

PRODUCTION D'ENTROPIE POUR UN ÉCOULEMENT DE COUCHE LIMITE.

Reçu le 04/03/2008 – Accepté le 1/06/2009

Résumé

Il s'agit d'un écoulement de couche limite laminaire à trois dimensions autour d'un dièdre plan à parois chauffées, on propose une formulation de la production d'entropie, et on détermine par voie numérique l'influence de certains paramètres dynamiques, thermiques et géométriques sur cette fonction. Le couplage des équations de la couche limite, de l'énergie et de la production d'entropie est résolu après avoir transformé le système d'équations différentielles en un système d'équations ordinaires [1]. La solution du problème est réalisée par l'élaboration d'un code de calcul utilisant l'algorithme de Runge-kutta d'ordre quatre, ainsi que la méthode du tir. Les champs dynamiques et thermiques obtenus sont en parfait accord avec la littérature [2].

Mots clés: Production d'entropie, couche limite, solutions auto-semblables.

Abstract

This analysis proposes a formulation of the entropy generation in a three-dimensional laminar boundary layer flow developing around heated walls of a wedge. We seek for which value angle parameter β corresponds to the minimum of entropy generation, and prove that this geometrical configuration corresponds to the optimal case from dynamic and thermal point of view. We have proved that the minimum of the entropy generation corresponds to the best heat transfer, and the weakest friction. The dynamic and thermal fields obtained are in perfect agreement with the literature.

Keywords: Entropy Production, boundary layer, self similarity solutions.

A.MAUGAL ⁽¹⁾
A. CHAKER ⁽¹⁾
M.E.H. CHIBAT ⁽²⁾

⁽¹⁾Laboratoire de Physique Energétique
⁽²⁾Département d'Analyse
Mathématique.
Université Mentouri Constantine,
Algérie

ملخص

. 0.7

β

$0 = \beta$

Ω/Br

الكلمات المفتاحية:

INTRODUCTION

Le concept de la minimisation de la production d'entropie introduit par A.Bejan [3], nous amène à déterminer des systèmes de plus en plus performants. La présente étude s'inscrit dans ce contexte. Comme exemple nous avons considéré un écoulement de couche limite laminaire à trois dimensions se développant autour d'un dièdre plan à parois chauffées. Nous avons examiné l'effet de certains paramètres tels que l'angle du dièdre, le nombre de Prandtl la fonction d'irréversibilité et l'écart de température entre les parois du dièdre et le fluide sur la production d'entropie.

Nomenclature

B_r	Nombre de Brinkmann
C	Constante arbitraire
C_p	Capacité calorifique ($\text{kJ.kg}^{-1}.$ K^{-1}).
E	Nombre d'Eckert
k	Conductivité thermique, ($\text{W}.$ $\text{m}^{-2}\text{K}^{-1}$).
m	Constante égale à $\frac{\beta}{2 - \beta}$
N_s	Nombre entropique
P_r	Nombre de Prandtl
u	Composante suivant la direction x , (m.s^{-1}).
U_∞	Vitesse en amont suivant la direction x , (m.s^{-1}).
v	Composante suivant la direction y , (m.s^{-1}).
w	Composante suivant la direction z , (m.s^{-1}).
W_∞	Vitesse en amont suivant la direction z , (m.s^{-1}).
x,y,z	Coordonnées, (m).
\bar{x}, \bar{y}	Coordonnées sans dimensions.
ΔT	écart de température, (K).

Symboles Grecs

β	Paramètre lié à l'angle du dièdre.
δ	Épaisseur de déplacement de la couche limite, (m).
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
θ	Température normalisée
ϕ	Fonction d'irréversibilité
$\psi(x, y)$	Fonction de courant
Ω	Écart de température normalisé.

FORMULATION MATHÉMATIQUE

Le système physique étudié est représenté sur la figure 1. Il s'agit de la projection sur le plan (x,y) d'un dièdre plan à angle au sommet variable dont les parois sont chauffées, et autour duquel se développe une couche limite à trois dimensions. Le paramètre β est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$.

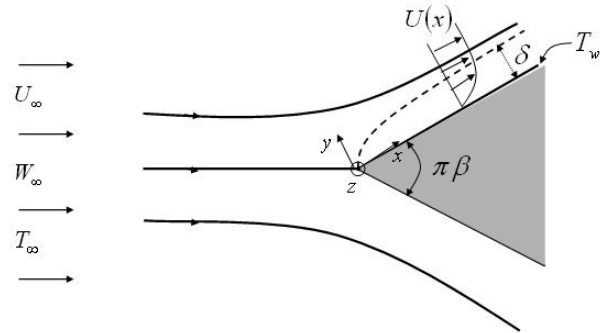


Fig1. Représentation schématique du système physique.

En appliquant les approximations de la couche limite sur les équations de Navier-Stokes, de l'énergie et de la génération de l'entropie, nous obtenons les équations suivantes avec les conditions aux limites appropriées.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

PRODUCTION D'ENTROPIE POUR UN ÉCOULEMENT DE COUCHE LIMITE.

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = W_\infty \frac{\partial W_\infty}{\partial x} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{P_r} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$y = 0; \quad u = v = w = 0; \quad T = T_w \quad (5)$$

$$y = \infty; \quad u = U_\infty; w = W_\infty; \quad T = T_\infty \quad (6)$$

Au voisinage de la pointe du dièdre la distribution des vitesses est de la forme:

$$U_\infty = C x^m; W_\infty \quad (7)$$

On introduit la fonction f dépendant de la variable η , et la fonction de courant $\psi(x, y)$, tel que:

$$\eta = y \sqrt{\frac{(m+1)U_\infty}{2\nu x}}; f(\eta) = \frac{\psi(x, y)}{U_\infty x} \sqrt{\frac{(m+1)U_\infty x}{2\nu}} \quad (8)$$

En les substituant dans l'équation (1) on obtient :

$$u = U_\infty f' \quad (9)$$

$$w = W_\infty g \quad (10)$$

$$v = -\sqrt{\frac{2\nu U_\infty}{(m+1)x}} \left(\frac{m+1}{2} f + \frac{m-1}{2} \eta f' \right) \quad (11)$$

Nous supposons que la température suit la distribution suivante :

$$T = T_\infty + \Delta T \cdot \theta_1(\eta) + \frac{U_\infty^2}{C_p} \theta_2(\eta) + \frac{W_\infty^2}{C_p} \theta_3(\eta) \quad (12)$$

Où $f, g, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont solutions du système d'équations ordinaires suivant :

$$f''' + ff'' + \beta(1-f'^2) = 0 \quad (13)$$

$$g'' + fg' = 0 \quad (14)$$

$$\theta_1'' + P_r f \theta_1' = 0 \quad (15)$$

$$\theta_2'' + P_r f \theta_2' - P_r f'^2 = 0 \quad (16)$$

$$\theta_3'' + P_r f \theta_3' + P_r g'^2 = 0 \quad (17)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\eta = 0; \quad f = f' = g = 0; \quad \theta_1 = 1, \theta_2 = \theta_3 = 0 \quad (18)$$

$$\eta = 1; \quad f' = g = 1; \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0 \quad (19)$$

EQUATION DE LA PRODUCTION D'ENTROPIE

L'écriture de la seconde loi de la thermodynamique pour un système passant d'un état (1) à un état (2) s'écrit :

$$s_2 - s_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad (20)$$

Le premier terme représente la variation d'entropie, le second représente le transfert d'entropie. On définit alors la production d'entropie :

$$s_{gen} = s_2 - s_1 - \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \geq 0 \quad (21)$$

Dans notre cas elle a pour expression :

$$\dot{s}_{gen} = \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{\mu}{T} \Phi \quad (22)$$

En appliquant les approximations de la couche limite on obtient :

$$\dot{s}_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (23)$$

Le premier et le deuxième terme représentent respectivement les pertes par transfert thermique et par frottement. L'expression (23) est normalisée comme suit :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}; \quad \Delta T = T_w - T_\infty; \quad (24)$$

$$\Omega = \frac{\Delta T}{T_\infty}; \quad B_r = P_r E; \quad \Phi = \frac{B_r}{\Omega}$$

Φ étant la fonction d'irréversibilité définie par [4]:

$$\Phi = \frac{\text{production d'entropie causée par le transfert thermique}}{\text{production d'entropie causée par le frottement}}$$

En divisant par ΔT on obtient la température normalisée :

$$\theta(\eta) = \theta_1(\eta) + E_1 \theta_2(\eta) + E_2 \theta_3(\eta) \quad (25)$$

E_1 et E_2 sont les deux nombres d'Eckert définis à partir de l'équation (13). L'équation de la production d'entropie devient :

$$\dot{s}_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[(\Delta T \cdot \theta')^2 \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + \quad (26)$$

$$\frac{\mu}{T} \left[U_\infty^2 f'^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + W_\infty^2 g'^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]$$

En posant $Q = \frac{W_\infty}{U_\infty}$ et sachant que $\delta \ll L$ ce qui est

équivalent à $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \ll \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$ on obtient :

$$\dot{s}_{gen} = \frac{k}{T^2} (\Delta T \cdot \theta')^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{T} U_\infty^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 (f'^2 + Q^2 g'^2) \quad (27)$$

En divisant (27) par $k\Omega^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2$ on obtient:

$$\frac{\dot{s}_{gen}}{k\Omega^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2} = \frac{\dot{s}_{gen}}{k\Omega^2 \frac{2\nu x}{(m+1)U_\infty}} \quad \text{qui n'est autre que le}$$

nombre entropique, d'où la formule :

$$N_s = \left(\frac{\theta'}{1 + \Omega \theta} \right)^2 + \frac{\Phi}{1 + \Omega \theta} (f'^2 + Q^2 g'^2) \quad (28)$$

La visualisation de cette fonction fait appel au système d'équations (13-17), résolu par l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre ainsi que la méthode du tir, permettant le passage du problème aux conditions aux

limites (BVP), en un problème aux conditions initiales (IVP), citées dans le tableau suivant :

$Pr = 0.7$

β	$\theta'_1(0)$	$\theta'_2(0)$	$\theta'_3(0)$	$f''(0)$	$g'(0)$
0.0	-0.414	0.1729	0.1729	0.4696	0.4696
0.2	-0.444	0.2157	0.1867	0.6867	0.5068
0.4	-0.463	0.2527	0.1953	0.8544	0.5300
0.6	-0.476	0.2851	0.2016	0.9457	0.5436
0.8	-0.489	0.3146	0.2065	1.1202	0.5598
1.0	-0.495	0.3427	0.2103	1.2325	0.5704

RÉSULTAS ET DISCUSSION

Les figures 1a, 1b et 1c représentent respectivement les champs dynamique et thermique de l'écoulement. La figure 1a est la solution de l'équation (13) dite de Falkner-Skan [5], f' étant proportionnelle à la vitesse u augmente avec β , le dièdre provoque une accélération de l'écoulement.

Idem pour la figure 1b.

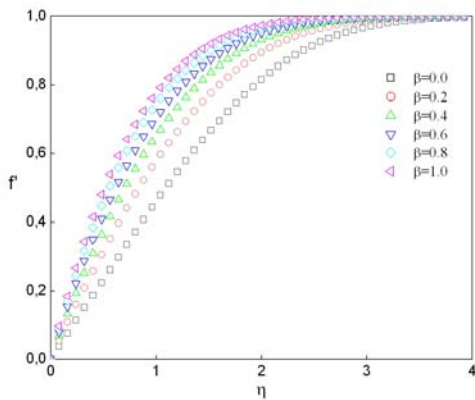


Fig 1a: Effet du paramètre β sur le profil de f' .

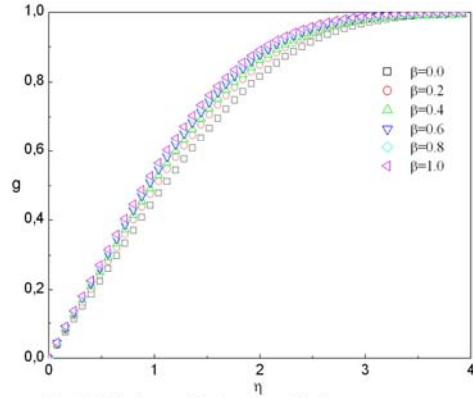


Fig 1b: Effet du paramètre β sur le profil de g .

On remarque sur la figure 1c que pour $\beta = 0$ celui de la plaque plane, le transfert thermique entre le fluide et les parois solides est optimale.

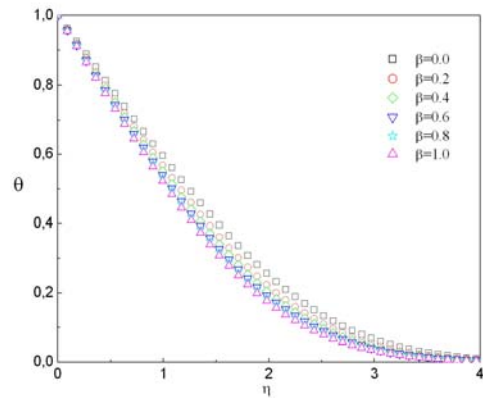


Fig 1c: Effet du paramètre β sur la température .

Sur la deuxième figure le paramètre β influe sur le nombre entropique qui est minimal pour la valeur de $\beta = 0$.

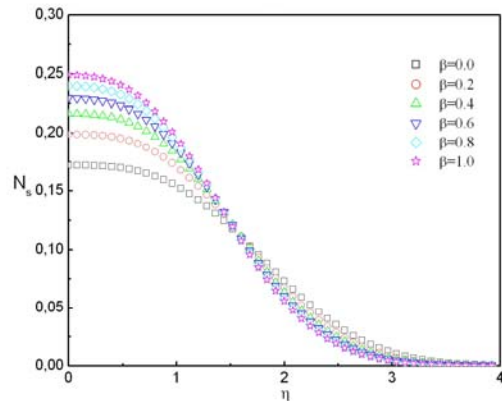


Fig 2: Production d'entropie normalisée en fonction de η pour différentes valeurs de β .

PRODUCTION D'ENTROPIE POUR UN ÉCOULEMENT DE COUCHE LIMITE.

Les variations du nombre entropique pour plusieurs fluides sont représentées sur la figure 3, pour $\eta \leq 1$ la production d'entropie augmente avec P_r , notons que η correspond à la distance y perpendiculaire à la plaque normalisée par une longueur construite avec la variable x [6], à partir de la valeur 1.7 il y a un renversement, N_s diminue avec le nombre de Prandtl.

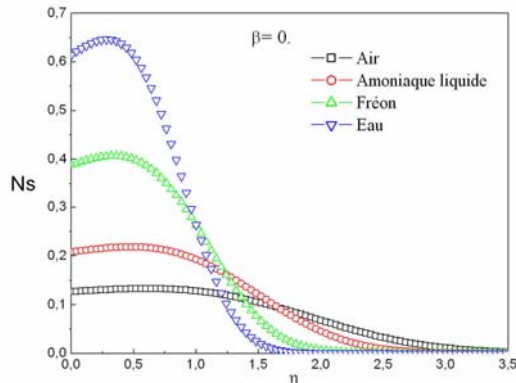


Fig 3: Production d'entropie pour des fluides différents.

Comme il est clair sur la quatrième figure, la production d'entropie ne fait qu'augmenter avec tout phénomène irréversible, traduit ici par la fonction d'irréversibilité définie plus haut.

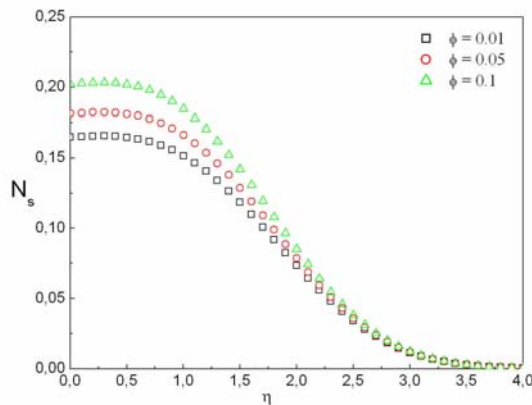


Fig 4 : Production d'entropie et fonction d'irréversibilité.

La figure cinq semble être paradoxale, du fait qu'en augmentant l'écart de température entre les parois solides et le fluide, la production d'entropie diminue. Justement c'est l'un des principaux résultats de notre étude qui confirme que la minimisation de la production d'entropie correspond au meilleur rendement thermique, qui est

d'autant meilleur pour un écart de température aussi grand que possible.

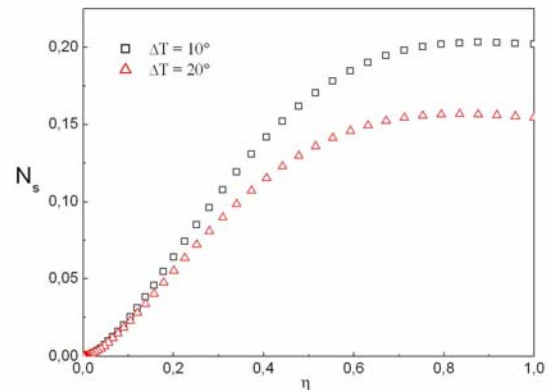


Fig 5 : Variation de la production d'entropie avec l'écart de température entre la paroi du dièdre et le fluide.

CONCLUSIONS

La génération de l'entropie est une mesure de l'irréversibilité. Cette méthode permet l'optimisation de vrais systèmes et pourrait être convenue pour des applications spécifiques. Dans l'étude que nous présentons, nous avons analysé l'effet que peut avoir un paramètre géométrique, l'angle d'écartement d'un dièdre plan à parois chauffées, un paramètre dynamique traduit par le nombre de Prandtl, et un paramètre thermique, l'écart de température entre les plaques chauffées du dièdre et le fluide sur l'entropie produite pour un écoulement de couche limite. Nous avons abouti aux conclusions suivantes: pour conserver au mieux l'énergie dans un processus d'écoulement de fluide, nous devons réduire au maximum l'entropie produite, le cas où $\beta = 0$, cas de d'une plaque placée parallèlement aux lignes de courants d'un écoulement représente le cas optimal du point de vue dynamique (*vitesse minimale*), et thermique (*meilleur transfert de la chaleur*). Ce qui est en accord avec la méthode (E-G-M), [7] (*Entropy Generation Minimization*).

REFERENCES

- [1] David O, *Aself similar solution for forced convection boundary layer flow of FENE-P fluid*, Departement of Mathematical Science. University of Delawere, 19716, USA, Applied Mthematics Letters (2006).
- [2] Hermann-Schlichting“*Boundary-Layer Theory*”Mac graw Hill Séptième edition (1978).
- [3] A.Bejan,“*AdvancedEngineering Thermodynamics*”,2nd Ed., John Wiley, USA, (1997).
- [4] A.Bejan, “*Entropy Generation Through Heat And Fluid Flow*”, John Wiley, USA, (1982).
- [5] V.M, Falkner and S.W, Skan“*Some approximate solutions of the boundary layer equations*” Phil.Mag.12,865-896(1931).
- [6] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit “*Hydrodynamique Physique*” EDP Sciences/CNRS Editions (2001).
- [7] Peter Salamon ; Karl heinz Hoffman ; Sven Shubert ; R.Stephen Berry and Bjarne Andresen. “*What conditions make minimum entropy production equivalent to maximum*” (2005).