;x_0,t_0) =$$

$$\int_{\mathcal{T}(x_0,t_0;x,t)} \prod_{\tau=0}^{t}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar d\tau}}\,dx(\tau)\;\; exp\left\{-\int_0^t \left(\frac{m}{2i\hbar}\dot{x}^2 + \frac{i}{\hbar}v(x)\right)d\tau\right\}$$

$$\Rightarrow u(x,t;x_0,t_0) =$$

$$\int_{\mathcal{T}(x_0,t_0;x,t)} \prod_{\tau=0}^{t}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar d\tau}}\,dx(\tau)\;\; exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - v(x)\right)d\tau\right\} \dots(14)$$

Nous déduisons que :

$\prod_{\tau=0}^{t}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar d\tau}}\,dx(\tau)$ est une mesure formelle qui sera notée par $\mathcal{D}x$.

$\frac{m}{2}\dot{x}^2 - v(x)$ est le Lagrangien $L[\dot{x},x]$ du système, avec comme action

$$\frac{i}{\hbar}\int_0^t\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - v(x)\right)d\tau = \frac{i}{\hbar}\int_0^t L[\dot{x},x]\;d\tau = \frac{i}{\hbar}S[x]$$

En conséquence, la relation (14) devient

$$u(x,t;x_0,t_0) = \int_{\mathcal{T}(x_0,t_0;x,t)} \mathcal{D}x\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x]\right\} \ldots (15)$$

Ce qui se trouve être identique à l'expression du propagateur quantique de l'intégrale de chemin de Feynman. Celui-ci a été donc construit par une approche purement stochastique via le théorème de Feynman-Kac et l'intégrale de chemin de Wiener.

Nous reconnaissons que la fonction $u(x,t;x_0,t_0)$ (probabilité conditionnelle), qui représente la probabilité de transition $W(x,t|x_0,t_0)$ dans le cadre de la théorie des processus stochastique, satisfait à l'équation de Schrödinger (10) et aussi équivalente au propagateur quantique (15). Ceci implique que dans la théorie stochastique, la probabilité de transition $W(x,t|x_0,t_0)$ est l'analogue du propagateur dans la théorie quantique. Par ailleurs, notons que ces deux quantités satisfont à l'équation intégrale de Chapman-Kolmogorov, appelé équation ESKC [4,6]

$$\begin{cases} W(x_3,t_3|x_1,t_1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_3,t_3|x_2,t_2)W(x_2,t_2|x_1,t_1) \\ K(x_3,t_3|x_1,t_1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 K(x_3,t_3|x_2,t_2)K(x_2,t_2|x_1,t_1) \end{cases} \ldots (16)$$

Et que la probabilité de transition est liée à la densité de probabilité stochastique $w(x,t)$ par une relation à celle qui lie le propagateur quantique à la fonction d'onde correspondante

$$\begin{cases} w(x_j,t_j) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx_i\, w(x_i,t_i)\, W(x_j,t_j|x_i,t_i) \\ \psi(y,t_y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x,t_x)\, K(y,t_y|x,t_x) \end{cases} \ldots (17)$$

Ceci conduit à dire que dans la théorie quantique, la fonction d'onde est analogue de la densité de probabilité dans la théorie stochastique.

Enfin, nous remarquons à nouveau l'analogie avec le formalisme quantique si dans la mesure formelle $\mathcal{D}x$ obtenue par l'approche stochastique nous identifions la constante de proportionnalité imposée par Feynman pour la normalisation, ce qui peut se vérifier directement en remplaçant $d\tau$ par ε

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}} \ldots (18)$$

Il faut bien souligner que, contrairement au formalisme quantique, l'intégrale de chemin de Wiener donne naturellement naissance à cette constante et que l'analogie se prolonge de façon systématique en termes d'intégrale de chemin.

La déduction de cette constante s'ajoute alors à la liste des autres analogies connues présentées dans ce travail et confirme que l'intégrale de chemin et naturellement adaptée aux processus aléatoires et que la présentation du propagateur dans le contexte de ce formalisme est mieux définie et lui offre véritablement l'interprétation comme une densité de probabilité sur les chemins.

5- CONCLUSION

Les analogies trouvée dans le cadre mathématique entre ces deux théories motivent davantage à développer une théorie physique susceptible de décrire de manière cohérente et unifiée la théorie quantique et la théorie stochastique. Une telle théorie n'a pas été développée à l'heure actuelle, principalement en raison de l'impossibilité de trouver une description par des processus aléatoires des phénomènes quantiques, qui englobent un grand nombre de problèmes physiques. La plupart des difficultés rencontrées lors de cette unification proviennent des caractères radicalement différents des phénomènes décrits par ces deux théories.

REFERENCES

[1]- Bertrand Duplantier, "Le mouvement brownien 'divers et ondoyant' ", séminaire Poincaré 1, France, (2005), pp. 155-212.

[2] M.R. Von Smolan Smoluchowski, Rozprawy Krakow, A46, (1906), 257: Traduit Français, "Essai d'une théorie du mouvement brownien et de milieux troubles", Bull. International de l'académie des sciences de Cracovie, (1906), pp. 577-602.

[3] M.R. Von Smolan Smoluchowski, "Sur le chemin moyen parcouru par les molécules d'un gaz et sur son rapport avec la théorie de diffusion", Bull. International de l'académie des sciences de Cracovie, (1906), pp. 202-213.

[4] M. Chaichian and A. Demichev, "Path integrals in physics (stochastic processes and quantum mechanics)", vol.1, Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia, (2001).

[5] R. P. Feynman, "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", Rev. Modern Phys. vol 20, N°2, (1948), pp. 367-387.

[6] Philippe A. Martin, "Cours de physique statistique des processus irréversibles", Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse (2001-2004).

[7] M. Kac, "On distributions of certain Wiener functionals", Trans. Am. Math. Soc, Vol65 N°1, (1949), pp. 1-13.

[8] M. Kac, "On some connections between probability theory and differential and integral equations", Proc. 2nd

Berkley symp. On Math. Statist. and Prob, Univ. of. Calif. Press, (1951), pp. 189-215.

[9] F. Guerra, "Structural aspects of stochastic mechanics and stochastic field theory"; Phys. Rep, 77, (1981), pp. 263