Sciences & Technologie **A** – **N°21**, juin (2004), pp. 31-35.

ALGORITHME POUR LE CALCUL DES COURBURES GENERALISEES

Reçu le 30/12/2001 – Accepté le 21/02/2004

Résumé

On sait qu'une courbe algébrique standard d'équation $f(x, y) =0$ admet un nombre fini de branches (nombre inférieur à l'ordre de f), dont les paramètrages peuvent être obtenus en particulier à partir de la décomposition de Goze itérée.

On aimerait calculer leur courbure généralisée sans les déterminer explicitement, la notion de courbure généralisée ayant fait l'objet d'un travail, publié dans les comptes rendus de l'Université de Cagliari (Italie) [12].

Dans cet article, on se propose d'établir à cet effet un algorithme qui donnera à partir seulement des coefficients de f, la liste exhaustive des courbures généralisées de toutes les branches réelles.

L'article se termine par la donnée d'un exemple pour montrer l'efficacité de l'algorithme proposé.

***Mots clés**: Analyse non standard, courbes planes, courbure, points singuliers, point standard, infinitésimal, passage à l'ombre.*

Abstract

It is known that a standard algebraic curve with equation $f(x, y) =0$ admits a finite number of branches (whish is less than the order of f); whose parameters can be obtained, in particular, starting from the iterated Goze decomposition.

We aim at computing their generalized curvature without determining explicitly. The notion of generalized curvature has been introduced in the journal of university of Cagliari.

In this paper we wish to establish in that respect an algorithm that provides, only given the coefficients of f, the generalized curvatures exhaustive list of all real branches .

The paper finishes with an example showing the efficiency of our algorithm.

***Keywords**: Non-standard analysis, plane curves, standard points, infinitesimal, passage to the shadow.*

Code AMS : 26 E 35, 14 H 05, 14 H 20

K. MEZAGHCHA
M. HANNACHI
Laboratoire de Mathémathiques
Fondamentales et Numériques
Université Ferhat Abbes
Sétif, 19000 (Algérie)

ملخص

نعلم آن المنحنى الجبري العادي لمعادلة f(x,y)=0 يقبل عددا منتهيا من الفروع (عدد أقل من رتبة f) حيث آن المعادلات الوسطية نستطع الحصول عليها بصيفه خاصة من تفكيك غوص.

ونريد أن نحسب التقوّسات المعممة دون تعينها صراحة, مفهوم هذه الأخيرة تمت دراستها في منشورة علمية بجامعة قاقليري.

في هذا البحث, نقترح خوارزمية تعطي إنطلاقا من معاملات f, كل التقوّسات المعممة. وننهي البحث بإعطاء مثال يوضح ذلك.

***الكلمات المفتاحية**: التحليل غير عادي, المنحنيات المستوية, التقوّس, النقاط الشّاذة, النقاط العدية, متناه في الصغر, العبور الى الظل.*

Pour son utilité dans ce travail, il est utile de rappeller la décomposition ce travail, il est utile de rappeller la décomposition de Goze. de rappeller la décomposition de Goze.

Pour tout point $M \in IR^2$, de partie standard M_0 $(M_0 \in M)$, il existe une base standard orthonormée $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ et deux infinitésimaux ε_1 et ε_2 tels que :

$$M = M_0 + \varepsilon_1 \vec{V}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \vec{V}_2$$

Lemme. *Soient C une courbe algébrique et $M \in hal(0)$. On suppose que $M = M_0 + \varepsilon_1 \vec{V}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \vec{V}_2$.*

Avec ε_1, ε_2 deux infinitésimaux et $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ une base standard orthonormale. Le vecteur $\vec{V}_1$ définit une direction tangentielle.

Démonstration

Soit $f \in IR[x, y]$ un polynôme de degré > 1. On note par $\boldsymbol{C}$ la courbe d'équation $f(x, y) = 0$. On suppose que $f(0,0) = 0$ et que $\boldsymbol{C}$ ne contient aucun morceau de droite.

Soit n le degré de f; on note par $m = o(f)$ son ordre (m est le degré de la composante homogène de plus bas degré).

Ecrivons : $f = f_m + f_{m+1} + ... + f_n$ où f_S est le terme homogène de degré s avec : $f_s(x, y) = \sum_{i+j=s} a_{ij} x^i y^j$.

Appliquons à un point M infiniment proche de l'origine la décomposition de Goze $M = \varepsilon_1 \vec{V}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \vec{V}_2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

ε_1, ε_2 étant des infinitésimaux et $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ deux vecteurs standard orthonormés, d'où

$$x = \varepsilon_1 (a + ip), \quad y = \varepsilon_1 (b + ip)$$

Si $M \in C$, alors

$$f(x,y) = \varepsilon_1^m \sum_{i+j=m} a_{ij} \left(a+ip\right)^i \left(b+ip\right)^j + \ldots\ldots$$

$$+ \varepsilon_1^n \sum_{i+j=n} a_{ij} \left(a+ip\right)^i \left(b+ip\right)^j$$

$M \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\varepsilon_1 \neq 0$, ainsi, aprés division par ε_1^m et par passage à l'ombre, $f_m(a,b) = 0$.

Ainsi $\vec{V}_1$ appartient au cône des tangentes à ***C***, à l'origine, défini par $f_m(a,b) = 0$.

<u>Remarque</u>: Si le cône des tangentes est vide, l'origine est un point isolé de la courbe ***C*** et les branches complexes sont, du point de vue réel, dites branches mortes.

I- ANALYSE ET JUSTIFICATION DE L'ALGORITHME

Proposition 1. *L'utilisation itérée de la décomposition de Goze donne exactement les branches tangentes à chaque vecteur contenu dans le cône des tangentes de l'origine affectée de leur courbure généralisée.*

<u>Démonstration</u>

Pour un $\vec{V}_1$ fixé appartenant au cône des tangentes à l'origine, on se propose de déterminer les courbures des branches de ***C*** tangentes à $\vec{V}_1$ à l'origine. Par un changement convenable des axes, on fait coincider le nouvel axe des ordonnées avec la direction de $\vec{V}_1$. La nouvelle expression de *f* est la suivante :

$$f(x,y) = \sum_{m \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j, \quad \text{avec } a_{0m} = 0$$

et $M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$, comme $M \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\varepsilon_1 \neq 0$.

En écrivant que $M \in$ **C**, on obtient

$$\sum_{m \leq i+j \leq n} a_{ij} \varepsilon_1{}^{i+j-m} \varepsilon_2{}^i = 0 .$$

Comme ***C*** ne contient pas de droites $\varepsilon_2 \neq 0$ et les a_{0j} ne sont pas tous nuls, soit q le plus petit indice j tel que $a_{0j} \neq 0$, on a donc

$$\sum_{m \leq i+j \leq q} a_{ij} \varepsilon_1^{i+j-m} \varepsilon_2^i + a_{0q} \varepsilon_1^{q-m} + \varepsilon_1^{q-m} \varepsilon \neq 0 \text{ , } \varepsilon \approx 0$$

D'où par division par $a \varepsilon_1^{q-m}$, on obtient

$$\sum_{m \leq i+j \leq q} a_{ij} \frac{\varepsilon_2^i}{\varepsilon_1^{q-(i+j)}} + a_{0q} + \varepsilon = 0 \qquad (1)$$

On s'intéresse au rapport des exposants $\dfrac{i}{q-(i+j)}$ ($m \leq i+j < q$) ; on a alors un nombre fini de fractions. Soit $\dfrac{\alpha}{\beta}$ la fraction irréductible égale à

$$\frac{\alpha}{\beta} = \inf_{m \leq i+j < q} \frac{i}{q-(i+j)}$$

On obtient une nouvelle formulation de (1)

$$\varepsilon + a_{0q} + F_0\left(\frac{\varepsilon_2^\alpha}{\varepsilon_1^\beta}\right) + \sum a_{ij} \frac{\varepsilon_2^i}{\varepsilon_1^{q-(i+j)}} = 0$$

sachant que la sommation se fait sur les indices autres que $(k\alpha, q - k(\alpha+\beta))$ où F est un polynôme en $X = \dfrac{\varepsilon_1^\alpha}{\varepsilon_1^\beta}$, car les termes du type $\dfrac{\varepsilon_2^z}{\varepsilon_1^s}$ avec $\dfrac{z}{s} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ s'écrivent $\dfrac{\varepsilon_2^{k\alpha}}{\varepsilon_1^{k\beta}} = X^k$.

<u>1er cas</u>: $X \dfrac{\varepsilon_2^\alpha}{\varepsilon_1^\beta}$ est limité. Par passage à l'ombre, on obtient :

$$a_{0q} + F_0({}^0X) = 0$$

En effet, si $\dfrac{\alpha'}{\beta'} > \dfrac{\alpha}{\beta}$, il existe η positif tel que

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} + \eta,$$

d'où
$$\frac{\varepsilon_2^{\alpha'}}{\varepsilon_1^{\beta'}} = \left(\frac{\varepsilon_2^\alpha}{\varepsilon_1^\beta}\right)^{\frac{\beta'}{\beta}} . \left(\varepsilon_2^\eta\right)^{\beta'}$$

Comme $\left(\dfrac{\varepsilon_2^\alpha}{\varepsilon_1^\beta}\right)$ est limité, alors $\left(\dfrac{\varepsilon_2^{\alpha'}}{\varepsilon_1^{\beta'}}\right)$ est *ip.*

Dans ce cas, la courbure généralisée de la branche passant par le point $M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$ est (à un facteur près) racine α-éme d'une solution de l'équation standard $a_{0q} + F_0({}^0X) = 0$, comme $a_{0q} \neq 0$, ${}^0X$ est donc non ip.

<u>2ème cas</u>: $X = \dfrac{\varepsilon_2^\alpha}{\varepsilon_1^\beta}$ est *ig* : Soit k le degré de F_0, $k \geq 1$, alors $\dfrac{\varepsilon_1^{\beta k}}{\varepsilon_2^{\alpha k}}$ est *ip*, il existe $i^*, j^* \in IN$ tels que :

$$\frac{\alpha k}{\beta k} = \frac{q-(i^*+j^*)}{i^*} .$$

En multipliant (1) par l'inverse de $\dfrac{\varepsilon_2^{\alpha k}}{\varepsilon_1^{\beta k}}$ dans les deux membres, on obtient

$$\left(\varepsilon + a_{0q}\right)\frac{\varepsilon_1^{\beta k}}{\varepsilon_2^{\alpha k}} + F_0\left(\frac{\varepsilon_2^{\alpha}}{\varepsilon_1^{\beta}}\right)\frac{\varepsilon_1^{\beta k}}{\varepsilon_2^{\alpha k}} + \sum \frac{a_{ij}\varepsilon_2^{i}\varepsilon_1^{\beta k}}{\varepsilon_1^{q-(i+j)}\varepsilon_2^{\alpha k}} = 0$$

Soit a_{F_0} le coefficient du terme dominant de F_0, en groupant dans ε' tous les termes *a priori ip*, on obtient

$$\varepsilon' + a_{F_0} + \sum a_{ij}\frac{\varepsilon_2^{i-i^*}}{\varepsilon_1^{(i^*+j^*)-(i+j)}} = 0, \quad \varepsilon' \approx 0$$

Ou encore en posant $i_1 = i - i^*$ et $q_1 = j^*$

$$\varepsilon' + a_{F_0} + \sum a_{ij}\frac{\varepsilon_2^{i_1}}{\varepsilon_1^{q_1-(i_1+j)}} = 0 \qquad (2)$$

On peut supposer que $i_1 > 0$ et $q_1 > i_1 + j$, car on montre facilement que tous les autres termes sont *ip*. On recommence la même analyse que dans le premier cas, en remarquant que la somme $\sum$ dans l'équation (2) a au moins un terme de moins que dans (1).

On pose $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \inf \frac{i_1}{q_1-(i_1+j)}$. L'équation (2) s'écrit

$$\varepsilon'' + a_{F_0} + G_0\left(\frac{\varepsilon_2^{\alpha_1}}{\varepsilon_1^{\beta_1}}\right) + \sum a_{ij}\frac{\varepsilon_2^{i_1}}{\varepsilon_1^{q_1-(i_1+j)}} = 0 \qquad (3)$$

Si $X_1 = \frac{\varepsilon_2^{\alpha_1}}{\varepsilon_1^{\beta_1}}$ est limité, par passage à l'ombre, X_1 est solution de l'équation standard $a_{F_0} + G_0({}^0X_1) = 0.$ Si X_1 est *ig*, on recommence la procédure.

Au bout d'un nombre standard d'étapes, la procédure finit par donner une équation du type $a - ip = 0$ avec $a \neq 0,$ ce qui est contradictoire, ainsi on obtient un nombre fini d'équations standard

$$a_{0q} + F_0({}^0X) = 0$$
$$a_{F_0} + G_0({}^0X_1) = 0.$$

L'ensemble de leurs racines réelles contient l'ensemble des nombres ${}^0\left(\frac{\varepsilon_2^{\alpha}}{\varepsilon_1^{\beta}}\right)$ qui déterminent les courbures généralisées. Ceci justifie l'algorithme ci-dessous.

II- ALGORITHME

Soit $f(x,y) = \sum_{m \le i+j \le n} a_{ij}x^i y^j$, on suppose que $a_{0m} = 0$ et que les a_{0j} ne sont pas tous nuls . Soit q le plus petit indice tel que $a_{0q} \neq 0.$

En utilisant l'éclatement $x = XY$ et $y = X$, f devient :

$$f(XY,Y) = \sum_{m \le i+j \le n} a_{ij}X^{i+j}Y^i$$

Posons : $g(X,Y) = \sum_{m \le i+j \le n} a_{ij}X^{i+j-m}Y^i$

Ceci s'écrit

$$\sum_{m \le i+j < q} a_{ij}\,X^{i+j-m}Y^i + a_{0q}X^{q-m} + X^{q-m}P(X,Y) = 0$$

avec $P(0,0) = 0$

En divisant par X^{q-m} , on obtient

$$a_{0q} + P(X,Y) + \sum a_{ij}\frac{Y^i}{X^{q-(i+j)}} = 0$$

Soit $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ la fraction irréductible égale à

$$\inf_{m \le i+j < q}\frac{i}{q-(i+j)}.$$

On groupe les termes de $\sum$ dont le rapport des exposants est égal à $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$, on a alors

$$a_{0q} + P(X,Y) + \sum a_{ij}\frac{Y^i}{X^{q-(i+j)}} + P_0\left(\frac{Y^{\alpha_0}}{X^{\beta_0}}\right) = 0 \qquad (4)$$

d'où la première équation $a_{0q} + P_0\left(\frac{Y^{\alpha_0}}{X^{\beta_0}}\right) = 0$.

On multiplie (4) par $\frac{X^{\beta_0}}{Y^{\alpha_0}}$ et on recommence l'opération précédente : soit a_{P_0} le coefficient dominant de P_0 , d'où la nouvelle équation

$$a_{P_0} + P_1\left(\frac{Y^{\alpha_1}}{X^{\beta_1}}\right) = 0$$

On a ainsi un nombre fini d'équations

$$a_{P_{K-1}} + P_1\left(\frac{Y^{\alpha_K}}{X^{\beta_K}}\right) = 0, \text{ avec } a_{p-1} = a_{0q}$$

L'algorithme s'arrête lorsqu'on aboutit à une équation du type $a + P'(X,Y) =$ où P' est un polynôme avec $a \neq 0$ et $P'(0,0) = 0$. Le nombre d'itérations avant arrêt est limité par le degré de f au carré. Notons par E l'ensemble des racines réelles des équations ci-dessus.

Proposition 2. *A tout élément ρ de E, il existe une branche de la courbe C admettant la courbure correspondante.*

Démonstration

Ceci équivaut à montrer l'existence d'un couple d'*ip* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que

$$\frac{\varepsilon_2^{\alpha_k}}{\varepsilon_1^{\beta_k}} \approx \rho ,$$

où ρ est une solution (nécessairement standard) de l'équation $a_{P_{K-1}} + P_K(\rho) = 0$, et

$$R_K(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = a_{P_{K-1}} + P_{K-1}\left(\frac{\varepsilon_2^{\alpha_k}}{\varepsilon_1^{\beta_k}}\right) + \varepsilon'' + \sum a_{ij}\frac{\varepsilon_2^{i_K}}{\varepsilon_1^{q_K-(i_K+j)}} = 0$$

Nous allons utiliser le fait que si $\frac{\varepsilon_2^{\alpha_k}}{\varepsilon_1^{\beta_k}}$ est limité, alors

$$R_K(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \approx a_{P_{K-1}} + P_{K-1}\left(\frac{\varepsilon_2^{\alpha_k}}{\varepsilon_1^{\beta_k}}\right)$$

En effet, soient $\rho_1 < \rho_2 < ... < \rho_r$ les racines réelles de $Q_K(x) = a_{P_{K-1}} + P_K(x) = 0$.

Soit ρ_i une racine au voisinage de laquelle $Q_k(x)$ change de signe; on considère deux standards ρ' et ρ'' tels que :

$Q_k(\rho') > 0$ et $Q_k(\rho'') < 0$, avec $\rho_{i-1} < \rho' < \rho'' < \rho_{i+1}$.

Pour un $\varepsilon_1 \approx 0$ fixé, posons

$\varepsilon_2'^{\alpha_k} = \varepsilon_1^{\beta_k}\rho'$

$\varepsilon_2''^{\alpha_k} = \varepsilon_1^{\beta_k}\rho''$

$\varepsilon_2' \approx \varepsilon_2'' \approx 0$

Alors : $R_K(\varepsilon_1,\varepsilon_2') \approx Q_K\left(\frac{\varepsilon_2'^{\alpha_K}}{\varepsilon_1^{\beta_K}}\right) = Q_K(\rho')$

qui est standard négatif

$$R_K(\varepsilon_1,\varepsilon_2'') \approx Q_K\left(\frac{\varepsilon_2''^{\alpha_K}}{\varepsilon_1^{\beta_K}}\right) = Q_K(\rho'')$$

qui est standard positif, donc on en déduit que

$$R_K(\varepsilon_1,\varepsilon_2') < 0 \text{ et } R_K(\varepsilon_1,\varepsilon_2'') > 0$$

Par continuité, entre ε_2' et ε_2'', il existe un ε_2 ip tel que

$$^{0}Q_K\left(\frac{\varepsilon_2^{\alpha_K}}{\varepsilon_1^{\beta_K}}\right) = 0$$

Or entre ρ' et ρ'', la seule racine de Q_k est ρ, donc

$$\frac{\varepsilon_2^{\alpha_K}}{\varepsilon_1^{\beta_K}} \approx \rho$$

Dans le cas où Q_k a un signe constant (par exemple positif) au voisinage de ρ_i, pour tout réel λ standard assez petit, les racines de : $Q_k(x) - \lambda = 0$ sont des nombres $\rho'_{i_\lambda}, \rho''_{i_\lambda}$ tels que

$$\rho_{i-1} < \rho'_{i_\lambda} < \rho_i < \rho''_{i_\lambda} < \rho_{i+1}$$

D'après ce qui précède, pour un ε_1 fixé infiniment petit, il existe ε_2' infiniment petit tel que : $R_K(\varepsilon_1,\varepsilon_2') - \lambda = 0$

avec par exemple : $\eta = \frac{\varepsilon_2'^{\alpha_K}}{\varepsilon_1^{\beta_K}} \approx \rho'_{i_\lambda}$.

D'aprés le principe de permanence, il existe $\lambda > 0$ ayant cette propriété; mais alors l'ombre de η est racine du polynôme Q_k, donc égale à ρ_i; ce qui termine la démonstration .

Remarque: Si $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,{}^{0}\!\left(\frac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_1|^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)$ est la courbure généralisée associée à un point de ***C***, la première paire de Puiseux est $(\alpha, \alpha+\beta)$.

IV- EXEMPLE

Soit la courbe algébrique (Γ) définie par $x^4 + y^4 - 8xy^2 = 0$. L'origine est un point singulier.

Soit M un point infiniment proche de l'origine; en utilisant la décomposition infinitésimale de Goze : $M = \varepsilon_1\vec{V}_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\vec{V}_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ étant deux infinitésimaux et $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ deux vecteurs standard orthonormés, on obtient

$$x = \varepsilon_1(a+ip), \quad y = \varepsilon_1(b+ip)$$

Ecrivons que

$$M \in (\Gamma) : \varepsilon_1^4 (a+ip)^4 + \varepsilon_1^4(b+ip)^4 - 8\varepsilon_1^3 (a+ip)(b+ip)^2 = 0$$

Après division par ε_1^3 et passage à l'ombre, on obtient : $a\,b = 0$.

Il y a donc deux vecteurs dans le cône des tangentes :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Pour $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut faire le choix suivant pour $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne $x = \varepsilon_1\varepsilon_2,\ y = \varepsilon_1$.

Reportons ces valeurs dans l'équation de Γ:

$$\varepsilon_1^4\varepsilon_2^4 + \varepsilon_1^4 - 8\varepsilon_1^3\varepsilon_2 = 0 \qquad (1)$$

Après division par ε_1^4, on a : $\varepsilon_2^4 + 1 - 8\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0$

et par passage à l'ombre, on obtient ${}^{0}\!\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = \frac{1}{8}$.

En reprenant (1), on a aussi :

$$\varepsilon_1(\varepsilon_2^4 + 1) = 8\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{8\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2^4}$$

D'où : $$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ & \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8\varepsilon_2^2}{1+\varepsilon_2^4} \\ \frac{8\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2^4} \end{pmatrix}.$$

Et de l'utilsation du principe de permanence de Cauchy, nous avons une paramétrisation rationnelle de la branche régulière de la courbe Γ:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8t^2}{1+t^4} \\ \frac{8t}{1+t^4} \end{pmatrix}$$

- Pour $\vec{V}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on peut faire le choix suivant pour $\vec{V}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $x = \varepsilon_1,\ y = \varepsilon_1\varepsilon_2$ et:

$$\varepsilon_1^4 + \varepsilon_1^4\varepsilon_2^4 - 8\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 = 0 \qquad (2)$$

Après division par ε_1^4, on a : $1+\varepsilon_2^4 - 8\dfrac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} = 0$,

et par passage à l'ombre, on obtient ${}^{0}\left(\dfrac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}\right) = \dfrac{1}{8}$

$$\left({}^{0}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}}\right) = {}^{0}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^{\frac{3}{2}-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \right).$$

Avec la même technique typiquement non standard, on obtient une paramétrisation de la branche singulière de Γ, soit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8t^3}{1+t^4} \\ \dfrac{8t^2}{1+t^4} \end{pmatrix}$$

En conclusion, la courbe a deux branches passant par l'origine :

- L'une des branches est régulière et sa courbure est égale à $\dfrac{1}{4}$.
- L'autre branche est singulière, l'origine est un point de rebroussement de première espèce car $\dfrac{q}{p} = \dfrac{3}{2}$ et sa courbure généralisée : $K_g = \dfrac{q}{p}\, {}^{0}\left(\dfrac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_1|^{\frac{q}{p}-1}}\right) = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}$.

REFERENCES

[1]- Diener F. & Reeb G., "Cours d'analyse non standard", Hermann, Paris (1989).

[2]- Goze M., "Etude locale des courbes algébriques", I R M A Strasbourg (1982).

[3]- Goze M.& Lutz R., "Non standard analysis: A practical guide with applications", Lecture Notes in Maths., Springer-Verlag 88 (1981).

[4]- Hannachi M., "Invariants métriques associés aux points singuliers d'une courbe réelle", I R M A, Strasbourg, (1985).

[5]- Hannachi M., *Courbure généralisée ou finesse des courbes planes,* Actes de l'école d'été OPU (Alger), CNRS (Paris), (1987), pp.181-185.

[6]- Hannachi M., "Invariants métriques associés à une courbe réelle", *Maghreb Mathematical Review*, Vol.1, n°2 (1992), pp.161-166.

[7]- Hannachi M., "Invariants métriques associés à une courbe réelle dans IR^n", *Maghreb Mathematical Review*, Vol. 3, n°1 (1994), pp.65-68.

[8]- Hannachi M., & Mezaghcha K., "Invariants métriques associés à une courbe holomorphe", *Maghreb Mathematical Review*, Vol.3, n°1 (1995), pp.65-68.

[9]- Hannachi M., "Enveloppes, coniques et développées", *Maghreb Mathématical Review*, Vol.5, Nos 1& 2 (1996), pp.47-55.

[10]- Hannachi M., "Invariants métriques associés aux points singuliers, à distance finie ou infinie, d'une courbe réelle", Thèse de doctorat d'état, Sétif (1996).

[11]- Hannachi M., "Géométrie asymptotique des courbes algébriques", *Annales mathématiques Blaise Pascal*, Vol.6, n°2 (1999), pp.21-28.

[12]- Hannachi M., "Généralisation de la notion de courbure", Rendiconti Seminario, Facoltà Sciences, Università Cagliari, Vol.70, Fasc 2 (2000), pp.43-50

[13]- Hannachi M., "Etude non standard de la géométrie locale des cubiques", *Sciences & Technologie*, Univ. Constantine, Algérie, n°14, déc. (2000), pp.15-17. ☐