

## STABILITE LOCALE ET GLOBALE D'UN MODELE EPIDEMIQUE NON LINEAIRE.

LAIID Chahrazed et RAHMANi Fouad Lazhar.

Universite Mentouri, Department de Mathematiques,  
Faculté des sciences Exactes, Constantine, Algerie.

Reçu le 11/03/2009 – Accepté le 21/07/2011

### Résumé

Ce travail présente un modèle épidémiologique dans une population de taille totale  $N$  qui est divisées en trois sous populations épidémiologiques des personnes qui sont suseptibles, infectieux et ceux mis en quarantaines. Le modèle contient un point d'équilibre trivial et il existe aussi le poin non trivial. Nous avons etudier la stabilité global et local des deux points d'équilibres trivial et non trivial, aussi on a pu obtenir le nombre de reproduction basique.

**Mots clés:** Modèle épidémique, Nombre de reproduction basique, Stabilité globale, Stabilité asymptotiquement locale.

### Abstract

This work presents an epidemiological model in a population of total size  $N$  is constant which is divided into three sub-populations of people who are epidemiological suseptibles, infectious, and those placed in quarantine. The model contains a disease-free equilibrium and the endemic disease point. We study the stability of both global and local points of trivial and nontrivial equilibria, so we could get the basic reproductive number.

**Keywords:** Modèle épidémique, Nombre de reproduction basique, Stabilité globale, Stabilité asymptotiquement locale.

### ملخص

هذا العمل يطرح نموذجاً وبائياً في مجتمع حجمه الإجمالي  $N$  المقسم إلى ثلاثة مجموعات فرعية وبائية التي تمثل في الأشخاص المحتملين للإصابة بالمرض والأشخاص الحاملين للمرض والأشخاص المعزولين على التوالي. النموذج يحتوي على توازن عند المؤشرات البديهية و الغير بديهية حيث قمنا بدراسة الاستقرار و التوازن عند مختلف المؤشرات هذا الخير سمح لنا بالحصول على

\_\_\_\_\_ : نموذج وبائي. عدد التناسل. استقرار عام. استقرار محلي.



## Introduction

On considère le modèle épidémiologique SIQS qui est défini comme suit:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \lambda - \mu_1 S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma Q(t) + \nu, \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - (\mu_2 + d)I(t) - \alpha I(t)Q(t) + \rho, \\ \dot{Q}(t) = \alpha I(t)Q(t) - \mu_3 Q(t) - \gamma Q(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Où  $S(t)$ ,  $I(t)$  et  $Q(t)$  sont respectivement la densité des individus susceptibles infectieux et ceux mis en quarantaine au temps  $t$ .

Où les paramètres positives  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  sont les taux de mortalités naturelle des susceptibles, infectieux et ceux mis en quarantaines respectivement. Le paramètre constant non-négatif  $d$  représente le taux mortalité causé par la maladie, et  $\lambda$  est le taux de naissance.

Le paramètre  $\beta$  est le taux de transmission entre susceptibles et infectieux (taux de contacts), et  $\alpha$  désigne le taux de contacts des infectieux mis en quarantaines.

La constante  $\gamma$  est la vitesse de récupération des individus mis en quarantaine perdent leur immunités temporaire et reviennent à la classe susceptibles.

Les paramètres  $\nu, \rho$  sont les taux d'immigrations des susceptibles, infectieux respectivement.

Le modèle (1.1) est un modèle épidémiologique non linéaire qui est donnée par le paramètre d'incidence bilinéaire  $\beta SI$ , d'où  $SI$  mesure la force de l'infection de l'épidémie.

Le modèle mathématique en (1.1) est important, il décrit la dynamique de l'épidémiologie.

L'organisation de ce travail est donnée comme suit, dans la section 2 nous avons présenté le modèle mathématique qui se compose de trois équations différentielles avec plusieurs paramètres constants positifs et non nuls. Dans la section 3 nous avons calculé le point d'équilibre dans le cas de l'absence de l'épidémie et sa stabilité globale et locale. Dans la section 4 l'existence du point d'équilibre endémique et sa stabilité locale, et l'étude de sa stabilité globale à états présenter dans la section 5.

## 2 Modèle d'équations

La taille de la population totale  $N(t)$  est divisé en trois sous classes distinctes épidémiologiques des personnes qui sont susceptibles, infectieux, et ceux mis en quarantaines, avec des tailles notées par  $S(t)$ ,  $I(t)$ , et  $Q(t)$ , respectivement.

Le modèle SIQS ayant une force infectieux dans le temps latent, infectés et ceux mis en quarantaine période est décrite par le système suivant d'équations différentielles:

$$\begin{cases} \dot{S} = \lambda - \mu_1 S - \beta S I + \gamma Q + \nu, \\ \dot{I} = \beta S I - (\mu_2 + d) I - \alpha I Q + \rho, \\ \dot{Q} = \alpha I Q - \mu_3 Q - \gamma Q. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le système (2.1) est positif cela signifie que la solution reste positive pour toute trajectoire initialisée à des conditions positives.

On considère (2.1) un système sans immigrations pour étudier sa stabilité, alors on peut l'écrire de la manière suivante:

$$\begin{cases} \dot{S} = \lambda - \mu_1 S - \beta S I + \gamma Q, \\ \dot{I} = \beta S I - (\mu_2 + d) I - \alpha I Q, \\ \dot{Q} = \alpha I Q - \mu_3 Q - \gamma Q. \end{cases} \quad (2.2)$$

La taille de la population totale  $N(t)$  peut être déterminée par  $N = S + I + Q$  alors

$$\begin{aligned} \dot{N} &\leq \lambda - \mu N, \text{ après intégration on obtient:} \\ N &\leq \frac{\lambda}{\mu_1} + \left( N_0 - \frac{\lambda}{\mu_1} \right) e^{-\mu t}, \text{ en temps } t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} S(0) = S_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, \\ \text{et } N_0 = S_0 + I_0 + Q_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\Omega = \left\{ (S, I, Q) \in \mathbb{R}_+^3, S+I+Q \leq N < \frac{\lambda}{\mu} \right\}$ , est invariante positivement par le système (2.1).

## 3 Le point d'équilibre Trivial et sa stabilité.

Dans cette section on cherche les points d'équilibres et on étudie la stabilité.

Les points d'équilibres du système (2.2) est comme suit:

$$\lambda - \mu_1 S - \beta S I + \gamma Q = 0, \quad (3.1)$$

$$\beta S I - (\mu_2 + d) I - \alpha I Q = 0, \quad (3.2)$$

$$\alpha I Q - (\mu_3 + \gamma) Q = 0. \quad (3.3)$$

En l'absence de l'épidémie dans le cas d'équilibre avec tous les paramètres positifs non nuls le système (2.2) à le

$$E_0 = \left( \frac{\lambda}{\mu_1}, 0, 0 \right)^T$$

point d'équilibre trivial

Au début en analysant le système au point d'équilibre  $E_0$  on obtient l'équation caractéristique.

$$\det \begin{pmatrix} -\mu_1 - A & \frac{\beta\lambda}{\mu_1} & \gamma \\ 0 & \frac{\beta\lambda}{\mu_1} - (\mu_2 + d) - A & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu_3 + \gamma) - A \end{pmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

Alors les valeurs propres sont comme suit:

$$A_1 = -\mu_1, A_2 = \frac{\beta\lambda}{\mu_1} - (\mu_2 + d), A_3 = -(\mu_3 + \gamma) \quad (3.5)$$

L'épidémie est asymptotiquement localement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice jacobienne ont leur parties réel négatives. On a la condition suivante:

$$\frac{\beta\lambda}{\mu_1} < (\mu_2 + d) \quad (3.6)$$

Tant que la condition (3.6) est remplie le point d'équilibre  $E_0$  du système (2.2) est unique est reste asymptotiquement localement stable.

Alors le nombre de reproduction basique de l'infection  $R_0$  est défini comme suit:

$$R_0 = \frac{\beta\lambda}{\mu_1 (\mu_2 + d)} \quad (3.7)$$

En utilisant  $R_0$ , nous pouvons affirmer le lemme suivant indiquant la stabilité de  $E_0$ .  
Lemme1.

Si  $R_0 < 1$ , alors le point d'équilibre  $E_0$  est localement asymptotiquement stable, stable si  $R_0 = 1$ , instable si  $R_0 > 1$ .  
Pour montrer la stabilité localement asymptotiquement stable de  $E_0$  dans  $\Omega$ , on doit démontrer le théorème suivant.

**Théorème1.**

Si  $R_0 < 1$ , le point d'équilibre  $E_0$  est globalement asymptotiquement stable dans  $\Omega$ .  
Preuve.

Soit  $(S_0, I_0, Q_0) \in \Omega$ .

On a la deuxième équation du système (2.2) et la condition

$$S \leq \frac{\lambda}{\mu_1}, \text{ alors.}$$

$$\dot{I}(t) \leq I_0 \left( \frac{\beta\lambda}{\mu_1} - (d + \mu_2) \right)$$

Après intégration et avec les conditions initiales de l'équation (2.4) on obtient:

$$I(t) \leq I_0 \exp - \left\{ (d + \mu_2) - \frac{\beta\lambda}{\mu_1} \right\} t \quad (3.8)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

Si  $R_0 < 1$ , alors  $(d + \mu_2) - \frac{\beta\lambda}{\mu_1} > 0$ , d'où  $I(t)$  converge exponentiellement vers zéro.

On a la troisième équation du système (2.2), en utilisant l'équation (2.8) on obtient.

$$\dot{Q} = Q (\alpha I - \mu_3 - \gamma S) \leq Q \left( \alpha I_0 e^{-\left\{ (d + \mu_2) - \frac{\beta\lambda}{\mu_1} \right\} t} - (\mu_3 + \gamma) \right)$$

Après intégration avec les conditions initiales de l'équation (2.4) on obtient:

$$Q(t) \leq Q_0 \exp - \left( \frac{\alpha I_0}{(d + \mu_2) - \frac{\beta\lambda}{\mu_1}} e^{-\left\{ (d + \mu_2) - \frac{\beta\lambda}{\mu_1} \right\} t} + (\mu_3 + \gamma) t \right) \quad (3.9)$$

$\frac{\alpha I_0}{(d + \mu_2) - \frac{\beta\lambda}{\mu_1}} > 0$  et  $(d + \mu_2) - \frac{\beta\lambda}{\mu_1} > 0$

Si  $R_0 < 1$ ,  $Q(t)$  converge exponentiellement vers zéro.

On a l'équation  $\dot{S} = \lambda - \mu_1 S - \beta S I + \gamma S Q$ , il est

Supposé que  $\dot{S} \leq \lambda - \mu_1 S$ ,

En utilisant la même technique avec les conditions initiales de l'équation (2.4) on obtient:

$$S \leq \frac{\lambda}{\mu_1} + \left( S_0 - \frac{\lambda}{\mu_1} \right) e^{-\mu_1 t}, \quad (3.10)$$

Finalement, si  $R_0 < 1$ ,  $S(t)$  converge exponentiellement vers  $\frac{\lambda}{\mu_1}$ . Alors le point d'équilibre  $E_0$  est globalement asymptotiquement stable dans  $\Omega$ .

Pour clôturer l'étude de la stabilité de  $E_0$ , nous devons discuter du cas  $R_0 = 1$ , dans le but d'atteindre notre objectif, nous avons le lemme suivant:

Lemme2. [7]

Soit D intervalle bornée in  $\mathbb{R}$  et h:  $(t_0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction uniformément continue bornée, soit  $x : (t_0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  est la solution de:

$$\dot{x} = h(t, x)$$

Qui est défini dans l'intervalle  $(t_0, \infty)$ , alors

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \inf h(t, x_\infty) \leq 0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sup h(t, x_\infty),$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \inf h(t, x^\infty) \leq 0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sup h(t, x^\infty),$$

(3.11)

D'où,

$$x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf x(t), x^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup x(t).$$

Théorème2.

Si  $R_0=1$ , le point d'équilibre  $E_0$  est globalement asymptotiquement stable dans  $\Omega$ .

Preuve.

Soit  $(S_0, I_0, Q_0) \in \Omega$ .

On a la deuxième équation du système (2.2) et la condition

$$S \leq \frac{\lambda}{\mu_1},$$

alors.

$$I \leq I \left( \frac{\beta \lambda}{\mu_1} - (d + \mu_2) \right)$$

On a  $R_0=1$ , c'est-à-dire

$$(\mu_2 + d) = \frac{\beta \lambda}{\mu_1}, \text{ et } \frac{dI}{dt} \leq 0.$$

Donc I(t) une fonction est positive et non croissante, d'où:

$$I(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu_1} \in [0, \infty).$$

En appliquant le lemme 2 sur la troisième équation du système (2.2), on a:

$$|\alpha I(N-S-I) - (\mu_3 + \gamma) Q_\infty| \leq 0 \leq |\alpha I(N-S-I) - (\mu_3 + \gamma) Q^\infty|$$

Donc

$$\frac{\alpha I(N-S-I)}{(\mu_3 + \gamma)} \leq Q_\infty \leq Q^\infty \leq \frac{\alpha I(N-S-I)}{(\mu_3 + \gamma)}$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \rightarrow Q_\infty = Q^\infty = Q(\infty)$$

En appliquant de la même manière et la même méthode en utilisant le lemme 2 on déduit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S(\infty)$$

que

Puisque  $R_0=1$ , le point d'équilibre  $E_0$  est instable. Pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta(\varepsilon)$  telle que:

Si

$$\left| S_0 - \frac{\lambda}{\mu_1} \right| + I_0 + Q_0 \leq \eta(\varepsilon)$$

Alors pour  $t \geq 0$ ,  $\left| S_0 - \frac{\lambda}{\mu_1} \right| \leq \varepsilon$ ,  $I(t) \leq \varepsilon$ , et  $Q(t) \leq \varepsilon$ . On déduit que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_0, \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I_0, \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q_0.$$

#### 4 Stabilité locale du point d'équilibre endémique.

On introduit

$$x(t) = S(t), y(t) = I(t), \text{ et } z(t) = Q(t), \text{ le}$$

système (2.2) est centré par le point  $E^*$  et la partie linéaire est comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -(\mu_1 + \beta I^*)x - \beta S^*y + \gamma z, \\ \dot{y}(t) = \beta I^*x + (\beta S^* - \alpha Q^* - (\mu_2 + d))y - \alpha I^*z \\ \dot{z}(t) = \alpha Q^*y + (\alpha I^* - (\mu_3 + \gamma)), \end{cases}$$

(4.1)

L'équation caractéristique au point  $E^*$  du système est comme suit:

$$\det \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \beta I^*) - A & -\beta S^* & \gamma \\ \beta I^* & -A & -\alpha I^* \\ 0 & \alpha Q^* & -A \end{pmatrix} = 0$$

(4.2)

L'équation caractéristique s'écrit sous la forme suivante :

$$A^3 + aA^2 + bA + C = 0. \text{ Avec les nouvelles notations suivantes:}$$

$$a = \mu_1 + \beta I^*, b = I^*[(\alpha + \beta^2)S^* - (\mu_2 + d)], c = \alpha I^*Q^*[\alpha \mu_1 + \beta \mu_3].$$

(4.3)

L'épidémie est localement asymptotiquement stable si et seulement si tous les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle négative si et seulement si:

$$a > 0, c > 0 \text{ et } ab - c > 0.$$

On a et c sont positive et non nulle, on calcul alors  $ab - c$ , on obtient:

$$ab - c = (\mu_1 + \beta I^*) (I^* [(\alpha + \beta^2) S^* - (\mu_2 + d)]) - \alpha I^* Q^* [\alpha \mu_1 + \beta \mu_3]$$

$$ab - c = \frac{S^*}{\alpha} [(\alpha + \beta^2) (\alpha \mu_1 + \beta (\mu_3 + \gamma)) - \alpha \beta] + \frac{\mu_2 + d}{\alpha} [\alpha (1 - \mu_1) - \beta (\mu_3 + \gamma)]$$

$$a b - c > 0 \text{ si } \frac{\alpha \mu_1 + \beta (\mu_3 + \gamma)}{\alpha \beta} > 0$$

Alors le point d'équilibre  $E^*$  est localement asymptotiquement stable.  
Le point d'équilibre endémique et sa stabilité globale.

Lorsque le point d'équilibre trivial  $E_0$  du système (2.1) est localement asymptotiquement stable le point d'équilibre endémique n'existe pas. Lorsque  $R_0 > 1$  le système (2.2) à un point d'équilibre non triviale unique

$$E^* = (S^*, I^*, Q^*), \text{ d'où:}$$

$$\begin{cases} S^* = \frac{\lambda \alpha}{\alpha \mu_1 + \beta \mu_3} - \frac{\gamma (\mu_2 + d)}{\alpha \mu_1 + \beta \mu_3}, \\ I^* = \frac{\mu_3 + \gamma}{\alpha}, \\ Q^* = \frac{\beta \lambda}{\alpha \mu_1 + \beta \mu_3} - \frac{\beta \gamma (\mu_2 + d)}{\alpha (\alpha \mu_1 + \beta \mu_3)} - \frac{(\mu_2 + d)}{\alpha}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ici on prend le cas où  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ .

Dans ce cas  $\dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{Q} = \lambda - \mu N$ , pour

$$N(t) = \frac{\lambda}{\mu} + (N_0 - \frac{\lambda}{\mu}) e^{-\mu t}, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Etudier le comportement asymptotique de la solution du système (2.2) nous menent à supposer que

$$S + I + Q = \frac{\lambda}{\mu}, \text{ alors le deux premières équations du système (2.2) s'écrivent comme suit:}$$

$$\dot{S} = \lambda - \frac{\lambda \gamma}{\mu} - (\mu + \gamma) S - \gamma I - \beta S I = P_1(S, I)$$

$$\dot{I} = (\beta - \alpha) S I + \alpha I^2 - (d + \mu + \frac{\alpha \lambda}{\mu}) I = P_2(S, I) \quad (5.2)$$

**Théorème 3. Dulac Critère**

On a  $D_1 = \{S(t) > 0, I(t) > 0, S + I \leq 1\}$  est une région simplement connexe du plan de phase. S'il existe une fonction continûment différentiable telle que:

$$\frac{\partial (DP_1)}{\partial S} + \frac{\partial (DP_2)}{\partial I} = S = P_1(S, I),$$

$$\dot{I} = P_2(S, I)$$

Les orbites contenues dans  $D_1$  ne sont pas totalement fermées.

**Théorème 4.**

Si  $R_0 > 1$ , alors le point d'équilibre endémique  $E^*$  est globalement asymptotiquement stable.

Preuve.

On prend la fonction de Dulac [12],

$$D(S, I) = \frac{1}{SI} \text{ pour } S, I > 0, \text{ on a:}$$

$$\frac{\partial (DP_1)}{\partial S} + \frac{\partial (DP_2)}{\partial I} = -\frac{(\mu + \gamma)(S + Q)}{IS^2} - \frac{\mu}{S^2} + \frac{\alpha}{S} < 0 \quad (5.3)$$

D'après le critère de Dulac le système (4.2) n'a pas d'orbites périodiques alors le système (4.2) n'admet que 2

$$\text{points d'équilibres } (\frac{\lambda}{\mu}, 0) \text{ et } (S^*, I^*).$$

Lorsque  $R_0 > 1$ ,  $E_0$  est instable et d'après le théorème Poincaré-Bendixon [12]  $E^*$  est globalement asymptotiquement stable.  $\square$

### CONCLUSION

On a étudié dans ce travail la stabilité asymptotique locale et la stabilité globale des deux points d'équilibres trivial et non trivial du système donnée en (2.2). On a prouvé que Si

$R_0 < 1$ , alors le point d'équilibre  $E_0$  est localement asymptotiquement stable, stable si  $R_0 = 1$ , et instable si  $R_0 > 1$ . On a démontré aussi que Si  $R_0 > 1$ , alors le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

### REFERENCES

- [1] Anderson. R. M & AL. (1986). A Preliminary Study of the Transmission Dynamics of the Human Immunodeficiency Virus (HIV), the Causative Agent of AIDS. IMA. J. Math. Appl. Med. Biol 3, p. 229-263.
- [2] Bailey . N.T.J.(1964). Some Stochastic Models for Small Epidemics in Large Population». Appl. Statist.13, p. 9-19.
- [3] Bailey. N.T.J.1977. The Mathematical Theory of Infection Diseases and its Application», Applied Statistics, Vol. 26, No. 1, p. 85-87.
- [4] Bartlett, M.(1978). An Introduction to Stochastic Processes», 3rd ed. Cambridge University Press.
- [5] Isham. V. (1988). Mathematical Modeling of the Transmission Dynamics of HIV Infection and AIDS. J. R. Statist. Soc. A 151, Part 1, p5-30.
- [6] Isham. V. (1993). Stochastic Models For Epidemics with special References to AIDS. The Annals of Applied Probability. Vol3. N 1, p. 1-27.
- [7] Jin. Z, Zhien. M and Maoan. H. (2006). Globale stability of an SIRS epidemic model with delay, Acta Matematica Scientia. 26 B. 291-306.
- [8] Lounes. R, Arazoza, H. (1995). A Two-Sex Model for the AIDS-Epidemic. Application to the Cuban National

Programme on HIV-AIDS. Second Conference on Operation Research, Habana, 3-5 October 1995, Cuba.

[9] Lounes. R, Arazoza, H. (2000). Modeling HIV Epidemic Under Contact Tracing. The Cuban Case. Journal of theoretical Medicine Vol 2, p267-274(2000).

[10] Lounes. R, Arazoza, H. (2002). A Non-Linear Model for a Sexually Transmitted Disease with contact tracing. IMA. J. MJath. Appl. Med. Biol. 19, 221-234..

[11] Lounes. R, Arazoza, H. (2003). What percentage of the Cuban HIV-AIDS Epidemic is known? Rev Cubana. Med Trop ; 55(1):30-7

[12] Perto. L. (1996). Differential Equations and Dynamical Systems. 2nd edition, Springer, New York.

[13] Xiao. D and Ruan, S.(2007). Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate, Math Bio, V208, No2. 419-429.

[14] Lounes. R, Arazoza, H. (1995). A Two-Sex Model for the AIDS-Epidemic. Application to the Cuban National Programme on HIV-AIDS. Second Conference on Operation Research, Habana, 3-5 October 1995, Cuba.

[15] Lounes. R, Arazoza, H. (2000). Modeling HIV Epidemic Under Contact Tracing. The Cuban Case. Journal of theoretical Medicine Vol 2, p 267-274 (2000).

[16] Lounes. R, Arazoza, H. (2002). A Non-Linear Model for a Sexually Transmitted Disease with contact tracing. IMA. J. MJath. Appl. Med. Biol. 19, p 221-234.

[17] Lounes. R, Arazoza, H. (2003). What percentage of the Cuban HIV-AIDS Epidemic is known? Rev Cubana. Med Trop; 55(1). p30-37

[18] Perto. L. (1996). Differential Equations and Dynamical Systems. 2nd edition, Springer, New York.

[19] Serdal Pamuk, An application for linear and nonlinear heat equations by Adomian's decomposition method, Appl. Math. Comput. 163 (2005), p 89-96.

[20] Syed Tauseef Mohyud-Din, Mustafa Inc and Ebru Cavlak, On numerical solutions of two-dimensional Boussinesq equations by using Adomian decomposition and He's homotopy perturbation method, Appl. Appl. Math. Special Issue1. (2010), p 1-11.

[21] Xiao. D and Ruan, S.(2007). Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate, Math Bio, V208, No2. P 419-429.