Sciences & Technologie A – N°21, juin (2004), pp. 15-21.

ETATS COHERENTS Q-DEFORMES

Reçu le 18/02/2003 – Accepté le 12/04/2003

Résumé

Les états cohérents jouent un grand rôle dans la mécanique quantique et peuvent être considérés comme liens avec la mécanique classique; par conséquent, il est nécessaire de les étudier dans un cadre plus général de la quantification qui constitue la théorie de déformation.

Nous avons étudié les états cohérents du groupe de Weyl-Heisenberg faiblement déformé. Nous avons également étudié quelques propriétés des états cohérents faiblement déformés de cette algèbre, et construit l'opérateur de déplacement généralisé, ainsi que la minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg.

Enfin, nous avons étudié les états cohérents de l'algèbre de W.-H. dans l'espace de configuration.

***Mots clés**: Etats cohérents Q-déformés, Opérateur de déplacement.*

Abstract

Coherent states plays an important role in quantum mechanics, it maybe considered a bonds with the classical mechanics, in consistent, it is necessarily to study the coherent states in general case of the deformation theory.

We have studied the coherent states of the Weyl-Heisenberg groups in the concept of the weak deformation theory.

We have studied also some properties of the coherent states of this algebra, constructed the general displacement operators, and the minimization of the Heisenberg uncertainty relations.

Finally, we have studied the coherent states of the W.-H. algebra in the configuration space.

***Keywords**: Q-deformed coherent states, displacement operator.*

N. BOUCERRREDJ
Département de Physique
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar
B.P. 12, 23000 Annaba

ملخص

تلعب الحالات المتماسكة أو المتناسقة دور كبير في ميكانيكا الكم، ويمكن اعتبارها كادات ربط مع الميكانيكا التقليدية، في حين أنه من الضروري جدا دراستها في إطار عام لنظرية التشوهات.

لقد قمنا بدراسة الحالات المتناسقة لمجموعة وايل-هايزنبرغ الضعيفة التشوه أو الاضطراب، كما درسنا بعض خصائص الحالات المتناسقة الضعيفة التشوه لهذا الجبر، وقمنا بتشكيل مؤثر الإزاحة العام وأيضا تصغير أو تقليل علاقة الارتياب لهايزنبرغ.

أخيرا، قمنا بدراسة الحالات المتناسقة لجبر وايل-هايزنبرغ في فضاء الحالات.

***الكلمات المفتاحية**: المتناسقة، مؤثر الإزاحة.*

Une des véritables notions utilisées couramment dans la physique quantique est les états cohérents [1]. Les états cohérents sont introduits la première fois par Schrödinger; les états cohérents du rayonnement électromagnétique ont été introduits par Glauber [19]. Les états cohérents sont appliqués dans plusieurs problèmes physiques [2] incluant les applications dans la physique classique [3].

Les intégrales de chemins [4,5] et les états cohérents [5.6] ont joué un grand rôle dans l'étude des systèmes quantiques, particulièrement pour établir la correspondance entre la physique classique et la physique quantique. L'utilisation des états cohérents pour fournir une méthode alternative dont le but est d'obtenir l'intégrale de chemin dans l'espace des phases et l'équation du mouvement de Hamilton [4] est initié par Klaudeur [7]. Cette technique est récemment étendue pour introduire une formulation dans le terme des états cohérents généralisés du groupe SU(1,1) [8], SU(2) [9], etc. Plus récemment, l'algèbre quantique ou les groupes quantiques sont étudiés [10,11], et les états cohérents du groupe SU_q (2) sont définis [12,13].

Cependant, dans [14,15], les propriétés mathématiques des états cohérents q-déformés, les états super cohérents, les intégrales de chemins [16] et leur limite semi-classique sont discutés.

Les états cohérents de l'oscillateur harmonique sont formés par des superpositions particulières des états cohérents canoniques [17]. Dans le cas ordinaire, ces superpositions sont des vecteurs propres de l'opérateur d'annihilation «a», «a» vérifiant l'algèbre de Weyl q-déformée ($aa^+ - q^2a^+a = 1$).

Le remplacement des variables de coordonnées et de moment qui commutent d'une particule classique par les opérateur x et p satisfont la relation de commutation de Heisenberg: $[x,p]=xp-px=i\hbar$, et dote cette particule de caractéristiques ondulatoires. Accordé à la définition originale, les états cohérents sont des états dans lesquels les propriétés corpusculaires d'une particule quantique sont mieux observées.

Comme résultats, il y a plusieurs définitions quantitatives différentes des états cohérents qui sont équivalentes seulement au cas de l'oscillateur harmonique.

Des points de vue physique et mathématique, les états cohérents de la mécanique quantique sont des objets fascinants qui ont des applications dans plusieurs champs [17,18].

Les états cohérents sont des superpositions linéaires cohérentes de tous les états stationnaires $|\varphi_n\rangle$, qui sont désignés par : "Etats quasi-classiques ou états cohérents de l'oscillateur harmonique" [19].

Dans cet article, nous allons étudier les états cohérents faiblement déformés avec quelques propriétés de ces derniers, et construire l'opérateur de déplacement généralisé. Finalement, nous étudierons les états cohérents dans la représentation de configuration.

1- ALGEBRE DE WEYL-HEISENBERG Q-DEFORMEE

L'algèbre de Weyl-Heisenberg q-déformée et qui admet une structure de Hopf est générée par les opérateurs a, a^+, et 1 vérifiant les relations de q-commutation suivantes:

$$[a,a^+]_q=1$$

$$[a,1]=[a^+,1]=0 \tag{1.1}$$

Un élément x de cette algèbre peut s'écrire sous la forme [20]:

$$x\in(W,H): x=is1+\alpha a^+-\bar{\alpha}a, \quad s\in R. \tag{1.2}$$

où a et a^+ sont les opérateurs d'annihilation et de création respectivement et 1 l'opérateur unité.

La loi de q-commutation est donnée par:

$$[A,B]_q=AB-qBA \tag{1.3}$$

où q est le paramètre de déformation.

Dans la représentation de Macfarlane, les opérateurs a et a^+ sont donnés par [21]:

$$a^+=\bar{\alpha}\left[\exp(2isx)-\exp(is\partial)\exp(isx)\right],$$

$$a=\alpha\left[\exp(-2isx)-\exp(-isx)\exp(is\partial)\right]. \tag{1.4}$$

où $q=e^{-s^2}$ et $\alpha\bar{\alpha}=\dfrac{1}{1-q^2}$, α réel.

La construction du groupe de Lie q-déformé correspondant à l'algèbre de Lie q-déformée se fait par exponentiation:

$$\exp x=\exp(is1)D(\alpha) \tag{1.5}$$

avec

$$D(\alpha)=\exp\left(\alpha a^+-\bar{\alpha}a\right). \tag{1.6}$$

$D(\alpha)$ est l'opérateur de déplacement; x est donné par l'expression (1.2).

Pour trouver la loi de multiplication de l'opérateur $D(\alpha)$, on utilise l'identité suivante:

$$e^ABe^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\ldots \tag{1.6a}$$

D'où la formule de Hausdorf-Campbell-Beaker (H.C.B) donnée par:

$$e^Ae^B=\exp\left\{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{6}[A,[A,B]]+\frac{1}{24}[A,[A,[A,B]]]+\ldots\ldots\right\} \tag{1.6b}$$

Posant $A=-\alpha a^+$ et $B=\alpha a$; donc le commutateur $[A,B]$ devient:

$$[A,B]=[-\alpha a^+,\alpha a]=-|\alpha|^2[a,a^+] \tag{1.7}$$

D'autre part on a:

$$[A,B]=[A,B]_q+(q-1)BA=[A,B]_q+\varepsilon BA+o(\varepsilon^2) \tag{1.8}$$

En utilisant les relations de commutation q-déformées et la formule (1.6b), on trouve la loi de multiplication de l'opérateur $D(\alpha)$ dans la théorie de faible déformation [21,22]:

$$D(\alpha)=e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\left(1+2\varepsilon|\alpha|^2\right)e^{-\bar{\alpha}a}e^{\alpha a^+}e^{\frac{|\alpha|^2}{2}\varepsilon a^+a}+o(\varepsilon^2) \tag{1.9}$$

2- ETATS COHÉRENTS Q-DÉFORMÉS

Déterminons le ket $|\alpha\rangle_\varepsilon$ en utilisant un développement sur les états $|\Psi_n\rangle$ [19]:

Classiquement, on a:

$$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle \tag{2.1}$$

et

$$|\alpha\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\psi_n\rangle \tag{2.2}$$

En appliquant l'opérateur $D(\alpha)$ sur l'état du vide $|\psi_0\rangle$, on obtient une série des états cohérents $\{|\alpha\rangle\}$:

$$|\alpha\rangle=D(\alpha)|\psi_0\rangle \tag{2.3a}$$

Ce qui implique:

$$\langle\alpha|=\langle\psi_0|D^+(\alpha) \tag{2.3b}$$

$D(\alpha)$ est la transformation (1.9) qui, à partir de l'état de vide, donne l'état cohérent $|\alpha\rangle_\varepsilon$.

Après tout calcul fait, on trouve l'expression suivante de l'état $|\alpha\rangle$ à l'ordre ε:

$$|\alpha\rangle_\varepsilon=D(\alpha)|0\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\varepsilon|\alpha|^2\right)}\times$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon\left((n+1)\left((n+2)-|\alpha|^2\right)+|\alpha|^2\right)\right]|n\rangle+o(\varepsilon^2) \tag{2.4}$$

Essayons maintenant de voir si l'état cohérent $|\alpha\rangle_\varepsilon$ est un état propre de l'opérateur d'annihilation a comme dans le cas ordinaire.

Appliquant l'opérateur d'annihilation sur l'état $|\alpha\rangle_\varepsilon$ donné par (2.4):

$$a|\alpha\rangle_{\varepsilon}=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\varepsilon|\alpha|^2\right)}\times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon\left((n+1)\left((n+2)-|\alpha|^2\right)+|\alpha|^2\right)\right]a|n\rangle \tag{2.5}$$

On a:

$$a|n\rangle=\sqrt{[n]}|n-1\rangle,$$

et

$$[n]=n^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon(n+1)\right].$$

Donc, on trouve:

$$a|\alpha\rangle_{\varepsilon}=\alpha\left(|\alpha\rangle_{\varepsilon}+\varepsilon|\alpha'\rangle\right) \tag{2.6a}$$

avec:

$$|\alpha'\rangle=\frac{1}{2}\left\{\exp\left[\left(-|\alpha|^2/2\right)\left(1-\frac{1}{3}\varepsilon|\alpha|^2\right)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha^{n-1}/\sqrt{(n-1)!}\right)\times(n+1)\right\}|n-1\rangle \tag{2.6b}$$

Ce qui prouve que $|\alpha\rangle_{\varepsilon}$ n'est pas vecteur propre de l'opérateur a [21].

3- PRODUIT SCALAIRE DE DEUX ETATS $|\alpha\rangle$:

Considérant deux kets $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$; leur produit donne:

$$\langle\beta|\alpha\rangle=\langle\psi_0|D^+(\beta)D(\alpha)|\psi_0\rangle \tag{3.1}$$

On a:

$$D^+(\beta)D(\alpha)=e^{\bar{\beta}a-\beta a^+}e^{\alpha a^+-\bar{\alpha}a} \tag{3.2}$$

En utilisant les relations de commutation q-déformées et la formule de H.C.B., on trouve:

$$D^+(\beta)D(\alpha)=\exp\left[i\mathrm{Im}\alpha\bar{\beta}\left(1-(\varepsilon/3)|\alpha-\beta|^2\right)\right] D[\gamma(\alpha-\beta)]\exp\left[i\varepsilon\left(\mathrm{Im}\alpha\bar{\beta}\right)\right]a^+a \tag{3.3}$$

Avec

$$D[\gamma(\alpha-\beta)]=\exp\gamma(\alpha-\beta)a^+-\bar{\gamma}\left(\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right)a\ , \tag{3.3a}$$

et

$$\gamma=1+(i\varepsilon/2)\mathrm{Im}\left(\alpha\bar{\beta}\right)\left(1+\left(2\beta/3(\alpha-\beta)\right)\right) \tag{3.3b}$$

En peut écrire le produit $D^+(\beta)D(\alpha)$ sous une autre forme, et ceci en remarquant que:

$$\left[a,a^+\right]_q=1+\varepsilon a^+a \tag{3.4a}$$

Ce qui implique:

$$a^+a=\left(aa^+-1\right)(1-\varepsilon)+o\left(\varepsilon^2\right) \tag{3.4b}$$

On remplaçant dans (3.3), on trouve [20] :

$$D^+(\beta)D(\alpha)=\exp\left(i\mathrm{Im}\alpha\bar{\beta}\left(1-\varepsilon\left(1+\frac{1}{3}|\alpha-\beta|^2\right)\right)\right)D[\gamma(\alpha-\beta)] \times\exp\left(i\varepsilon\mathrm{Im}\alpha\bar{\beta}\right)aa^+ \tag{3.5}$$

d'où l'on tire:

$$\langle\beta|\alpha\rangle=\exp\left(i\mathrm{Im}\alpha\bar{\beta}\left(1-\varepsilon\left(1+\frac{1}{3}|\alpha-\beta|^2\right)\right)\right)D[\gamma(\alpha-\beta)] \times\exp\left(i\varepsilon\mathrm{Im}\alpha\bar{\beta}\right) \tag{3.6}$$

Ce produit scalaire n'est donc jamais nul; donc, le produit scalaire de deux états cohérents n'est pas orthogonal.

4- RELATION DE FERMETURE

D'après la formule (2.4), on a :

$$|\alpha\rangle_{\varepsilon}=D(\alpha)|0\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\varepsilon|\alpha|^2\right)}\times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon\left((n+1)\left((n+2)-|\alpha|^2\right)+|\alpha|^2\right)\right]|n\rangle+o\left(\varepsilon^2\right)$$

La relation de fermeture s'écrit comme:

$$\frac{1}{\pi}\iint|\alpha\rangle\langle\alpha|d\{\mathrm{Re}l\alpha\}d\{\mathrm{Im}\alpha\}=1 \tag{4.1}$$

Donc:

$$\frac{1}{\pi}\iint e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\varepsilon|\alpha|^2\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon\left((n+1)\left((n+2)-|\alpha|^2\right)+|\alpha|^2\right)\right]|n\rangle \times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon\left((m+1)\left((m+2)-|\alpha|^2\right)+|\alpha|^2\right)\right]\langle m|d\{\mathrm{Re}l\alpha\}d(\mathrm{Im}\alpha) \tag{4.2}$$

c'est-à-dire, en passant en coordonnées polaires dans le plan complexe de α (en posant $\alpha=\rho e^{i\theta}$), on trouve:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\ \ e^{-\rho^2}\sum_n\frac{\rho^n e^{in}}{\sqrt{n!}}\left[1+\frac{\varepsilon}{4}\left((n+1)(n+2)-\rho^2\right)+\rho^2\right]|n\rangle\times \sum_m\frac{\rho^m e^{-im}}{\sqrt{m!}}\left[1+\frac{\varepsilon}{4}\left((m+1)(m+2)-\rho^2\right)+\rho^2\right]\langle m|$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{\pi}d\ \ e^{-\rho^2}\sum_{n,m}\frac{\rho^{n+m}e^{i(n-m)}}{\sqrt{n!m!}}\left\{1+\frac{\varepsilon}{4}\left[(m+1)(m+2)-(n+m)\rho^2+(n+1)(n+2)+\frac{3}{4}\rho^4\ \right]+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}|n\rangle\langle m|. \tag{4.3}$$

L'intégrale en φ se calcule aisément:

$$\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)}\ d\ \ =2\pi\delta_{nm}. \tag{4.4}$$

d'où l'on tire:

$$2\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\ \ e^{-\rho^2}\sum_n\frac{\rho^{2n}}{n!}\left\{\left[1+\frac{\varepsilon}{4}\left[2(n+1)(n+2)-2n\rho^2\right]+\frac{3}{4}\rho^4\right]+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}|n\rangle\langle n|$$
$$=2\int_0^{\infty}\rho d\rho e^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}n\right)\rho^2+\frac{\varepsilon}{3}\rho^4}\sum_n\frac{\rho^{2n}}{n!}e^{\frac{\varepsilon}{2}(n+1)(n+2)}|n\rangle\langle n| \tag{4.5}$$

On voit que cette intégrale n'est jamais égale à 1; la relation de fermeture est donc violée.

5- OPERATEUR DE DEPLACEMENT D(α) GENERALISE:

L'application de l'opérateur D(α) sur l'état cohérent $|\beta\rangle$ donne:

$$D(\alpha)|\beta\rangle = D(\alpha)D(\beta)|\psi_0\rangle \tag{5.1}$$

En utilisant les relations de commutations (1.1) et la formule de H.C.B., on trouve:

$$D(\alpha)D(\beta)|\psi_0\rangle = \exp\left\{i\,\mathrm{Im}\left(\alpha\bar{\beta}\right)\left(1-\varepsilon\left[1+\frac{1}{3}|\alpha+\beta|^2\right]\right)\right\}\times$$

$$D\left\{(\alpha+\beta)\left(1+\left(\frac{i\varepsilon}{2}\right)\left(\mathrm{Im}\,\alpha\bar{\beta}\right)\right)\right\}\exp\left[i\varepsilon\left(\mathrm{Im}\,\alpha\bar{\beta}\right)\right]|\psi_0\rangle$$

d'où:

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp\left\{i\,\mathrm{Im}\left(\alpha\bar{\beta}\right)\left(1-\varepsilon\left[1+\frac{1}{3}|\alpha+\beta|^2\right]\right)\right\}\times \\ D\left\{(\alpha+\beta)\left(1+(i\varepsilon/2)\left(\mathrm{Im}\,\alpha\bar{\beta}\right)\right)\right\} \tag{5.2}$$

et

$$D(\alpha)|\beta\rangle = \exp\left\{i\,\mathrm{Im}\left(\alpha\bar{\beta}\right)\left(1-\varepsilon\left[1+\frac{1}{3}|\alpha+\beta|^2\right]\right)\right\}\times \\ \left|\left\{(\alpha+\beta)\left(1+\frac{i\varepsilon}{2}\left(\mathrm{Im}\,\alpha\bar{\beta}\right)\right)\right\}\right\rangle \tag{5.3}$$

On remarque que $D(\alpha)|\beta\rangle$ est différent de $|\alpha+\beta\rangle$; $D(\alpha)$ n'est pas un opérateur de déplacement au sens ordinaire; donc, on peut le considérer comme opérateur de déplacement généralisé.

6- RELATION D'INCERTITUDE DE HEISENBERG DANS LA THEORIE DE FAIBLE DEFORMATION

L'état cohérent faiblement déformé $|\alpha\rangle_\varepsilon$ est donné par:

$$|\alpha\rangle_\varepsilon = \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2}+\varepsilon\frac{|\alpha|^4}{6}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left[1+\frac{\varepsilon}{4}\left(n^2+3n+2-n|\alpha|^2\right)\right]|n\rangle \tag{6.1}$$

Dans le cas ordinaire, on a:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

Donc $|\alpha\rangle_\varepsilon$ peut s'écrire sous la forme:

$$|\alpha\rangle_\varepsilon = |\alpha\rangle_{ord} + \varepsilon|\alpha'\rangle$$

avec

$$|\alpha'\rangle = \frac{1}{4}\sum_n e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}}\left(n^2+3n+2-n|\alpha|^2+\frac{2}{3}|\alpha|^4\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

Les valeurs moyennes des opérateurs X, X^2, P, et P^2 sont définies par:

$$\langle X\rangle_\varepsilon = {}_\varepsilon\langle\alpha|X|\alpha\rangle_\varepsilon,\ \langle P\rangle_\varepsilon = {}_\varepsilon\langle\alpha|P|\alpha\rangle_\varepsilon$$

$$\langle X^2\rangle_\varepsilon = {}_\varepsilon\langle\alpha|X^2|\alpha\rangle_\varepsilon,\ \langle P^2\rangle_\varepsilon = {}_\varepsilon\langle\alpha|P^2|\alpha\rangle_\varepsilon$$

L'écart-type moyen est:

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle_\varepsilon - \langle X\rangle_\varepsilon^2}$$

Les opérateurs X et P en terme de a et a^+ sont donnés par:

$$X = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a-a^+\right),$$

$$P = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a+a^+\right).$$

Les valeurs moyennes $\langle X\rangle_\varepsilon$ et $\langle P\rangle_\varepsilon$ peuvent être obtenues en expriment les opérateurs X et P en fonction de a et a^+.

Après tout calcul fait, on trouve:

$$\Delta X = \left\{(\hbar/2m\omega)\left[1+\frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\alpha^{*2}-4\alpha\alpha^*+2\right)\sum_n e^{-|\alpha|^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left((\alpha\alpha^*)^n/n!\right)\left(n^2+3n+2-n|\alpha|^2+\frac{2}{3}|\alpha|^4\right)\right]+\varepsilon\alpha\alpha^*\right\}^{\frac{1}{2}}+o\left(\varepsilon^2\right)$$

D'une façon analogue, on obtient:

$$\Delta P = \frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\left[1+\frac{\varepsilon}{4}\left(-\alpha^2-\alpha^{*2}-4\alpha\alpha^*+2\right)\sum_n e^{-|\alpha|^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left((\alpha\alpha^*)^n/n!\right)\left(n^2+3n+2-n|\alpha|^2+\frac{2}{3}|\alpha|^4\right)\right]+\varepsilon\alpha\alpha^*\right\}^{\frac{1}{2}}+o\left(\varepsilon^2\right) \tag{6.8}$$

Ce qui implique:

$$\Delta X\Delta P = \frac{\hbar}{2}\left\{1+\varepsilon\left(1-2\alpha\alpha^*\right)\sum_n e^{-|\alpha|^2}\frac{(\alpha\alpha^*)^n}{n!}\left(n^2+3n+2-\right.\right. \\ \left.\left.n|\alpha|^2+\frac{2}{3}|\alpha|^4\right)+2\varepsilon\alpha\alpha^*\right\}^{\frac{1}{2}}+o\left(\varepsilon^2\right). \tag{6.9}$$

Donc, la relation d'incertitude de Heisenberg dépend de l'état cohérent utilisé.

7- ETATS COHERENTS DU GROUPE DE WEYL-HEISENBERG DEFORME DANS LA REPRESENTATION DE CONFIGURATION

Le résultat précédent (6.9) est valable à l'ordre ε. On va démontrer dans ce qui suit qu'il est valable à l'ordre s^2.

Pour une algèbre faiblement déformée, le paramètre de déformation q est donné par:

$$q = 1+\varepsilon, \\ q^2 = e^{-2s^2} \tag{7.1}$$

Dans ce cas 's' est petit au voisinage de zéro. Les opérateurs d'annihilation et de création a et a^+ sont donnés (6.3b) par (1.4) à l'ordre s.

Après développement, on trouve les nouvelles expressions de a et a^+ [22]:

$$a^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[i\left(x-\partial_x\right)+s\left(1+x\,\partial_x+\frac{1}{2}\,\partial_x^2-\frac{3}{2}x^2\right)\right],$$
$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-i\left(x+\partial_x\right)+s\left(-x\,\partial_x+\frac{1}{2}\,\partial_x^2-\frac{3}{2}x^2\right)\right]. \tag{7.2}$$

Cherchons les états propres de l'opérateur 'a' donnés par:

$$a|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle \tag{7.3}$$

Dans cette représentation, on a:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\langle x|\left[-i\left(x+\partial_x\right)+s\left(-x\,\partial_x+\frac{1}{2}\,\partial_x^2-\frac{3}{2}x^2\right)\right]|\lambda\rangle=\langle\lambda|x|\lambda\rangle$$

Introduisons la relation de fermeture dans le premier membre de l'égalité:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\left(ix+\frac{3}{2}sx^2\right)\langle x|p\rangle+\int dx'dp\langle x|\left(-i\,\partial_x-sx\,\partial_x+\frac{1}{2}s\,\partial_x^2\right)|p\rangle\times\right.$$
$$\left.\langle p|x'\rangle\langle x'|\lambda\rangle\right\}=\lambda\langle x|\lambda\rangle,$$

Ce qui implique:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(ix+\frac{3}{2}sx^2\right)\langle x|\lambda\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\int dx'dp\langle x|P_{op}|p\rangle\langle p|x'\rangle\langle x'|\lambda\rangle-$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}is\int dx'dp\langle x|xP_{op}|p\rangle\langle p|x'\rangle\langle x'|\lambda\rangle-\frac{1}{2\sqrt{2}}s\int dx'dp\langle x|P_{op}^2|p\rangle\times$$
$$\langle p|x'\rangle\langle x'|\lambda\rangle=\lambda\langle x|\lambda\rangle,$$

Ce qui donne:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(ix+\frac{3}{2}sx^2\right)\langle x|\lambda\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\int dx'dp\,p\exp\left[ip(x-x')\right]\langle x'|\lambda\rangle-$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}is\int dx'dp\,xp\exp\left[ip(x-x')\right]\langle x'|\lambda\rangle-\frac{1}{2\sqrt{2}}s\int dx'dp\times$$
$$p^2\exp\left[ip(x-x')\right]\langle x'|\lambda\rangle=\lambda\langle x|\lambda\rangle$$

On peut écrire cette expression de la façon suivante:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(ix+\frac{3}{2}sx^2\right)\langle x|\lambda\rangle-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\partial/\partial x\right)\int dx\delta(x-x')\langle x'|\lambda\rangle-$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}sx\left(\partial/\partial x\right)\int dx'\delta(x-x')\langle x'|\lambda\rangle+\frac{1}{2\sqrt{2}}s\left(\partial^2/\partial x^2\right)\int dx'\delta(x-x')\langle x'|\lambda\rangle$$
$$=\lambda\langle x|\lambda\rangle \tag{7.4}$$

D'après la formule d'inversion de la transformation de Fourier [19], on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\psi(x')\delta(x-x')=\psi(x) \tag{7.5}$$

Remplaçons le premier membre de (7.5) par sa valeur dans (7.4); on obtient l'expression suivante:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(ix+\frac{3}{2}sx^2\right)\psi_\lambda(x)-\frac{i}{\sqrt{2}}\psi'_\lambda(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}sx\psi'_\lambda(x)+$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}s\psi''_\lambda(x)=\lambda\psi_\lambda(x),.$$

Donc, l'équation des valeurs propres est:

$$-\left(ix+\frac{3}{2}sx^2\right)\psi_\lambda(x)-(i+sx)\psi'_\lambda(x)+\frac{1}{2}s\psi''_\lambda(x)=\sqrt{2}\,\lambda\psi_\lambda(x) \tag{7.6}$$

On va chercher les solutions de l'équation différentielle suivante:

$$\left[\frac{2}{s}\left(-ix-\frac{3}{2}sx^2-\sqrt{2}\lambda\right)\right]\psi_\lambda(x)-\frac{2}{s}(i+sx)\psi'_\lambda(x)+\psi''_\lambda(x)=0,$$

ou

$$\psi''_\lambda(x)+b(x)\psi'_\lambda(x)+c(x)\psi_\lambda(x)=0 \tag{7.7}$$

C'est une équation de type hypergéométrique avec:

$$b(x)=-(2/s)(i+sx),$$
$$c(x)=-(2/s)\left(+ix+\frac{3}{2}sx^2+\sqrt{2}\,\lambda\right). \tag{7.8}$$

Pour résoudre cette équation, posant: $\psi_\lambda(x)=h(x)v(x)$; on choisit la fonction $h(x)$ de sorte que:

$$2h'(x)+b(x)h(x)=0. \tag{7.9}$$

Calculons la première et la seconde dérivée $\psi_\lambda(x)$, ensuite remplaçons les dans (7.7), on trouve:

$$\psi''_\lambda(x)+b(x)\psi'_\lambda(x)+c(x)\psi_\lambda(x)=$$
$$h(x)v''(x)+\left[h''(x)+b(x)h'(x)+c(x)h(x)\right]v(x)=0 \tag{7.10}$$

Si on pose:

$$h(x)=\exp\left[-\frac{1}{2}A(x)\right],$$
$$b(x)=dA(x)/dx. \tag{7.11}$$

Donc, $A(x)=(-2/s)\left(ix+\frac{1}{2}sx^2\right)$, ce qui implique que:

$$h(x)=\exp\left[(i/s)x+\frac{1}{2}\left(x^2\right)\right],$$

En calculant les dérivées $h'(x)$ et $h''(x)$ ainsi que les produits $b(x)h'(x)$ et $c(x)h(x)$, ensuite en les remplaçant dans (7.10), on trouve que la fonction $v(x)$ doit satisfaire la condition:

$$v''(x)+\left[-\left(2x+(i/s)\right)^2+\left(1-\left(2\sqrt{2}\,\lambda/s\right)\right)\right]v(x)=0 \tag{7.12}$$

Faisons la transformation $t\to 2x+(i/s)$, ce qui donne:

$$x=\frac{1}{2}\left[t-(i/s)\right].$$

Remplaçons dans (7.12), on trouve:

$$v''(t)+\left[i^2t^2+\left(1-\left(2\sqrt{2}\,\lambda/s\right)\right)\right]v(t)=0,$$

Elle est de la forme:

$$v''(t)+\left[\alpha^2t^2+\beta\right]v(t)=0,$$

ou de la forme:

$$v''(t)+\left[\lambda'+l^2t^2\right]v(t)=0. \tag{7.13a}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha^2=l^2=i^2\\ \beta=\lambda'=1-\left(2\sqrt{2}\,\lambda/s\right)\end{array}\right\} \tag{7.13b}$$

Cette équation hypergéométrique de type de Whittaker [23] admet une solution de type:

$$v(t)=D_{-(l+i\lambda)/2l}\left[\pm\sqrt{l}(1+i)t\right] \tag{7.14}$$

où $D_v(z)$ est une fonction cylindrique parabolique donnée par:

$$D_v(z)=2^{\frac{1}{4}+v/2}\,z^{\frac{-1}{2}}\,W_{\frac{1}{4}+v/2,\frac{-1}{4}}\left(z^2/2\right)$$

$W_{\frac{1}{4}+v/2,\frac{-1}{4}}\left(z^2/2\right)$: fonction de Whittaker.

Donc:

$$D_\nu(z)=2^{\nu/2}e^{-z^2/4}\left\{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)/\Gamma(1-\nu)/2\right){}_1F_1\left(-\nu/2;\frac{1}{2};z^2/2\right)\right.$$
$$\left.+\left(z/\sqrt{2}\right)\left[\left(\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)/\Gamma(\nu/2)\right){}_1F_1\left((1-\nu)/2;\frac{3}{2};z^2/2\right)\right]\right\}$$

où:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\equiv l=i\\ \beta\equiv\lambda'=1-2\sqrt{2}\,\lambda/s.\end{array}\right\},$$

Donc, les états cohérents sont donnés par:

$$\psi_\lambda(x)=h(x)v(x)$$
$$=A\left(\exp\left[(ix/s)+\frac{1}{2}x^2\right]\right)D_{-(\alpha+i\beta)/2\alpha}\left\{\pm\sqrt{\alpha}\left[2(1+i)x+(i-1)/s\right]\right\} \qquad (7.15)$$

Cette solution a une forme qui rend son interprétation assez difficile.

Afin d'y remédier, il existe une solution perturbative donnée par:

$$\psi_\lambda(x)=\psi_{0\lambda}(x)+s\psi_{1\lambda}(x)+o(s^2) \qquad (7.16)$$

Remplaçons cette solution dans (7.6), et identifions les termes de même ordre en s, on trouve:

$$\psi'_{0\lambda}(x)=\left(-x+i\lambda\sqrt{2}\right)\psi_{0\lambda}(x),$$
$$2i\psi'_{1\lambda}(x)+\left(2ix+2\lambda\sqrt{2}\right)\psi_{1\lambda}(x)=\psi''_{0\lambda}(x)-2x\psi'_{0\lambda}(x)-3x^2\psi_{0\lambda}(x) \qquad (7.17)$$

Les solutions de ce système d'équation sont données par:

$$\psi_{0\lambda}(x)=A\exp\left(\frac{-1}{2}x^2+i\lambda\sqrt{2}x\right),$$
$$\psi_{1\lambda}(x)=\left\{\frac{1}{2}iA\left[(2\lambda^2+1)x+2i\lambda\sqrt{2}x^2+C\right]\right\}\exp\left(\frac{-1}{2}x^2+i\lambda\sqrt{2}x\right) \qquad (7.18)$$

A et C constantes d'intégration.

Donc $\psi_\lambda(x)$ à l'ordre s a la forme suivante:

$$\psi_\lambda(x)=A\left[\exp\left(\frac{-1}{2}(x^2)+i\lambda\sqrt{2}x\right)\right]\times$$
$$\left\{1+s\left[\frac{1}{2}i(2\lambda^2+1)x-\lambda\sqrt{2}x^2+K\right]\right\}+o(s^2) \qquad (7.19)$$

K : constante d'intégration.

Les constantes d'intégration A et K peuvent être déterminées à partir de la condition de normalisation. La normalisation s'effectue en utilisant le produit scalaire:

$$\langle\psi_\lambda(x)|\psi_\lambda(x)\rangle=\int_{\Omega_s}\sigma_s(q)\psi^*_\lambda(x)\psi_\lambda(x)=1 \qquad (7.20)$$

Ω_s: domaine d'intégration donné par $\Omega_s=\left[\frac{-\pi}{s},\frac{\pi}{s}\right]$;

$\sigma_s(q)$ est la mesure.

Puisque, $s\langle\langle 1$, alors $\Omega_s=]-\infty,+\infty[\ et\ \sigma_s(q)=1$.

Donc:

$$|\psi_\lambda(x)|^2=A^2e^{-x^2}\left\{1+s\left(-2\sqrt{2}\lambda x^2+2K\right)\right\}+o(s^2),$$

Ce qui implique:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_\lambda(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}A^2\left[e^{-x^2}\right]\left\{1+s\left(-2\sqrt{2}\lambda x^2+2K\right)\right\}dx+o(s),$$

Utilisons l'intégrale Gaussienne:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ ,$$

on obtient:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_\lambda(x)|^2dx=A^2\sqrt{\pi}+sA^2\sqrt{\pi}\left(\lambda\sqrt{2}+2K\right)+o(s^2) \qquad (7.21a)$$

Après les calculs effectués en utilisant le logiciel MATHEMATICA, on trouve:

$A=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}},K=\frac{1}{2}\lambda\sqrt{2}$, A et K choisis réels.

Donc les états cohérents $\psi_\lambda(x)$ sont donnés par:

$$\psi_\lambda(x)=\psi_{0\lambda}(x)+s\psi_{1\lambda}(x)$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left(-\frac{1}{2}x^2+i\lambda\sqrt{2}x\right)}\left\{1+s\left[\frac{1}{2}i(2\lambda^2+1)x-\lambda\sqrt{2}x^2+\frac{1}{2}\lambda\sqrt{2}\right]\right\}+o(s^2) \qquad (7.21b)$$

Les valeurs moyennes $\langle X_{op}\rangle,\langle P_{op}\rangle,\langle X^2_{op}\rangle$, et $\langle P^2_{op}\rangle$ de l'état $\psi_\lambda(x)$ s'obtiennent facilement en expriment X_{op} et P_{op} en termes de a et a^+:

$$\langle X_{op}\rangle=0+o(s^2),$$
$$\langle X^2_{op}\rangle=\frac{1}{2}-\lambda\sqrt{2}s+o(s^2),$$
$$\langle P_{op}\rangle=\lambda\sqrt{2}+\left(\frac{1}{2}+\lambda^2\right)s+o(s^2),$$
$$\langle P^2_{op}\rangle=\frac{1}{2}(1+4\lambda^2)+2\sqrt{2}\lambda(1+\lambda^2)s+o(s^2). \qquad (7.22a)$$

Donc, l'écart-type moyen est:

$$\Delta X=\sqrt{\langle X^2_{op}\rangle-\langle X_{op}\rangle^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda\sqrt{2}s+o(s^2),$$
$$\Delta P=\sqrt{\langle P^2_{op}\rangle-\langle P_{op}\rangle^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\lambda\sqrt{2}s\right)+o(s^2). \qquad (7.22b)$$

et le produit:

$$\Delta X\cdot\Delta P=\frac{1}{2}+s\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+o(s^2). \text{ (à l'unité } \hbar\text{).} \qquad (7.23)$$

La relation d'incertitude de Heisenberg est donc vérifiée à l'ordre $o(s^2)$ par les états cohérents q-déformés qui sont les états propres $\psi_\lambda(x)$ de l'opérateur d'annihilation a.

CONCLUSION

Nous avons trouvé que l'opérateur de déplacement $D_\varepsilon(\alpha)$ est un opérateur de déplacement généralisé. L'état cohérent $|\alpha\rangle_\varepsilon$ n'est pas vecteur propre de l'opérateur d'annihilation a. La relation d'incertitude de Heisenberg dépend de l'état cohérent utilisé. Nous avant trouvé aussi que la solution perturbatrice rend l'étude des états cohérents dans l'espace de configuration plus facile.

REFERENCES

[1]- Kowalski K., and Rembielinski J., "Coherent states for the quantum complex plane", *J. Math. Phys*., 34(6), (1993).

[2]- Klauder J.R. and Skagerstam B.-S., "Coherent states-Applications in Physics and Mathematical Physics", World Scientific, Singapore, (1985).

[3]- Kowalski K., and Steeb W.H., "Nonlinear dynamical systems and Carleman linearization", World Scientific, Singapore, (1991).

[4]- Renshan Gong, "Path integral formalism for $SU_q(2)$ coherent states", *J. Phys. A: Math Gen.,* 25 (1992).

[5]- Feynman R.P. and Hibbs A.R., "Mechanics and path integrals", New York: Mc Graw-Hill, (1968).

[6]- Klauder J.R. and Skagerstan B.S.,"Coherent States", World Scientific Singapore (1985).

[7]- Glauber R., *Phys. Rev.*, **130** 2529 (1963).

[8]- Klauder J.R., *Ann. Phys*., NU11 123, (1966).

[9]- Gerry C.C. and Silverman S., *J. Math Phys*., **23** 1995.

[10]- Kuratsuji Hand Suzuki T., *J. Math. Phys*., 21, 472, (1980).

[11]- Jimbo M Lett. Math. Phys. **10** 63 (1985).

[12]- Biendenharn L.C., *J. Phys. A: Math. Gen*., **22** L 873 (1989). Macfarlane A.J., *J. Phys. A: Math. Gen*., **22** 4581 (1989).

[13]- Chaichian M. *et al.*, *Phys. Rev. Lett*., **65** 980 (1990).

[14]- Quesne C., *Phys. Lett*., 153 A 303 (1991).

[15]- Jurco B., *Lett. Math. Phys*., **21** 51 (1991).

[16]- Chaichian M. *et al*., *J. Math. Phys*., **32** 3381 (1991).

[17]- Spiridov V., "Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials", *Phys. Rev. A*, **52,** N°3, (1995).

[18]- Zhang W.M., Fenz D.H., and Gilmore R., *Rev. Mod. Phys*., 62, 867, (1990).

[19]- Cohen-Tanoudji C., Diu B., Laloë F., "Mécanique quantique I", Ed. Herman, Paris, (1977).

[20]- Prelomov A., "Generalized coherent states and their applications", Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1986).

[21]- Boucerredj N.,"q-deformed coherent states", In topics in high energy and mathematical physics. Constantine University, (1999).

[22]- Boucerredj N., "A new q-deformed Heisenberg-Weyl algebra", In the sixth Constantine high energy physics school. Weak and strong interactions phenomenology, Constantine University, (2002).

[23]- Nikiforov A., Ouvarov V., "Fonctions spéciales de la physique mathématique", Edition Mir Moscou, (1983). ☐