PERTURBATION SINGULIÈRE DANS UN PROBLÈME D'ÉVOLUTION NON CLASSIQUE

Reçu le 05/01/2003 – Accepté le 03/03/2008

Résumé

Dans ce travail, l'étude porte sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique de la solution d'un problème d'évolution qui régit les petits mouvements réels d'un système élastique constitué de deux milieux de dimension n et (n+1) en interaction. On suppose que l'inertie ε du milieu de dimension (n+1) est négligeable par rapport à celle du milieu de dimension n et l'on cherche alors un développement asymptotique du mouvement lorsque ε→0.
Mots clés : Modélisation, le principe de moindre action de Hamilton, perturbations singulières, développement asymptotique.

Abstract

In this work, the study is about existence, uniqueness and asmyptotic development of the solution of an evolution problem that governs real small movements of an elastc system made of two interacting parts of dimensions nand (n+1).We assume that the inerty ε of the part with dimension (n+1) negligible relatively to the part with dimension n, and so, we search for an asymptotic development of the movement when ε →0.
Keywords: Modeling, Hamilton's leas actions principe, singular perturbations, asymptotic development.

AMS Subject Classifcation : 35B25-34E10-47Axx

A.MOUMENI

Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Université d'Annaba
Algérie

ملخص

: في هدا العمل ندرس وجود و وحدانية و النشر المقارب لحل معادلة تطورية كنموذج لاهتزازات جسم مركب من وسطين ذا بعد n و$(n+1)$ في تفاعل. نفرض أن ε عطالة الوسط ذا بعد $(n+1)$ مهملة بالنسبة لعطالة الوسط بعد n و نبحث على نشر مقارب للحركة عندما $\varepsilon \to 0$.
الكلمات المفتاحية: النمذجة، مبدأ أقل فعل لهاملتون، اضطرابات شاذة، النشر المقارب.

1-Orientation:

La motivation de ce travail est une contribution à l'étude du comportement asymptotique, lorsque $\varepsilon>0$ tend vers zéro, de la solution d'un problème d'évolution non classique qui entre dans la catégorie des problèmes dits: "Problèmes de perturbations singulières" avec des conditions aux limites non usuelles. Ce problème est du type:

$$(P_f)\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in U_{ad}^c \text{ telle que:} \\ \dfrac{d^2}{dt^2} J_\varepsilon^* J_\varepsilon u_\varepsilon(t) + u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon^* f(t); \quad f \in H \\ u_\varepsilon(0) = u_0, \quad \text{dans } V \\ \overline{J_\varepsilon u_\varepsilon}(0) = u_1 \end{cases}$$

Où H et V sont deux espaces de Hilbert, $J_\varepsilon \in \mathcal{L}(V;H)$, J_ε^* l'adjoint de J_ε et U_{ad}^c est l'espace des fonctions cinématiquement admissibles qui sera bien défini plus loin. Les points désigneront les dérivées par rapport à t. Ce problème régit les petites oscillations d'un système élastique constitué de deux milieux, de dimension n et (n+1) en interaction. Dans un tel cadre, le problème qui retiendra notre attention est la perturbation générée par le milieu de dimension (n+1) qui occupe la configuration Ω sur le milieu de dimension n occupant la configuration Γ_1, où Γ_1 est une partie de la frontière naturelle de Ω. Autrement dit, on suppose que l'inertie ε du milieu de dimension (n+1) est négligeable par rapport à celle du milieu de dimension n et l'on cherche alors un développement asymptotique du mouvement lorsque $\varepsilon \to 0$.

Le plan de ce travail est le suivant: Dans le paragraphe (1.1), on modélise le système élastique " membrane-tige", ce qui explique les origines physiques du problème non-classique (P_f). Dans la section (2) on montre l'existence et l'unicité de la solution u_ε de (P_f). Le comportement asymptotique de u_ε, lorsque $\varepsilon \to 0$, est donné dans la section (3). L'originalité de ce travail, par rapport aux problèmes classiques, lorsque $\varepsilon \to 0$, réside dans le fait que l'on ne récupère pas le mouvement classique du milieu de dimension (n+1). C'est -à-dire, pour le problème "membrane-tige" (n=2), lorsque l'inertie ε de la membrane tend vers zéro on ne récupère pas le mouvement classique d'une corde vibrante. A notre connaissance, il n'existe pas de résultats de ce type.

1.1 Origine physique du problème. Modélisation:

Considérons un système constitué d'une membrane (feuillet mince élastique) $\Omega=]0,\pi[^2$, de densité superficielle ε et de coefficient d'élasticité α, fixée sur trois de ses côtés, le quatrième côté $\Gamma_1=\{(x,\pi)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<\pi\}$ étant solidaire d'une tige élastique de densité linéaire ρ et de coefficient d'élasticité β. Soit Γ_0 la partie fixe de $\partial\Omega$, c'est-à-dire: $\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_1$ et $\Gamma_0\cap\Gamma_1=\phi$, ($\phi$: l'ensemble vide).

On suppose que le système en mouvement n'est soumis à aucune force extérieure et que dans tout état admissible la membrane est une surface dans l'espace (x,y,u), qui a une projection unique sur le domaine Ω du plan xoy et se définit par l'équation $u=u(t,x,y)$ pour $(x,y)\in\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega}$ l'adhérence) et $t\in[0,T]$, et que les vibrations du système sont transversales. Une approximation convenable des énergies, cinétique $E(u,t)$ et potentielle $W(u,t)$, du système mécanique "membrane-tige" est donnée par :

$$E(u,t)=\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdy + \frac{\rho}{2}\int_{\Gamma^1}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$W(u,t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\alpha\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} + qu^2\right\}dxdy + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\left\{\beta\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2+q_1\tilde{u}^2\right\}dx$$

Où q et q_1 sont deux fonctions positives "assez régulières", dues à la réaction du milieu élastique, $\tilde{u}$ désigne la restriction de u à Γ_1. Alors d'après, le principe de moindre action de Hamilton, les mouvements réels du système mécanique coïncident avec les extrémales de:

$$\mathcal{H}(u)=\int_0^T\{E(u,t)-W(u,t)\}\,dt$$

L'intégrale étant interprétée comme celle de "l'action" entre 0 et T.

1.1.1 Choix des espaces:

La partie fixe de la membrane suggère le premier choix:

$$V=\{u ; u\in H^1(\Omega), \tilde{u}\in H_0^1(\Gamma_1) \text{ et } u/_{\Gamma_1}=0\}$$

V muni du produit scalaire:

$$< u,v >= \int_\Omega \left\{\propto (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{y} + quv\right\} dxdy + \int_{\Gamma_1} \left\{\beta(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + q_1 \tilde{u}\tilde{v}\right\} dx$$

est un espace de Hilbert.

Le deuxième choix sera fait pour donner un sens aux énergies cinétique et potentielle.
Soit

$$I: V \to H_0 := L^2(\Omega) \text{ et } J: V \to H_1 := L^2(\Gamma_1)$$

Pour tout ε>0,

on pose

$$J_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}\, I \\ \sqrt{\rho}\, J \end{pmatrix} : V \to H = H_0 \times H_1$$

Les fonctions "cinématiquement admissibles" seront alors les éléments de l'espace U_{ad}^c défini par:

$$u \epsilon U_{ad}^c \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ u: \mathbb{R} \to V \text{ faiblement continue} \\ (ii)\ J_\varepsilon u: \mathbb{R} \to H \text{ faiblement continûment dérivable} \end{cases}$$

Le principe de moindre action de Hamilton permet alors de ramener le problème des petits mouvements réels à la recherche des solutions du système:

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in U_{ad}^c \\ \int_0^T < \overline{J_\varepsilon \dot{u}_\varepsilon}(t), \overline{J_\varepsilon \dot{v}} >_H = \int_0^T < u_\varepsilon(t), v(t) >_V dt \\ \forall v \epsilon U_{ad}^c \quad \text{et} \quad v(0) = v(t) = 0 \end{cases}$$

(Les points désigneront les dérivées par rapport à t).
Quant aux conditions initiales elles sont du type:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(0) = u_0 \quad dans\ V \\ \overline{J_\varepsilon \dot{u}_\varepsilon}(0) = u_1 := (\sqrt{\varepsilon}\varphi_0, \varphi_1)\ dans\ \ H \end{cases}$$

Cette dernière condition signifie que l'on doit se donner à l'instant initial, à la fois la répartition des vitesses du milieu qui occupe la configuration Ω et celle du milieu qui occupe la configuration Γ_1

Remarque1.1:

On n'a pas nécessairement $\varphi_1 = \sqrt{\varepsilon}\varphi_0/_{\Gamma_1}$, car les dérivées sont prises respectivement à valeurs dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_1)$.

1.2 Cadre mathématique général:

Lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi$, variété "assez régulière" de point générique $(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, on prend comme produit scalaire sur V

$$< u,v >_V = \int_\Omega \{a(u,v) + quv\}\, dx dx_{n+1} + \int_{\Gamma_1} \{b(\tilde{u},\tilde{v}) + q_0 \tilde{u}\tilde{v}\}\, d\sigma$$

où

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \text{ et}$$
$$b(Y,Z) = \Phi \sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} \frac{\partial Y}{\partial \xi_k}\frac{\partial Z}{\partial \xi_l}$$

et Φ une fonction globale sur Γ_1, $\xi_1, \dots, \xi_n$ est un système de coordonnées locales sur Γ_1, g^{lk} la matrice inverse de g_{lk}, tel que $\sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} d\xi_k d\xi_l$ est un 2-tenseur contravariant symétrique global sur Γ_1 (G.DeRham[8]).

1.3 Cadre mathématique abstrait:

On se donne

- Trois espaces de Hilbert V, H_0, H_1 dont on note respectivement

$\|.\|_V$, $\|.\|_{H_0}$, $\|.\|_{H_1}$ les normes et $< , >_V$, $< , >_{H_0}$, $< , >_{H_1}$ les produits scalaires

- Deux opérateurs $I \in \mathcal{L}(V; H_0)$ et $J \in \mathcal{L}(V; H_1)$ tels que :

$$\overline{J(V)} = H_1, \qquad KerI = \{0\}$$
$$\overline{I(V_0)} = H_0, \text{ où } V_0 = KerJ$$

Pour tout ε>0, on pose:

$$J_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}\, I \\ J \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(V; H := H_0 \times H_1)$$

Il s'agit alors de déterminer $u_\varepsilon \in U_{ad}^c$ telle que

$$\mathcal{H}(u_\varepsilon) = \int_0^T \left\{ \left\| \overline{J_\varepsilon \dot{u}_\varepsilon}(t) \right\|_H^2 \right\} dt - \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|_V^2$$

soit extrémale parmi toutes les fonctions $v \in U_{ad}^c$ telles que $v(0) = u_\varepsilon(0)$ et $v(T) = u_\varepsilon(T)$ (la première intégrale correspond à l'énergie cinétique, la deuxième à l'énergie potentielle). On a besoin pour la suite de considérer une forme plus générale de $\mathcal{H}(u_\varepsilon)$, en lui retranchant un terme du type

$$\int_0^T < f(t), J_\varepsilon u_\varepsilon(t) >_H dt, \qquad \forall f \in L^1(0,T;H)$$

des considérations simples montrent alors (J.Chazarain; A.Piriou [5]) que tout ceci équivaut au système

$$(P_f)\begin{cases} u_\varepsilon \in U_{ad}^\varepsilon \\ \dfrac{d^2}{dt^2} J_\varepsilon^* J_\varepsilon u_\varepsilon(t) + u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon^* f(t) \\ u_\varepsilon(0) = u_0\,, \quad dans\ V \\ \overline{J_\varepsilon u_\varepsilon}(0) = u_1, \quad dans\ H \end{cases}$$

2 Existence et unicité de la solution:

Avant de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système (P_f) nous démontrons les résultats suivants:
Soit ***H*** un espace de Hilbert, **A** un opérateur auto-adjoint, borné et injectif dans ***H***. On considère l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} Ax(\mathrm{t}) = ix(\mathrm{t}) + Af(t), \qquad f \in L^1(\boldsymbol{H})$$

Cette équation différentielle est entendue au sens faible, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x:\mathbb{R} \to \boldsymbol{H} \text{ faiblement continue} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t), y)_H \varphi'(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (ix(t) + Af(t), y)_H dt = 0 \\ \forall y \in \boldsymbol{H}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Lemme2.1:

Pour tout $x_0 \in \boldsymbol{H}$ et pour tout $f \in L^1_{Loc}(\boldsymbol{H})$, le système

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} Ax(\mathrm{t}) = ix(\mathrm{t}) + Af(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

possède une solution unique donnée par

$$x(t) = exp\,(itA^{-1})\left\{x_0 + \int_0^t \exp(-itA^{-1}) f(t)ds\right\}$$

On a

$$\begin{cases} x \in \mathrm{C}(\mathbb{R}; \boldsymbol{H}) \\ \|x(t)\|_H \le \|x_0\|_H + \int_0^t \|f(t)\|_H \end{cases}$$

Preuve:

Soit R(A) l'image de ***H*** par ***A*** et D(A) le domaine de ***A*** alors $(-iA^{-1}, R(A))$ (R.Dautry, J.L.Lions [7]), est le générateur infinitésimal du semi-groupe

$G_t = \exp\,(-itA^{-1})$
$t \to G_t$ est fortement continue dans l'ensemble des opérateurs unitaires dans ***H***. Pour tout $x \in R(\boldsymbol{H})$, on a

$$G_t x \in R(A), \quad G_t A^{-1} x = A^{-1} x G_t, \quad \dot{G}_t x = -iG_t A^{-1} x$$

Soit maintenant $x(t) \in$ D(A), donc $Ax(t) \in$ R(A), on a alors
$Ay(t) = \exp(-itA^{-1}) x(t) \in R(A)$

On remarque alors que le système (2.1) équivaut à

$$\frac{d}{dt} Ay(t) = \exp(-itA^{-1}) Af(t) = A\exp(-itA^{-1}) f(t)$$

d'où le lemme.

Soit maintenant ***V*** et ***H*** deux espaces de Hilbert, $J \in \mathcal{L}(V,H)$, ker$J$={0} et $\overline{J(V)} = \boldsymbol{H}$.

Théorème2.1:

Soit $u_0 \in V$, $u_1 \in \boldsymbol{H}$, $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}; \boldsymbol{H})$. Alors le système

$$\begin{cases} u:\mathbb{R} \to V \textit{ faiblement continue} \\ Ju:\mathbb{R} \to H \textit{ faiblement continument dérivables} \\ \dfrac{d^2}{dt^2} J^* Ju(t) + u(t) = J^* f(t) \\ u(0) = u_0 \\ \overline{Ju}(0) = u_1 \end{cases} \qquad (2.2)$$

possède une solution unique et on a

$$\left\{\left\|\overline{Ju}(t)\right\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le \{\|u_1\|_H^2 + \|u_0\|_V^2\}^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f(s)\|_H\, ds$$

(avec l'égalité lorsque f=0). De plus

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}; V) \\ \overline{Ju}(0) = u_1 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Preuve:

On pose

$$x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \overline{Ju}(t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -iJ^* \\ iJ & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

le système (2,2) équivaut à

$$\begin{cases} u: \mathbb{R} \to V \times H \text{ faiblement continue} \\ \dfrac{d}{dt} Bx(t) = ix(t) + BF(t) \\ x(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

d'où le théorème (cf:Lemme2.1).
Nous sommes maintenant en mesure de répondre au

problème (P_f).

Théorème2.2:

Pour tout $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}; H_0 \times H_1)$, le système (P_f) possède une solution unique u_ε elle que :

$$\left\{\varepsilon \left\|\overline{I_\varepsilon u_\varepsilon}(t)\right\|^2_{H_0} + \left\|\overline{Ju_\varepsilon}(t)\right\|^2_{H_1} + \|u_\varepsilon(t)\|^2_V\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \{\varepsilon\|\varphi_0\|^2_{H_0} + \|\varphi_1\|^2_{H_1} + \|u_0\|^2_V\}^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \{\|f_0(s)\|^2_{H_0} + \|f_1(s)\|^2_{H_1}\}^{\frac{1}{2}} ds$$

(avec l'égalité lorsque $f_0=f_1=0$. "Conservation de l'énergie"). De plus:

$$u_\varepsilon \in C(\mathbb{R}; V) \quad et \quad \overline{Ju_\varepsilon}' \in C((\mathbb{R}; H)$$

Preuve:

D'après le théorème précédent, il suffit de démontrer que J_ε est à image dense. En effet:

Si

$(x_0, x_1) \in H_0 \times H_1 \quad et \quad (J_\varepsilon v, (x_0, x_1))_H = 0, \quad \forall v \in V$

on a en particulier

$(Iv_0, x_0)_{H_0}$, $\forall v_0 \in V_0$ donc $x_0=0$

(puisque $\overline{I(V_0)} = H_0$)

et par suite

$(Jv, v)_{H_1} = 0, \forall v \in V$ donc $x_1=0$

(puisque $\overline{J(V)} = H_1$)

3 Comportement asymptotique de $u_\varepsilon$de (P_0):

Voici deux lemmes qui nous seront utiles pour l'étude du comportement asymptotique de u_ε.

Lemme3.1:

L'orthogonale V_1 de V_0 ($V_0 = H^1_0(\Omega)$) dans V est l'ensemble des $u \in V$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles:

$$Au + qu = 0, \quad dans\ \mathcal{D}(\Omega)$$

Où

$$Au = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial}(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j})$$

Preuve:

Un élément $u \in V$ est orthogonal à V_0 si, et seulement si, u est orthogonal à $\mathcal{D}(\Omega)$ (à cause de la densité de V_0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$), or pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout $u \in V$ on a:

$$(u, v)_V = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega \{a(u, v) + quv\} dx dx_{n+1}\} = \langle Au + qu, v \rangle = 0$$

où le crochet désigne la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$, d'où le résultat.

Lemme3.2:

Soit $W := H^{\frac{1}{2}}_0(\Gamma_1)$. Il existe deux opérateurs $D \in \mathcal{L}(W; V_1)$ et $T \equiv \mathcal{L}(H_1; H_0)$ avec T compact tels que:

$$\begin{cases} \widetilde{Dw} = w, \quad \forall w \in W \\ I_1 D = TP \end{cases}$$

où $I_1 := I/_{\Gamma_1}$ et P l'injection canonique de W dans H_1. En d'autres termes D est l'inverse de l'application $u \to \tilde{u}$ restreinte à V_1, et D se prolonge en une application T continue compacte de H_1 dans H_0

Preuve:

Si $u \in V_1$ on a

$$\begin{cases} Au + qu = 0 \\ \tilde{u} \in W \end{cases}$$

Puisque le système ci-dessus admet une solution $u \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, alors pour tout $w \in W$ il existe un opérateur $D \in \mathcal{L}(W; V_1)$ tel que $Dw = u$ et comme l'injection de $H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ dans H_0 est continue et compacte, alors (à cause de la densité de W dans H_1) D se prolonge en un opérateur continu compact de H_1 dans H.

3.1 Description de l'espace U^c_{ad} :

On sait maintenant (lemme3.2), que tout élément de V peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$u(t) = u_0(t) + Dw(t) \in V_0 \oplus V_1$$

tout d'abord $u \in L^2(0, T; V)$, les projections orthogonales de $u(t)$ sur V_0 et V_1 ; soit $u_0(t)$ et $u_1(t)$; appartiennent à $L^2(0, T; V_0)$ et $L^2(0, T; V_1)$ respectivement.

On a

$$u_1(t) = Dw(t) \text{ avec } w(t) = D^{-1}u_1(t) = \tilde{u}(t)$$

donc $w \in L^2(0, T; W)$, d'autre part Iu doit appartenir à $L^2(0, T; H_0)$ et Ju doit appartenir à

$L^2(0,T;H_1)$, de ce dernier rèsultat il s'ensuit que $Pw \in L^2(0,T;H_1)$, mais alors $TPw \in L^2(0,T;H_0)$, c'est-à-dire $I_1Dw \in L^2(0,T;H_0)$

et comme $Iu = I_0u_0 + I_1u_1 \in L^2(0,T;H_0)$, on en déduit que $I_0u_0 \in L^2(0,T;H_0)$.

En définitive les éléments cinématiquement admissibles sont du type:

$$\begin{cases} u(t) = u^0(t) + Dw(t) \\ u_0 \in L^2(0,T;V_0);\ \overline{I_0u_0} \in L^2(0,T;H_0) \\ w \in L^2(0,T;W);\ \ PW \in L^2(0,T;H_1) \end{cases}$$

3.2 Interprétation "Des problèmes limites":

Posons

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}\, I_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \text{ où } \quad I_0 \coloneqq I/_{V_0} \text{ et } J_1 \coloneqq J/_{V_1}$$

alors

$$A_\varepsilon \in \mathcal{L}(V;H),\ \ Ker A_\varepsilon = \{0\},\qquad \overline{A_\varepsilon(V)} = H$$

Soit ψ^ε la solution du système

$$\begin{cases} \psi^\varepsilon \in U_{ad}^c \\ \dfrac{d^2}{dt^2}A_\varepsilon^* A_\varepsilon \psi^\varepsilon(t) + \psi^\varepsilon = 0 \\ \psi^\varepsilon(0) = u_0,\ \ u_0 = u_0^0 + u_0^1 \in V_0 \oplus V_1 \\ \overline{A_\varepsilon \psi^\varepsilon}(0) = (0, \varphi_1),\ \ \varphi_1 \in H_1 \end{cases}$$

(3.1)

si $\psi_0^\varepsilon(t)$ et $\psi_1^\varepsilon(t)$ sont les projections orthogonales de $\psi^\varepsilon(t)$ sur V_0 et V_1 respectivement, le système ci-dessus équivaut à

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{d^2}{dt^2} I_0^* I_0 \psi_0^\varepsilon(t) + \psi_0^\varepsilon(t) = 0, & \psi_0^\varepsilon(0) = u_0^0, & \overline{I_0\psi_0^\varepsilon}(0) = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} J_1^* J_1 \psi_1(t) + \psi_1(t) = 0 & \psi_1(0) = u_0^1, & \overline{J_1\psi_1}(0) = \varphi_1 \end{cases}$$

si φ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} I_0^* I_0 \varphi(t) + \varphi(t) = 0 \\ \varphi(0) = u_0^0, \qquad \overline{I_0\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

On a

$$\psi_0^\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \text{ de sorte que } \psi^\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \psi_1(t)$$

Le théorème (2.2) prouve que

$$\begin{cases} \left\|\overline{I_0\varphi}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\|_{H_0}^2 + \left\|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\|_{V_0}^2 = \|u_0^0\|_{V_0}^2 \\ \left\|\overline{J_1\psi_1}(t)\right\|_{H_1}^2 + \|\psi_1(t)\|_{V_1}^2 = \|\varphi_1\|_{H_1}^2 + \|u_0^1\|_{V_1}^2 \end{cases}$$

(3.2)

et

$$\begin{cases} \varphi \in C(\mathbb{R};V_0),\ \overline{I_0\varphi} \in C(\mathbb{R};H_0) \\ \psi_1 \in C(\mathbb{R};V_1),\ \ \overline{J_1\psi_1}(t) \in C(\mathbb{R};H_1) \end{cases}$$

(3.3)

par conséquent

$$\begin{cases} \psi^\varepsilon \in C(\mathbb{R};V),\ \ \overline{A_\varepsilon\varphi} \in C(\mathbb{R};H) \\ \left\|\overline{A_\varepsilon\psi^\varepsilon}(t)\right\|_H^2 + \|\psi^\varepsilon(t)\|_V^2 = \|\varphi_1\|_{H_1}^2 + \|u_0\|_V^2 \end{cases}$$

(3.4)

3.3 Comportement asymptotique :

Posons

$$R_\varepsilon = u_\varepsilon + \psi^\varepsilon \ \ et \ \ C = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} : H_0 \times H_1 \to H_0 \times H_1$$

on a alors

Proposition3.1:

R_ε est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\{A_\varepsilon^* A_\varepsilon R_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} J_\varepsilon^* C A_\varepsilon \psi^\varepsilon\} + R_\varepsilon = 0 \\ R_\varepsilon(0) = 0 \\ \overline{J_\varepsilon R_\varepsilon}(0) = \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} \varphi_0 - T\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Preuve:

Puisque $I_1 = TJ_1$, on a alors

$$J_\varepsilon^* J_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon I_0^* I_0 & 0 \\ 0 & J_1^* J_1 \end{pmatrix} + \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}\, I_0^* & 0 \\ \sqrt{\varepsilon}\, I_1^* & J_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ \varepsilon I_0^* I_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}\, I_0^* & 0 \\ 0 & J_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}\, I_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} + \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}\, I_0^* & 0 \\ \sqrt{\varepsilon}\, I_1^* & J_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}\, I_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$J_\varepsilon^* J_\varepsilon = A_\varepsilon^* A_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} J_\varepsilon^* C A_\varepsilon$$

ce qui prouve la proposition, compte-tenu de (3.1) et (P_0).

Lemme3.3:

Il existe une constante K indépendante de ε telle que

$$\|J_\varepsilon R_\varepsilon(t)\|_H \le \sqrt{\varepsilon}K$$

Preuve:

Puisque $\overline{\dot{A}_\varepsilon\psi^\varepsilon}$ et $\overline{\dot{J}_\varepsilon R_\varepsilon}$ existent, la première équation de la proposition(3.1) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}0 & -J_\varepsilon^* \\ J_\varepsilon & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_\varepsilon \\ \overline{\dot{J}_\varepsilon R_\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\,\overline{C\dot{A}_\varepsilon\psi^\varepsilon}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_\varepsilon \\ \overline{\dot{J}_\varepsilon R_\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\,\overline{C\dot{A}_\varepsilon\psi^\varepsilon}\end{pmatrix} - \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix}0 \\ \overline{C\dot{A}_\varepsilon\psi^\varepsilon}\end{pmatrix}$$

si on pose

$$B_\varepsilon = \begin{pmatrix}0 & -iJ_\varepsilon^* \\ iJ_\varepsilon & 0\end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix}R_\varepsilon \\ \overline{\dot{J}_\varepsilon R_\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\,\overline{C\dot{A}_\varepsilon\psi^\varepsilon}\end{pmatrix},\quad G = -i\sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix}0 \\ \overline{C\dot{A}_\varepsilon\psi^\varepsilon}\end{pmatrix}$$

on a

$$\frac{d}{dt}B_\varepsilon X = iX + G$$

alors compte tenu du lemme (2.1), un calcul simple de l'analyse classique montre que

$$\|B_\varepsilon X(t)\|_{V\times H} \le \|B_\varepsilon X(0)\|_{V\times H} + \int_0^t \|G(s)\|_H\, ds$$

et comme

$$B_\varepsilon X = \begin{pmatrix}-iJ_\varepsilon^*\left\{\overline{\dot{J}_\varepsilon R_\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\,\overline{C\dot{A}_\varepsilon\psi^\varepsilon}\right\} \\ iJ_\varepsilon R_\varepsilon\end{pmatrix}$$

Alors

$$\|J_\varepsilon R_\varepsilon(t)\|_H \le \|B_\varepsilon X(t)\|_{V\times H} \le \sqrt{\varepsilon\left\{\|I^*\varphi^0\|_H + \|C\|\int_0^t \left\|\overline{\dot{A}_\varepsilon\psi^\varepsilon}(s)\right\|_H ds\right\}}$$

ce qui prouve le lemme, compte tenu de l'égalité (3.4).

Corollaire3.1:

on a

$$(i)\ J_\varepsilon u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon\psi^\varepsilon + o(\sqrt{\varepsilon}),\ \text{dans } H$$

en particulier

$$(ii)\ \tilde{u}_\varepsilon(t) = \tilde{\psi}^1(t) + o(\sqrt{\varepsilon}),\ \text{dans } H_1$$

$$(iii)\ u_\varepsilon(t) = \varphi\!\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \psi_1(t) + o(1),\ \text{dans } H_0$$

Preuve:

Découle immédiatement du lemme (3.3).
Rappelons que $\psi_1$est solution de

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}J_1^*J_1\psi_1(t) + \psi_1(t) = 0, & dans\ ]0,T[\times\Omega \\ \psi_1(0) = u_0^1, & dans\ V_1 \\ \overline{\dot{J}_1\psi_1}(0) = \varphi_1, & \text{dans } H_1\end{cases}$$

Lorsque $\Omega =]0,\pi[\times]0,\pi[$ ce qui correspond au système mécanique "membrane-tige". Si μ_n est la suite des valeurs caractéristiques de $J_1^*J_1$ ([13] Moumeni A.) et ψ_n une suite de fonctions propres correspondantes, normalisées par les conditions

$$\|J\psi_n\|_{H_1} = 1,$$

la solution générale $\psi(t)$ est donnée par

$$\begin{cases}\psi^1(t,x,y) = \sum_n\left(a_n cost\sqrt{n^2+ncothn} + b_n sint\sqrt{n^2+ncothn}\right)\psi_n(x,y) \\ \sum_n(a_n+b_n) < +\infty\end{cases}$$

(3.5)

Avec

$$\begin{cases}a_n = \dfrac{1}{n^2+ncothn} < u_0^1,\psi_n >_{V_1} \\ b_n = \dfrac{1}{n^2+ncothn} < \varphi_1, J\psi_n >_{H_1} \\ \psi_n(x,y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sinh n\pi}}\sin n\pi x.\sinh n\pi y\end{cases}$$

(3.6)

CONCLUSION

Contrairement à ce que nous croyons, pour $n=2$, quand ε tend vers zéro, on ne récupère pas le mouvement classique d'une corde vibrante. Pour $n=3$, qui correspond au système mécanique "cavité avec couvercle élastique", lorsque l'inertie ε du milieu contenu dans la cavité tend vers 0, on ne récupère pas le mouvement classique transversal du couvercle élastique.

RÉFÉRENCES

[1]-H.Ammari: Diffraction d'ondes par des structures périodiques. Thèse de Doctorat de l'ecole polytechnique. Palaiseau, France 1995.
[2]-M.Balabane; M.Frisch: Phénomènes d'explosion pour des équations d'ondes non linéaires. Revue des résultats classiques et exposé d'un résultat nouveau. Prépublication:série mathématiques N°88-5.
[3]-T.Ben Kiran: Etude d'un problème de perturbation singulière elliptique non classique. Thèse de Doctorat de l'université de Nancy I.1988.
[4]-T.Colin;L.Berge: Un problème de perturbation singulière pour une équation d'enveloppe en physique des plasmas. CEA centre d'études de Limeil, Villeneuve-Saint-Georges. France, 1994.
[5]-J.Chazarain; A.Piriou: Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Gauthier-Villars, Paris 1981.
[6]-P.G.Ciarlet: Elasticité tridimentionnelle. Masson, Paris. New-York. Milan; 1988.
[7]-R.Dautry, J.L.Lions: Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Masson, Paris 1988.
[8]-G.De Rham: Variétés différentielles. Hermann et Cie. Paris 1955
[9]-D.Huet: Décomposition spectrale et opérateurs. Presse Universitaires de France, Paris 1976.
[10]- D.Huet: Convergence propre et perturbations singulières coécrive. C.R. acad. sc. Paris 1985.
[11]- G.Kass: Perturbations singulières des problèmes d'évolutions linéaires. Thèse de Doctorat de l'université de Nancy I.1988.
[12]-J.L.Lions: Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal. Lecture Notes in Mathematics, Spinger 1973.
[13]-A.Moumeni : Perturbations singulières dans un problème de Sturm Liouville généralisé. Maghreb Math.Rev. ,Vol.10, No1, june2001, pp103-117.
[14]-H.Le Dret: Problèmes variationnels dans les multi-domaines; Modélisations et applications. Masson, Paris 1991.
[15]-Vishik; L.A.Lyusternik: Regular degeneration and boundary layer for differential equations with small parameter. Amer.Math.Soc.1962.