Sciences & Technologie **A N°27 Volume-A**, Juin. (2008), pp. 41-48

PROBLEME QUASI-STATIQUE DE CONTACT AVEC ADHESION ENTRE UN CORPS VISCOELASTIQUE ET UNE FONDATION

Reçu le 07/01/2006 – Accepté le 31/08/2007

Résumé

Le but de ce travail est l'étude variationnelle du contact avec adhésion entre un matériau viscoélastique et une fondation déformable dans le processus quasi-statique et avec l'hypothèse des petites déformations. Les conditions de contact sont de type bilatéral et de compliance normale et l'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle du premier ordre. Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant un théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques, le théorème de Cauchy-Lipschitz, un lemme de Gronwall ainsi que le point fixe de Banach.

Mots clés: matériau viscoélastique, contact avec adhésion, solution faible, opérateur monotone, équation d'évolution, point fixe de Banach.

Classification AMS : 74M15, 74M10, 49J40, 49J85.

B. TENIOU

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Modélisation
Université Mentouri Constantine, Algérie.

Abstract

The aim of this work is the variational study of the contact with adhesion between a viscoelastic material and a deformable foundation in the quasistatic process and with assumption of the small deformations. The conditions of contact are of bilateral type and of normal compliance and the evolution of the field of adhesion is described by a first order differential equation. We prove the existence and unicity of the weak solution by using a theorem on the inequation variational elliptic, the theorem of Cauhy-Lipschitz, a lemma of Gronwall as well as the fixed point of Banach.

Keywords: viscoelastic material, contact with adhsion, weak solution, monotonous operator, equation of evolution, fixed point of Banach.

AMS subject Classification : 74M15, 74M10, 49J40, 49J85.

ملخص

إن الهدف من هذا العمل هو الدراسة التغيرية لتلامس بالتحام في سياق شبه سكوني بين جسم لزج – مرن و قاعدة قابلة للتشوه في إطار فرضية التشوهات الصغرى.
التلامس هنا ثنائي الجانب و التشوه ناظمي و تغير حقل الالتحام مصاغ بواسطة معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى.
نبرهن وجود و وحدانية الحل الضعيف باستخدام نظرية تتعلق بالمتراجحات التغيرية و نظرية كوشي - ليبشيتس و توطئة قرونوال و كذلك نظرية النقطة الثابتة في فضاء بناخ.

الكلمات المفتاحيـــة_: جسم لزج-مرن، تلامس بالتحام، حل ضعيف، مؤثر رتيب، معادلة التغير، النقطة الثابتة..

INTRODUCTION

Les problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation rigide abondent en industrie et dans la vie quotidienne. Le contact du sabot de frein avec le disque, de la chemise avec le piston, des pneus d'une voiture avec le sol, l'enfoncement progressif d'une personne dans un fauteuil et le contact entre les plaques tectoniques, sont des exemples courants. Vu l'importance de ces phénomènes physiques, des efforts considérables ont été consacrés à l'étude de ces problèmes de contact.
Le processus d'adhésion joue un rôle important dans l'industrie en particulier dans l'assemblage des matériaux composites, où les parties non métalliques sont collées ensemble mais sous l'effet des tensions ces matériaux collés se décollent et se déplacent les uns par rapport aux autres. Pour mieux modéliser le processus de contact avec adhésion lorsque le collage n'est pas permanent et un décollage peut avoir lieu, nous avons besoin de décrire le contact et l'adhésion ensemble. Pour cela, M. Fremond [1,2], a introduit dans le modèle mathématique une variable interne de surface $\beta \in [0,1]$, appelée champ d'adhésion, qui décrit la densité fractionnaire des adhésifs actifs sur la surface de contact. Lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs; lorsque $\beta = 0$, tous les adhésifs sont inactifs et il n'y a pas d'adhésion et lorsque $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et seulement une fraction β des adhésifs est active. Beaucoup de travaux portant sur la modélisation et l'analyse mathématique ainsi que l'approximation des problèmes de contact avec adhésion ont été réalisés, on peut citer par exemple les travaux [5] et [6]. Bien évidemment, cette énumération n'est pas exhaustive. Ce travail est divisé en deux parties.
Dans la première partie on définit les outils mathématiques et mécaniques dont on a besoin dans l'étude de notre problème mécanique de contact, ensuite on rappelle quelques définitions classiques et un résultat concernant les équations différentielles dans un espace de Banach.
Dans la deuxième partie nous présentons une modélisation mathématique d'un problème de contact avec adhésion entre un corps viscoélastique et une fondation déformable dans le processus quasi-statique et dans le cadre des petites déformations, ensuite on énonce les hypothèses faites sur le problème et on déduit sa formulation variationnelle. Nous terminons notre étude par une démonstration, en plusieurs étapes, concernant l'existence et l'unicité de la solution faible du problème mécanique de contact.
Notre contribution, dans l'étude de ce problème mécanique, réside dans l'introduction d'une condition dite de compliance normale avec adhésion dans le contact ainsi que dans la preuve du théorème d'existence et d'unicité de la solution faible de ce problème mécanique de contact.

2. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Avant de commencer, nous précisons les notations standard utilisées et nous rappelons quelques définitions et résultats utiles dans l'étude de ce problème mécanique de contact.

Ω est un domaine de $\mathbf{R}^N$ ($N = 2$ ou 3 pour les applications)

Γ est la frontière de Ω

Γ_i est une partie de Γ

ν est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de Γ

u_ν est la composante normale de u ($u_\nu = u \cdot \nu$)

u_τ est la composante tangentielle de u ($u_\tau = u - u_\nu \cdot \nu$)

S_N est l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbf{R}^N$

$$H = \{u = (u_i)/ u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1,N}\} = L^2(\Omega)^N$$

On définit respectivement l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \to Q$ et l'opérateur divergence $Div : Q_1 \to H$ par :

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j),$$

$$Div\sigma = (\partial_j \sigma_{ij})$$

Où les espaces Q, H_1 et Q_1, sont définis par :

$$Q = \sigma = \{(\sigma_{ij})/ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i, j = \overline{1,N}\}$$

$$H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in Q\}$$

$$Q_1 = \{\sigma \in Q / Div\sigma \in H\}$$

Les espaces H, Q, H_1, Q_1 munis de leurs produits scalaires respectifs définis par

$$\langle u, v\rangle_H = \int_\Omega u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau\rangle_Q = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in Q$$

$$\langle u, v\rangle_{H_1} = \langle u, v\rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_Q \quad \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau\rangle_{Q_1} = \langle \sigma, \tau\rangle_Q + \langle Div\sigma, Div\tau\rangle_H \quad \forall \sigma, \tau \in Q$$

sont des espaces de Hilbert. Les normes associées à ces produits scalaires seront notées par $|.|_H$, $|.|_Q$, $|.|_{H_1}$, $|.|_{Q_1}$.

L'application $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité :

$$\gamma u = u|_\Gamma \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})^N$$

est dite application trace. L'image de H_1 par cette application est notée $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$.

Soit H'_Γ le dual de H_Γ, alors pour tout $\sigma \in Q_1$ on a la formule de Green :

$$\langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u)\rangle_Q + \langle Div\sigma, u\rangle_H \qquad \forall u \in H_1$$

et si

$$\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N\times N} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})\},$$

alors

$$\langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu u ds \quad \forall u \in H_1$$

Où Γ est la frontière de Ω, supposée de Lipschitz. Nous supposons que Γ, est partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $mes(\Gamma_1) > 0$.

Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, alors l'inégalité de Korn est vérifiée (une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [4, p. 79]) :

$$|\varepsilon(u)|_Q \geq c|u|_{H_1} \quad \forall u \in V$$

Où $c > 0$ est une constante qui dépend de Ω et Γ_1.

L'espace V défini par :

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \}$$

est un sous-espace fermé de H_1. On munit l'espace V du produit scalaire suivant :

$$\langle u, v\rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_Q \quad \forall u, v \in V$$

Grâce à l'inégalité de Korn, on peut vérifier facilement que les normes $|.|_V$ et $|.|_{H_1}$ sont équivalentes sur V. Par conséquent $(V, |.|_V)$ est un espace de Hilbert. En outre du théorème de trace de Sobolev et de l'équivalence des normes $|.|_V$ et $|.|_{H_1}$ on déduit l'existence d'une constante $c > 0$ qui dépend de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

(R1) $$|u|_{L^2(\Gamma_3)^N} \leq c|u|_V \quad \forall u \in V$$

Pour décrire les conditions de contact avec adhésion, il est nécessaire d'introduire une variable interne de surface $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to [0,1]$, appelée champ d'adhésion, qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact Γ_3.

On définit la fonction de troncature R : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par :

(R2)

$$R(s) = R_L(s) = \begin{cases} L & \text{si} \quad s > L \\ s & \text{si} \quad |s| \leq L \\ -L & \text{si} \quad s < -L \end{cases}$$

Où $L > 0$ est la longueur caractéristique du champ d'adhésion.

On note par :

(R3) $$\widetilde{R}(s) = (-R(s))_+ \text{ et } \widetilde{R}(s)^2 = [\widetilde{R}(s)]^2$$

On définit aussi la fonction de troncature $\overset{*}{R}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

(R4)

$$\overset{*}{R}(s) = \overset{*}{R}_L(s) = \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq L \\ L\dfrac{s}{|s|} & \text{si} \quad |s| > L \end{cases}$$

Pour le champ d'adhésion on a aussi besoin de l'ensemble suivant :

(R5)

$$Q = \{\beta : [0, T] \to L^2(\Gamma_3) \ / \ 0 \leq \beta(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T], \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \ \}$$

A la fin de ce préliminaire nous rappelons le théorème classique de Cauchy- Lipschitz dans l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$.

Théorème. Soient $(X, |.|_X)$ un espace de Banach et $F(t,.) : X \to X$ un opérateur défini presque partout sur $]0, T[$ qui satisfait les conditions suivantes :

1) il existe $L_F > 0$ telle que $|F(t,u) - F(t,v)|_X \leq L_F |u - v|_X \quad \forall u, v \in X$, p.p. $t \in]0, T[$.

2) il existe $p \geq 1$ tel que $t \mapsto F(t,u) \in L^p(0, T; X)$ $\forall u \in X$.

Alors pour tout $u_0 \in X$, il existe une fonction $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que :

$$\dot{u}(t) = F(t, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[$$
$$u(0) = u_0$$

3. FORMULATION DU PROBLEME MECANIQUE ET HYPOTHESES

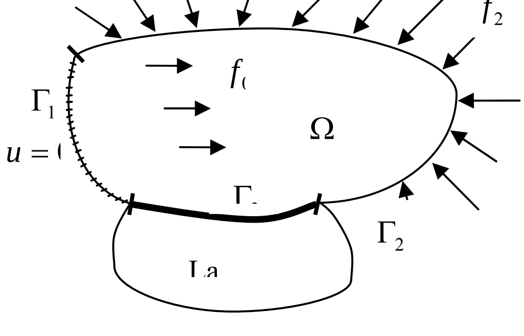

Figure 1. Contact entre un corps viscoélastique et une fondation déformable

Soit $[0,T]$ un intervalle de temps. On considère un corps viscoélastique qui occupe un domaine Ω, borné de $\mathbf{R}^N$ ($N = 2, 3$ pour les applications) et dont la frontière Γ supposée suffisamment régulière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $mes(\Gamma_1) > 0$.
On suppose que ce corps est encastré sur $\Gamma_1 \times [0,T]$, (donc le champ des déplacements u est nul sur $\Gamma_1 \times [0,T]$), que des tractions superficielles f_2 s'appliquent sur $\Gamma_2 \times [0,T]$ et que des forces volumiques f_0 agissent dans $\Omega \times [0,T]$. On suppose aussi que ce corps est en contact avec une fondation déformable sur la partie $\Gamma_3 \times [0,T]$ et que le contact est avec compliance normale et adhésion (voir figure 1). On précise encore que ce corps viscoélastique obéit à une loi constitutive non linéaire de Kelvin-Voigt.
Sous ces conditions, ce problème mécanique de contact se formule de la manière suivante :

Problème P : Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbf{R}^N$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \to S_N$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbf{R}$ tels que :

(1) $\sigma(t) = A\varepsilon\left(\dot{u}(t)\right) + E\varepsilon(u(t))$ dans $\Omega \times]0,T[$

(2) $Div\sigma + f_0 = 0$ dans $\Omega \times]0,T[$

(3) $u = 0$ sur $\Gamma_1 \times]0,T[$

(4) $\sigma\nu = f_2$ sur $\Gamma_2 \times]0,T[$

(5) $-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 \widetilde{R}(u_\nu)$ sur $\Gamma_3 \times]0,T[$

(6) $-\sigma_\tau = p_\tau(\beta)\overset{*}{R}(u_\tau)$ sur $\Gamma_3 \times]0,T[$

(7) $\dot{\beta} = -\left(\gamma_\nu \beta \widetilde{R}(u_\nu)^2 - \varepsilon_a\right)_+$ sur $\Gamma_3 \times]0,T[$

(8) $u(0) = u_0$ dans Ω

(9) $\beta(0) = \beta_0$ sur Γ_3

Où ε_a et γ_ν sont des coefficients d'adhésion donnés.

Hypothèses

Pour l'étude variationnelle du problème P, nous supposons que l'opérateur de viscosité A et l'opérateur d'élasticité E vérifient les hypothèses suivantes :

(a) $A : \Omega \times S_N \to S_N$ tel que

(b) $\exists m_A > 0 \left(A(x,\varepsilon_1) - A(x,\varepsilon_2)\right)\cdot(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_A|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2$ p.p. $x \in \Omega$, $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N$

(10) (c) $\exists L_A > 0$ telle que $\left(A(x,\varepsilon_1) - A(x,\varepsilon_2)\right) \leq L_A|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ p.p. $x \in \Omega$, $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N$

(d) La fonction $x \to A(x,\varepsilon)$ est mesurable Lebesgue p.p. $x \in \Omega$, $\forall \varepsilon \in S_N$

(e) La fonction $x \to A(x,0) \in Q$

(a) $E : \Omega \times S_N \to S_N$ tel que

(b) $\exists L_E > 0$ telle que $\left(E(x,\varepsilon_1) - E(x,\varepsilon_2)\right) \leq L_E|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N$, p.p. $x \in \Omega$

(11) (c) La fonction $x \to E(x,\varepsilon)$ est mesurable Lebesgue p.p. $x \in \Omega$, $\forall \varepsilon \in S_N$

(d) La fonction $x \to E(x,0) \in Q$

La fonction compliance normale p_ν et la fonction tangentielle p_τ satisfont les hypothèses suivantes :

(a) $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ telle que

(b) $\exists L_\nu > 0$ telle que $\left(p_\nu(x,r_1) - p_\nu(x,r_2)\right) \leq L_\nu|r_1 - r_2|$ $\forall r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, p.p. $x \in \Gamma_3$

(12) (c) $\left(p_\nu(x,r_1) - p_\nu(x,r_2)\right).(r_1 - r_2) \geq 0$ $\forall r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, p.p. $x \in \Gamma_3$

(d) Pour tout $r \in \mathbf{R}$, $x \to p_\nu(x,r)$ est mesurable sur Γ_3

(e) $p_\nu(x,r) = 0$ pour tout $r \leq 0$

(a) $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que

(b) $\exists L_\tau > 0$ telle que

$\left(p_\tau(x,\beta_1) - p_\tau(x,\beta_2)\right) \leq L_\tau |\beta_1 - \beta_2|$ $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}$,

p.p. $x \in \Gamma_3$

(13) (c) $\exists M_\tau > 0$ telle que

$|p_\tau(x,\beta)| \leq M_\tau \ \forall \beta \in \mathbf{R}$, p.p. $x \in \Gamma_3$

(d) Pour tout $\beta \in \mathbf{R}$, $x \rightarrow p_\tau(x,\beta)$ est mesurable sur Γ_3

(e) La fonction $x \rightarrow p_\tau(x,0) \in L^2(\Gamma_3)$

Nous supposons que les coefficients d'adhésion satisfont :

(14) $\gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \ \ \gamma_\nu \geq 0$ p.p. sur Γ_3

(15)

$\varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \ \ \varepsilon_a \geq 0$ p.p. sur Γ_3

Les forces volumiques et surfaciques satisfont :

(16)

$$f_0 \in C\left([0,T] \ ; L^2(\Omega)^N\right), \ \ f_2 \in C\left([0,T] \ ; L^2(\Gamma_2)^N\right)$$

Les données initiales satisfont :

(17)

$u_0 \in V, \ \ \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \ \ 0 \leq \beta_0 \leq 1$ p.p. sur Γ_3

De (16) et du théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il résulte l'existence d'un élément unique $f(t) \in V$ tel que :

(18)

$$\langle f(t), v\rangle_V = \langle f_0(t), v\rangle_H + \langle f_2(t), v\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V, t \in [0,T]$$

En outre, $f \in C([0,T];V)$.

Enfin on définit la fonctionnelle $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow R$ par :

(19)

$$j(\beta,u,v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu ds - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 \widetilde{R}(u_\nu) v_\nu ds + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta) \overset{*}{R}(u_\tau) v_\tau ds$$

3.1 Formulation variationnelle du problème mécanique

En appliquant la formule de Green et en utilisant la loi d'équilibre ainsi que les conditions aux limites, on déduit facilement la formulation variationnelle suivante du problème P :

Problème PV : Trouver un champ des déplacements $u : [0,T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\sigma : [0,T] \rightarrow Q$ et un champ d'adhésion $\beta : [0,T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que :

(20)

$$\sigma(t) = A\varepsilon\left(\dot{u}(t)\right) + E\varepsilon(u(t)) \quad \forall t \in [0,T]$$

(21)

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(w)\rangle_Q + j(\beta(t), u(t), w) = \langle f(t), w\rangle_V \quad \forall w \in V, \forall t \in [0,$$

(22)

$$\dot{\beta}(t) = -\left(\gamma_\nu \beta(t) \widetilde{R}(u_\nu(t))^2 - \varepsilon_a\right)_+ \ \text{p.p. } t \in [0,T]$$

(23) $u(0) = u_0$ dans Ω, $\beta(0) = \beta_0$ sur Γ_3

Les difficultés majeures rencontrées dans la résolution du système non-linéaire (20)-(23) résident dans la non-linéarité des fonctions constitutives A et E ainsi que la dépendance de la fonctionnelle j de la solution de ce système.

3.2 Existence et unicité de la solution

Concernant l'existence et l'unicité du problème PV, on a le théorème suivant :

Théorème 1 : Sous les hypothèses (10)-(17), le problème PV admet une solution unique (u, σ, β), qui satisfait :

(24)

$$u \in C^1\left([0,T] \ ; V\right), \ \ \sigma \in C\left([0,T] \ ; Q\right), \ \ \beta \in W^{1,\infty}\left([0,T] \ ; L^2(\Gamma_3)\right) \cap Q$$

Pour démontrer ce théorème nous construisons deux problèmes auxiliaires et nous démontrons l'existence et l'unicité de leurs solutions. Ensuite nous construisons une application contractante où son unique point fixe est la solution faible du problème mécanique de départ.
Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire suivant dans lequel la fonction $\eta \in C([0,T];V)$ est donnée.

Problème PV2 : Trouver un champ des déplacements $u_\eta : [0,T] \rightarrow V$ tel que :

(25)

$$\left\langle A\varepsilon\left(\dot{u}_\eta(t)\right), \varepsilon(w)\right\rangle_Q + \langle \eta(t), w\rangle_V = \langle f(t), w\rangle_V \quad \forall w \in V, t \in [0,T]$$

(26)

$$u_\eta(0) = u_0$$

Lemme 1 : Le problème PV2 admet une solution unique $u_\eta \in C^1\left([0,T] \ ; V\right)$

Preuve : Soit $\mathrm{P} : V \rightarrow V$, l'opérateur défini par :

(27)

$$\langle \mathrm{P}v, w\rangle_V = \langle A\varepsilon(v), \varepsilon(w)\rangle_Q \quad \forall v, w \in V$$

De l'hypothèse (10), il résulte que l'opérateur P est fortement monotone et de Lipschitz, alors le théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce (cf. [3, p.60]) entraîne l'existence d'une fonction unique v_η qui satisfait :

(28)
$$v_\eta \in C([0,T];V)$$
(29)
$$\mathrm{P}v_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad \forall t \in [0,T]$$

Soit $u_\eta : [0,T] \to V$ la fonction définie par :

(30)
$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s)ds + u_0 \quad \forall t \in [0,T]$$

De (27)-(30), il résulte que u_η est l'unique solution du problème PV2 et elle satisfait $u_\eta \in C^1([0,T];V)$.

Dans la deuxième étape nous utilisons la solution u_η, du problème PV2 pour formuler le second problème auxiliaire suivant :

Problème 3 : Trouver un champ d'adhésion $\beta_\eta : [0,T] \to L^2(\Gamma_3)$ tel que

(31)
$$\dot\beta(t) = -\left(\gamma_\eta \beta(t)\widetilde{R}(u_{\eta\nu}(t))^2 - \varepsilon_a\right)_+ \quad \text{p.p. } t \in [0,T]$$
(32)
$$\beta_\eta(0) = \beta_0$$

Où $u_{\eta\nu}$ désigne la composante normale de la fonction $u_\eta \in C^1([0,T];V)$.

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2 : Le problème 3, admet une solution unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Gamma_3)) \cap \mathrm{Q}$

Preuve : Soit la fonction $F_\eta : [0,T] \times L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ définie par :

$$F_\eta(t,\beta) = -\left(\gamma_\eta \beta(t)\widetilde{R}(u_{\eta\nu}(t))^2 - \varepsilon_a\right)_+$$

Comme la fonction F_η est Lipschitzienne par rapport au second argument β et uniformément continue par rapport au temps t et pour tout $\beta \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \to F_\eta(t,\beta)$ appartient à $L^\infty([0,T];L^2(\Gamma_3))$, alors le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence d'une fonction unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Gamma_3))$, qui satisfait (31) et (32).

La régularité $\beta_\eta \in \mathrm{Q}$, découle de (31), (32) et de l'hypothèse $0 \le \beta_\eta \le 1$ p.p. sur Γ_3.

Dans la troisième étape, pour tout $\eta \in C([0,T];V)$, on note par u_η la solution du premier problème auxiliaire et par β_η la solution du second problème auxiliaire.

Maintenant on définit l'application $\Lambda : [0,T] \to V$ par :

(33)
$$\langle \Lambda\eta(t), w\rangle_V = \langle E\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(w)\rangle_Q + j(\beta_\eta(t), u_\eta(t), w) \quad \forall w \in V, t \in [0,T]$$

Lemme 3 : Pour tout $\eta \in C([0,T];V)$, la fonction $\Lambda\eta : [0,T] \to V$ appartient à l'espace de Banach $C([0,T];V)$. En outre il existe $\overset{*}{\eta} \in C([0,T];V)$ telle que $\Lambda\overset{*}{\eta} = \overset{*}{\eta}$.

Preuve : (i) Soient $\eta \in C([0,T];V)$ et $t_1, t_2 \in [0,T]$. En utilisant (33), (19) et (R1) on obtient :

$$|\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)|_V \le |E\varepsilon(u_\eta(t_1)) - E\varepsilon(u_\eta(t_2))|_Q + c|p_\nu(u_\eta(t_1)) - p_\nu(u_\eta(t_2))|_{L^2(\Gamma_3)} +$$
$$+ c\left|\beta_\eta^2(t_1)\widetilde{R}(u_{\eta\nu}(t_1)) - \beta_\eta^2(t_2)\widetilde{R}(u_{\eta\nu}(t_2))\right|_{L^2(\Gamma_3)} +$$
$$+ c\left|p_\tau(\beta_\eta(t_1))\overset{*}{R}(u_{\eta\tau}(t_1)) - p_\tau(\beta_\eta(t_2))\overset{*}{R}(u_{\eta\tau}(t_2))\right|_{L^2(\Gamma_3)}$$

En utilisant (11)-(13) et l'inégalité $0 \le \beta \le 1$ ainsi que les définitions des opérateurs de troncature $\widetilde{R}$ et $\overset{*}{R}$ on déduit que :

(34)
$$|\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)|_V \le c|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_V + c|\beta_\eta(t_1) - \beta_\eta(t_2)|_{L^2(\Gamma_3)}$$

Comme $u_\eta \in C^1([0,T];V)$ et $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$, alors de (34) on déduit que
$$\Lambda\eta \in C([0,T];V).$$

(ii) Soient $\eta_1, \eta_2 \in C([0,T];V)$ et $t \in [0,T]$. Pour simplifier l'écriture on note : $u_i = u_{\eta_i}, v_i = \dot u_{\eta_i}, \beta_i = \beta_{\eta_i}$ pour $i = 1,2$. En intégrant (31) sur l'intervalle $[0,t]$ et en tenant compte de la condition initiale (32), on obtient :

$$\beta_i(t)=\beta_0-\int_0^t\left(\gamma_\nu\beta_i(s)\widetilde{R}(u_{i\nu}(s))^2-\varepsilon_a\right)_+ds$$
$$\forall t\in[0,T]$$

Donc on a :

$$\left|\beta_1(t)-\beta_2(t)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\le c\int_0^t\left|\beta_1(s)\widetilde{R}(u_{1\nu}(s))^2-\beta_2(s)\widetilde{R}(u_{2\nu}(s))^2\right|_{L^2(\Gamma_3)}ds$$

En utilisant (R3) et le fait que $\beta_1=\beta_1-\beta_2+\beta_2$ on aura :

$$\left|\beta_1(t)-\beta_2(t)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\le c\int_0^t\left|\beta_1(s)-\beta_2(s)\right|_{L^2(\Gamma_3)}ds+c\int_0^t\left|u_{1\nu}(s)-u_{2\nu}(s)\right|_{L^2(\Gamma_3)}ds$$

De cette dernière inégalité et d'un lemme de Gronwall (cf. [3, p.162]), il résulte que :

$$\left|\beta_1(t)-\beta_2(t)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\le c\int_0^t\left|u_{1\nu}(s)-u_{2\nu}(s)\right|_{L^2(\Gamma_3)}ds$$

En utilisant (R1), on aura :

(35)

$$\left|\beta_1(t)-\beta_2(t)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\le c\int_0^t\left|u_1(s)-u_2(s)\right|_V ds$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés pour obtenir la relation (34) on trouve :

$$\left|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\right|_V\le$$
$$c\left|u_1(t)-u_2(t)\right|_V+c\left|\beta_1(t)-\beta_2(t)\right|_{L^2(\Gamma_3)}$$

De cette dernière inégalité et de (35), on aura :

$$\left|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\right|_V\le$$
$$c\left|u_1(t)-u_2(t)\right|_V+c\int_0^t\left|u_1(s)-u_2(s)\right|_V ds$$

Puisque u_1 et u_2 ont les même valeurs initiales, il résulte que :

$$\left|u_1(t)-u_2(t)\right|_V\le\int_0^t\left|v_1(s)-v_2(s)\right|_V ds$$

En combinant ces deux dernières inégalités on obtient :

(36)

$$\left|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\right|_V\le c\int_0^t\left|v_1(s)-v_2(s)\right|_V ds$$

D'autre part de (25), il résulte que :

$$\left\langle A\varepsilon(v_1)-A\varepsilon(v_2),\varepsilon(v_1)-\varepsilon(v_2)\right\rangle_Q+\left\langle\eta_1-\eta_2,v_1-v_2\right\rangle_V=0$$
$$\text{sur }]0,T[$$

En utilisant dans cette dernière inégalité le fait que l'opérateur A est fortement monotone et l'inégalité de Korn ainsi que l'inégalité de Cauchy- Schwartz, on obtient :

(37)

$$\left|v_1(s)-v_2(s)\right|_V\le c\left|\eta_1(s)-\eta_2(s)\right|_V\qquad\forall s\in[0,T]$$

De (36) et (37) on déduit que :

$$\left|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\right|_V\le c\int_0^t\left|\eta_1(s)-\eta_2(s)\right|_V ds$$
$$\forall t\in[0,T]$$

En réitérant cette dernière inégalité pour m temps donnés dans $[0,T]$, on obtient :

$$\left|\Lambda^m\eta_1-\Lambda^m\eta_2\right|_{C(0,T;V)}\le\frac{c^mT^m}{m!}\left|\eta_1-\eta_2\right|_{C(0,T;V)}$$

Pour m assez grand, cette dernière inégalité entraîne que Λ est un opérateur contractant dans l'espace de Banach $C(0,T;V)$. Par conséquent Λ admet un seul point fixe $\overset{*}{\eta}\in C(0,T;V)$.

Démonstration du théorème 1.

Maintenant on peut utiliser les trois lemmes précédents pour démontrer l'existence et l'unicité du théorème 1 (c'est-à-dire l'existence de la solution faible du problème mécanique de départ).

Existence. Soient $\overset{*}{\eta}\in C(0,T;V)$ le point fixe de l'opérateur Λ et u la solution du Problème PV2, pour $\eta=\overset{*}{\eta}$ (c'est-à-dire $u=u_{\overset{*}{\eta}}$). Nous notons par σ la fonction donnée par (20) et par β la solution du problème 3, pour $\eta=\overset{*}{\eta}$ (c'est-à-dire $\beta=\beta_{\overset{*}{\eta}}$). On voit bien que les égalités (22) et (23) sont vérifiées respectivement par le problème PV2 et le problème 3. En outre, puisque $\Lambda\overset{*}{\eta}=\overset{*}{\eta}$, il résulte de (25) et (33) que (21) est aussi vérifiée. Ensuite du lemme 1, il résulte que $u\in C^1([0,T];V)$. En outre de (20), (10) et (11) il résulte que $\sigma\in C([0,T];Q)$.

Choisissant maintenant $w\in D(\Omega)^N$ dans (21), on obtient :

(38) $$Div\sigma+f_0=0\quad\forall t\in[0,T]$$

En utilisant (16), alors cette dernière égalité entraîne que $Div\sigma\in C([0,T];L^2(\Omega)^N)$.

Par conséquent $\sigma\in C([0,T];Q_1)$. Rappelons aussi que la régularité du champ d'adhésion $\beta\in W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Gamma_3))\cap$ Q, résulte du lemme 2.

Nous concluons que (u,σ,β) est une solution du problème PV, qui satisfait (20).

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et de l'unicité du problème PV2 ainsi que celle du problème 3.

En effet; soit (u, σ, β) une solution du problème PV qui satisfait (24) et notons par $\eta \in C(0,T;V)$ la fonction définie par :

(39)
$$\langle \eta(t), w \rangle_V = \langle E\varepsilon(u(t)), \varepsilon(w) \rangle_Q + j(\beta(t), u(t), w)$$
$\forall w \in V$, $t \in [0T]$

Les égalités (20), (21), (25) et la condition initiale $u(0) = u_0$ entraînent que u est solution du problème PV2, mais d'après le lemme 1 ce problème admet une solution unique u_η, par conséquent on a :

(40) $$u = u_\eta$$

L'égalité (22) et la condition initiale $\beta(0) = \beta_0$ entraînent que β est solution du problème 3 mais d'après le lemme 2 ce problème admet une solution unique β_η , par conséquent on a :

(41) $$\beta = \beta_\eta$$

En utilisant (33) et (39) – (41), on déduit que $\Lambda \eta = \eta$. Comme l'opérateur Λ admet un seul point fixe, il résulte alors que :

(42) $$\eta = \overset{*}{\eta}$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (40) – (42) combinées avec (20).

REFERENCES

[1] Frémond. M, ''Equilibre des structures qui adhèrent à leurs supports'', C.R.A.S, Paris 295, série II (1982), pp. 913-916.

[2] Frémond. M, ''Adhérence des solides'', Journal Mécanique Théorique Appliqué 6 (1987), pp. 383-407.

[3] Han. W and Sofonea. M, ''Quasistatic contact problem in viscoelasticity and viscoplasticity '', Study in Advanced Mathematics, 30, American Mathematical Society, Providence, RI-International Press, Somerville, MA, 2002.

[4] Necas. J and Hlavacek. I, ''Mathematical theory of elastic and elastico-plastic bodies: an Introduction'', Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.

[5] Shillor. M, Sofonea. M and J.J. Telega. J.J,'' Models and variational analysis of quasistatic contact'', Lecture Notes in Physics Vol. 655, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[6] M. Sofonea. M, Han. W and Shillor. M, ''Analysis and approximation of contact problems with adhesion or damage'', Monographs and textbook in pure and applied mathematics, Chapman-Hall/CRC press, New York, 2005.