CONTROLABILITE MAXIMALE D'UN SYSTEME PARABOLIQUE.

I. KAARER[1], A. AYADI[2]

1 Département de Mathématiques, Faculté de Sciences Exactes, Université des Frères Mentouri Constantine 1, Algerie
2 Département de Mathématiques, Faculté de Sciences Exactes, Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi, Algerie

Reçu le 20/09/2015 – Accepté le 21/04/2016

Résumé

L'objectif de ce travail est de chercher parmi tous les opérateurs bornés B celui qui donne une contrôlabilité maximale, au sens que l'image de l'opérateur $Hu = \int S(T-s)Bu(s)ds$ est maximale suivant la relation d'ordre d'inclusion dans l'espace d'états, où S est un semi-groupe défini sur l'espace d'état d'un système parabolique. La technique proposée dans cet article est basée sur la construction d'une relation d'ordre dans l'espace des classes d'opérateurs bornés à partir de la relation d'ordre d'inclusion et sur l'application du lemme de Zorn.

Mots clés : *Contrôlabilité, Théorie des systèmes, Théorie des graphes, Théorie des ensembles.*

Abstract

The aim of this work is to find, among all the bounded operators B, the one which gives a maximal controllability, in the sense that the operator image $Hu = \int S(T-s)Bu(s)ds$ is maximal in the state space following the inclusion order relation, where S is a semi-group defined on the state space of a parabolic system. In this paper, the proposed method is based on the construction of the order relation, in the space of classes of bounded operators, from the inclusion order relation and also on the application of Zorn's lemma.

Keywords : *Controllability, Systems Theory, Graph Theory, Set Theory.*

ملخص.

الهدف من هذا العمل هو البحث بين جميع المؤثرات المحدودة B التي تعطي أقصى مراقبة ، بمعنى أن صورة المؤثر $Hu = \int S(T-s)Bu(s)ds$ هو الحد الأقصى وفقا لعلاقة الترتيب الاحتوائية في فضاء الحالة للجملة المكافئة. الطريقة المقترحة في هذه المقالة تقوم على بناء علاقة ترتيب في فضاء أصناف المؤثرات المحدودة انطلاقا من علاقة الترتيب الاحتوائية وعن طريق تطبيق توطئة زورن.

الكلمات المفتاحية: القدرة على التحكم ، نظرية النظم ، نظرية الرسم البياني ، نظرية المجموعات.

Introduction :

L'étude d'un système dynamique a été intensivement étudiée et appliqué dans plusieurs domaines tels qu'écologie, immunologie, désertification, dynamique de population et pollution par Zerrik [2], El Jai [5] et d'autres. Le problème intéressant pour tel système concerne le choix d'un opérateur de contrôlabilité maximal. Le cas de la contrôlabilité d'un système distribué à partir d'un opérateur de contrôle défini sur un domaine géométrique Ω a été également développé (voir, Lions [3, 4] et les références associées), Ayadi [1] et Zerrik [2], El Jai [5]. Dans cet article, on cherche à mettre en évidence une technique théorique de choisir un opérateur de contrôle permettant de couvrir la plus grande partie de l'espace d'état. Pressement, on considère :

-Un ouvert borné et régulier $\boldsymbol{\Omega}$ de $\boldsymbol{IR^n, n \geq 1}$, de frontière $\boldsymbol{\Gamma = \partial\Omega}$.

- Un intervalle du temps $[0,T]$ on note $\boldsymbol{Q =]0,T[\times\Omega}$ et $\boldsymbol{\Sigma =]0,T[\times\partial\Omega}$.

- Un opérateur différentiel de second ordre $\boldsymbol{A}$ de résolvante compact et générateur d'un semi-groupe fortement continu $\boldsymbol{(S(t))_{t>0}}$ sur l'espace d'état $\boldsymbol{X = L^2(\Omega)}$.

- $\boldsymbol{A^*}$ désigne l'opérateur adjoint de $\boldsymbol{A}$.

Le système est décrit par:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + Ay(t,x) = Bu(t,x)\,, & (t\,,x) \in Q \\ y(0,x) = 0, & x \in \Omega \\ y(t,x) = 0, & (t,x) \in \Sigma. \end{cases} \quad (1)$$

Où

$$Bu \in L^2(Q); \quad (2)$$

Alors on a la solution faible

$$Y(t) = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad (3)$$

1- Construction de l'espace des opérateurs de contrôle :

Soit

$$H_B u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad (4)$$

L'opérateur H_B est linéaire borné sur l'espace de contrôles U (espace de Hilbert) à valeur dans l'espace d'état E. On désigne par F l'espace des opérateurs linéaires bornés B. On définit sur cet espace une relation d'équivalence $B_1 \mathcal{R} B_2$ si et seulement si $ImH_{B_1} = ImH_{B_2}$ où Im désigne l'image de l'opérateur.

1.1 Lemme :

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'espace des opérateurs F.

On définit une relation d'ordre sur l'espace quottions F/R par $B_1 \leq B_2$ si et seulement si l'image de $H_{B_1} \subset$ l'image de H_{B_2}.

Cette relation vérifie les hypothèses du lemme de Zorn.

1.2 Théorème :

L'espace des classes d'opérateurs contrôles possède une classe d'opérateurs maximale.

1.3 Démonstration :

Soit $V = B_{i\in I}$, une famille totalement ordonnée dans l'espace quotient et soit W l'union des images de tous les opérateurs H_B pour $B \in V$.

On définit un opérateur majorant B de sorte que l'image de H_B soit égale à W.

Soit $y \in W$ alors il existe au moins un $B_i$tel que $y \in H_{B_i}$ donc il existe un $u \in U$ tel que $H_{B_i}(u) = y$. On pose $H_B(u) = H_{B_i}(u)$, cette construction de B n'est pas unique, on prend tous les opérateurs B ayant la même image W, cette classe d'opérateurs est considérée comme un majorant de la famille. Par conséquence, toute partie totalement ordonnée est majorée. Par application du lemme de Zorn, il existe un élément maximal dans l'espace des classes d'opérateurs des contrôles.

2- Application :

Dans cette section on va présenter un exemple d'application de l'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y - \frac{\partial^2}{\partial t^2}y = Bu & ,(t,x) \in]0,1[\times]0,1[\\ y(0,x) = 0 & ,x \in]0,1[\\ y(t,0) = y(t,1) = 0 & ,t \in]0,1[\end{cases} \quad (5)$$

Les opérateurs compacts B ne sont pas maximaux dans l'espace d'état $L^2(0,1)$ car si B est compact, l'opérateur H_B est compact donc s'il est surjectif l'espace d'état est de dimension finie contradiction avec la dimension de l'espace d'état. Zerrik [2]

REFERENCES

[1] Ayadi A., Djebarni M. Pollution terms estimation in parabolic system with incomplete data, J. Math. Sci.(FJMS),Pushpa Publishing House, (2005) 16-17.

[2] Zerrik E. H. Analyse régionale des systèmes distribués Thèse, Univ. Mohammed V, Maroc, (1993).

[3] Lions J. L. Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes, Masson, RMA21, Paris, (1992).

[4] Lions J. L. Contrôlabilité exact, stabilisations et perturbations des systèmes distribués, Masson, Vol.1, Paris, (1988).

[5] El Jai A. et Pritchard A.J Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués.Masson RMA 3, Paris, (1986).

Mathematics Subject Classification: 93xx, 93Bxx, 35A08, 05Cxx, 03Exx.