

## MODELE DE PREDICTION DES FREQUENCES PROPRES DES POUTRES COMPOSITES MULTICOUCHES SYMETRIQUES

Reçu le 01/10/2003 – Accepté le 31/12/2004

### Résumé

L'objet de ce travail est de développer un modèle mathématique en vue de calculer les fréquences propres des poutres composites multicouches symétriques soumises à des vibrations transversales. Cette modélisation, issue d'une généralisation du principe de l'équilibre dynamique d'une poutre homogène isotrope, est basée sur le principe des rigidités équivalentes. Vu le nombre élevé de paramètres dont on doit tenir compte, un programme de calcul est établi.

L'intégration de ce modèle dans un code de calcul par éléments finis a permis de réaliser un certain nombre de vérifications avec un code commercial et de permettre des comparaisons avec d'autres modèles proposés dans la littérature. Ces résultats ont donné satisfaction.

**Mots clés:** Poutres composites, stratifiés, comportement dynamique.

### Abstract

This paper presents a theoretical and numerical analysis of the dynamic behaviour for laminated composite beams. A formulation and microcomputer program for a symmetrically laminated beam is introduced. A modified commercially code for vibration of homogeneous beam is used in order to obtain the natural frequencies of the laminated beams. The present solutions are compared with an available code and whenever possible with alternative existing solutions. The results obtained are quite good.

**Keywords:** Composites beams, laminated, dynamical behaviour.

**K. AOUSSATE**

Département de Génie Civil  
Fac. des Sciences de l'Ingénieur  
Université Mentouri  
Constantine (Algérie)

### ملخص

الهدف من هذا العمل هو وضع نموذج رياضي بالنظر إلى حساب التوترات الذاتية للعتبات المركبة من عدة طبقات متناظرة تحت تأثير اهتزازات عرضية. هذا التمثيل النموذجي مشتق من تعميم مبدأ التوازن الديناميكي لعتبة متجانسة ومبدأ الجساءة المكافئة. نظرا للعدد الكبير للعوامل المأخوذة بعين الاعتبار، نعتمد برنامجا للحساب.

إدخال هذا النموذج في برنامج حساب العتبات المتجانسة باستعمال العناصر المنتهية، سمح لنا بأداء تحقيقات مع برنامج حساب تجاري وأيضا المقارنة مع نماذج مقترحة في الميدان. إن القيم المحصل عليها تماثل تلك المقترحة من طرف دراسات أخرى والنتائج جد معتبرة.

**الكلمات المفتاحية:** عتبات مركبة، طبقات عديدة، ديناميكي.

De nos jours les matériaux composites sont largement introduits dans les différentes industries navale, spatiale, aéronautique, automobile, bâtiment, robotique, sportive, etc. L'étude des vibrations dans les structures et plus particulièrement dans les poutres est un problème important qui se pose fréquemment à l'ingénieur. Pour pouvoir prévoir et assurer leur bon comportement, la connaissance de leurs caractéristiques dynamiques, c'est-à-dire la détermination des fréquences et modes propres, est nécessaire.

Différentes approches ont été menées dans ce but, Hodges *et al.* [1]. Parmi les travaux les plus récents, nous pouvons citer à titre d'exemple, l'article de Chandrashekhara *et al.* [2], basé sur la méthode des éléments finis, ou celui de Banerjee *et al.* [3] utilisant la méthode de la matrice de rigidité dynamique ou aussi celui de Yildirim *et al.* [4] utilisant la méthode des matrices de transfert.

Pour notre part, ce travail s'articule autour de trois parties :

Dans la première partie nous développons l'analyse théorique nécessaire. Nous limitons notre étude à des couches orthotropes, dont les axes d'orthotropie sont parallèles aux axes naturels de la poutre, cas fréquemment rencontré en pratique. Nous définissons une section équivalente à la section multicouche réelle, avec des caractéristiques dites homogénéisées (rigidités à la flexion, à l'extension ainsi que la densité linéique).

Vu le nombre élevé de paramètres, ces caractéristiques sont obtenues par un calcul numérique. Elles serviront ensuite de données d'entrées pour la discrétisation de la poutre par éléments finis monodimensionnels, afin de mettre en œuvre les principes exposés dans la partie théorique. Ce sera l'objet de la seconde partie.

La troisième partie est une étude comparative qui vise à valider le modèle construit précédemment.

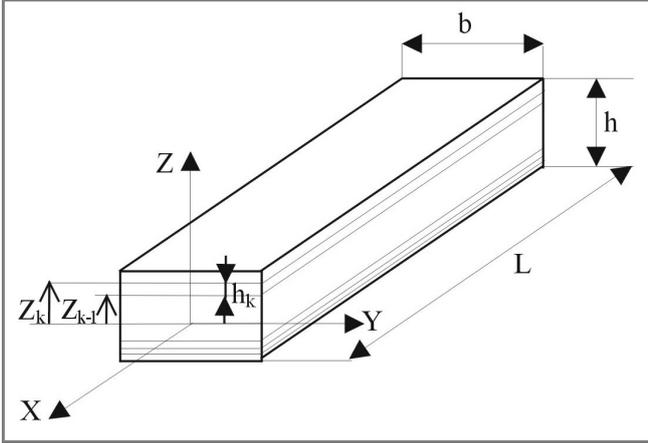
**ETUDE THEORIQUE**

**Présentation**

Soit une poutre composite formée de  $n$  couches de différentes épaisseurs et disposées symétriquement sur la section droite de surface  $S$  et de hauteur  $h$  (Fig.1).

Pour chaque couche  $k$ , nous définissons sa masse volumique, ses modules d'élasticité et de cisaillement, soit respectivement  $\rho_k$ ,  $E_k$  et  $G_k$  ainsi que sa hauteur  $h_k$  et sa surface  $S_k$ . D'autre part, on a les relations suivantes:

$$A = \sum A_k \text{ et } h = \sum h_k .$$



**Figure 1:** Poutre composite multicouches.

**Equation du mouvement**

Une modélisation théorique du comportement vibratoire des poutres composites multicouches, issue d'une généralisation du principe de l'équilibre dynamique d'une poutre homogène isotrope, est développée dans cette partie. Les équations d'équilibre exprimées à travers l'étude d'une tranche de poutre restent vérifiées à chaque instant et sont strictement les mêmes que celles des poutres homogènes isotropes puisque leur démonstration ne fait pas intervenir les propriétés des matériaux. Cependant, si le calcul des fréquences naturelles de la poutre est fonction de ses propriétés mécaniques, il est par contre indépendant des forces excitatrices mises en jeu, ce qui nous permet donc de faire cette étude dans le domaine des vibrations libres (domaine très important en dynamique).

L'équilibre des forces et des moments est donné par les relations suivantes:

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - 2 \sum_{k=1}^N f_i dx - f_0 dx = 0$$

(l'indice 0 indique le pli central),

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M + T dx = 0$$

où  $f_i$  représentent les forces d'inertie

réparties transversales de la couche  $i$ .

D'autre part, on a, d'après l'étude statique :

$$M = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \sum_{k=0}^n \iint_A E_k y^2 dA, \text{ où } \frac{\partial \alpha}{\partial x} \text{ représente la courbure.}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \text{ où } v \text{ représente le déplacement vertical.}$$

En développant l'intégrale et en remplaçant le moment de flexion  $M$  et l'effort tranchant  $T$  par leurs valeurs respectives, on obtient tous calculs faits :

$$\left[ E_0 + 2 \left[ \sum_{k=1}^n E_k \left[ \left( \frac{A_k}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_k}{A_0} \left( \frac{A_k}{A_0} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_{(k-1)}}{A_0} - 1 \right) \right]^2 \right] \right] I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \left[ \rho_0 + 2 \left( \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{A_k}{A_0} \right) \right] \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{A_0} \right] A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

La solution générale de cette équation se détermine de la même manière que dans le cas homogène. Les conditions aux limites permettent d'obtenir l'équation aux fréquences.

Si les poutres sont épaisses ou si les modes de vibrations recherchés sont élevés, la théorie des poutres de Timoshenko qui tient compte de l'effet de cisaillement transverse et de l'effet de rotation est adoptée, dans ce cas l'équation homogénéisée, telle que déterminée en référence [5], tenant compte des effets sus mentionnés, est comme suit :

$$\left[ E_0 + 2 \left[ \sum_{k=1}^n E_k \left[ \left( \frac{A_k}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_k}{A_0} \left( \frac{A_k}{A_0} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_{(k-1)}}{A_0} - 1 \right) \right]^2 \right] \right] I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \left[ \rho_0 + 2 \left( \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{A_k}{A_0} \right) \right] \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{A_0} \right] A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left[ \rho_0 + 2 \left[ \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ \left( \frac{A_k}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_k}{A_0} \left( \frac{A_k}{A_0} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_{(k-1)}}{A_0} - 1 \right) \right]^2 \right] \right] I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \left[ E_0 + 2 \left[ \sum_{k=1}^n E_k \left[ \left( \frac{A_k}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_k}{A_0} \left( \frac{A_k}{A_0} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_{(k-1)}}{A_0} - 1 \right) \right]^2 \right] \right] \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{A_0} \right] I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + K' \left( G_0 + 2 \sum_{k=1}^n G_k \frac{A_k}{A_0} \right) A * \left[ \rho_0 + 2 \left( \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{A_k}{A_0} \right) \right] \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{A_0} \right] A \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - \left[ \rho_0 + 2 \left[ \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ \left( \frac{A_k}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_k}{A_0} \left( \frac{A_k}{A_0} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_{(k-1)}}{A_0} - 1 \right) \right]^2 \right] \right] \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{A_0} \right] I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + K' \left( G_0 + 2 \sum_{k=1}^n G_k \frac{A_k}{A_0} \right) A * \left[ \rho_0 + 2 \left( \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{A_k}{A_0} \right) \right] \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{A_0} \right] A \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0 \quad (2)$$

## Programme

Dans cette partie, un programme de calcul nécessaire à l'exploitation numérique des résultats théoriques précédemment obtenus est élaboré. A cet effet pour chaque pli  $k$  on introduit les caractéristiques mécaniques ( $\rho_k$ ,  $E_k$  et  $G_k$ ) et géométriques ( $h_k$ ,  $S_k$ ) ainsi que la hauteur totale. Celles-ci sont traitées et introduites automatiquement dans un logiciel de calcul des vibrations des poutres homogènes [6], modifié à l'occasion.

## ETUDE COMPARATIVE

### Vérification de la convergence

Des tests numériques sont effectués. Ils concernent la convergence des fréquences propres d'une poutre composite multicouche symétrique en vibration. Les résultats obtenus, faute de n'avoir pu être validés expérimentalement, sont comparés à ceux donnés par SAP90 utilisant l'élément solide.

Les figures 2 à 5 montrent la variation de fréquence de la poutre (pour les différents cas d'appuis) en scindant sa longueur en quatre, six et dix éléments.

On constate une bonne convergence notamment pour les quatre premiers modes; les valeurs se démarquent légèrement environ 9% pour le cinquième mode dans le cas où  $l/h = 100$  et de 19% dans le cas où  $l/h = 35$ , pour la poutre simplement appuyée.

Dans le cas de la poutre simplement appuyée d'un côté et encastree de l'autre, on constate que l'écart entre les valeurs varie de 3% à 4.5% pour  $l/h = 100$  et de 2.5% à 5.5% pour  $l/h = 35$ .

Pour la poutre encastree des deux côtés, on constate que l'écart entre les valeurs varie de 5% à 9% pour  $l/h = 100$ , et pour  $L/h = 35$  il varie de 4.5% à 6% .

Enfin, pour la poutre encastree d'un coté et libre de l'autre, on constate que l'écart entre les valeurs varie de 2% à 3% pour les deux rapports.

Finalement, on peut dire que les valeurs trouvées montrent que, pour un ordre de précision à peu près égal à celui fourni par un code commercial, le modèle proposé donne des résultats intéressants.

### Comparaison avec d'autres modèles

Les nombreux travaux visant à caractériser le comportement des poutres composites multicouches soumises aux vibrations transversales ont conduit à l'élaboration de différents modèles analytiques et numériques. Quelques uns des plus récents de ces modèles sont repris à titre de comparaison par l'auteur de cet article.

A titre d'exemple, on traite le cas d'une poutre orthotrope en graphite / époxyde de longueur  $L$ , de hauteur  $h$  et dont les caractéristiques mécaniques sont :

$$E_1 = 144.8 \text{ GPa}, E_2 = 9.65 \text{ GPa}, G_{23} = 3.45 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 4.14 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.3, \rho = 1389.23 \text{ kg / m}^3.$$

Le tableau 1 présente les fréquences naturelles des cinq premiers modes de la poutre simplement appuyée déterminées par les équations (1) et (2) ainsi que celles publiées par Chandrashekhara et par Yildirim pour les deux rapports  $L/h = 120$  et  $L/h = 15$ .

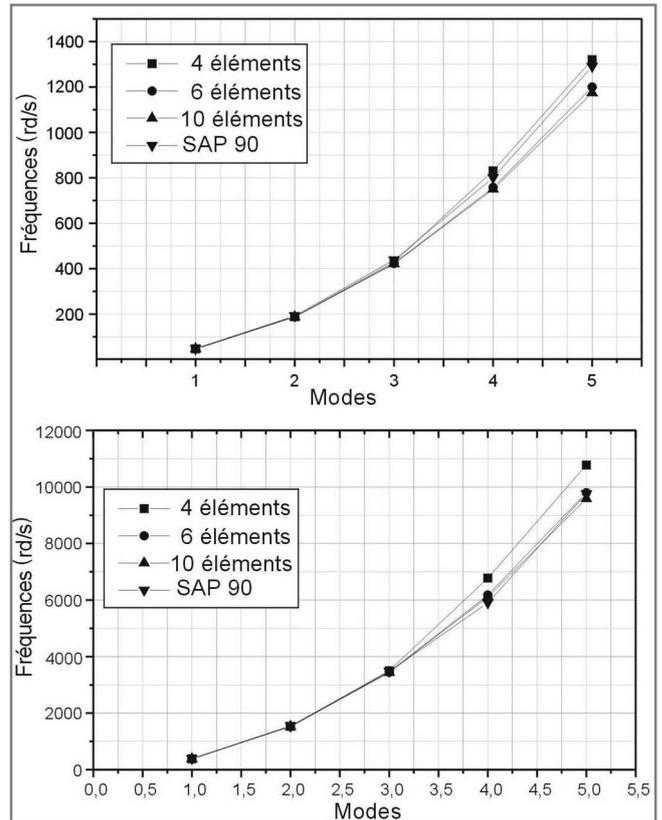


Figure 2: Poutre simplement appuyée. Variation de la fréquence circulaire en fonction du nombre d'éléments; (a) Poutre appuyée pour  $L/h=100$ , (b) poutre appuyée-appuyée pour  $L/h=35$ .

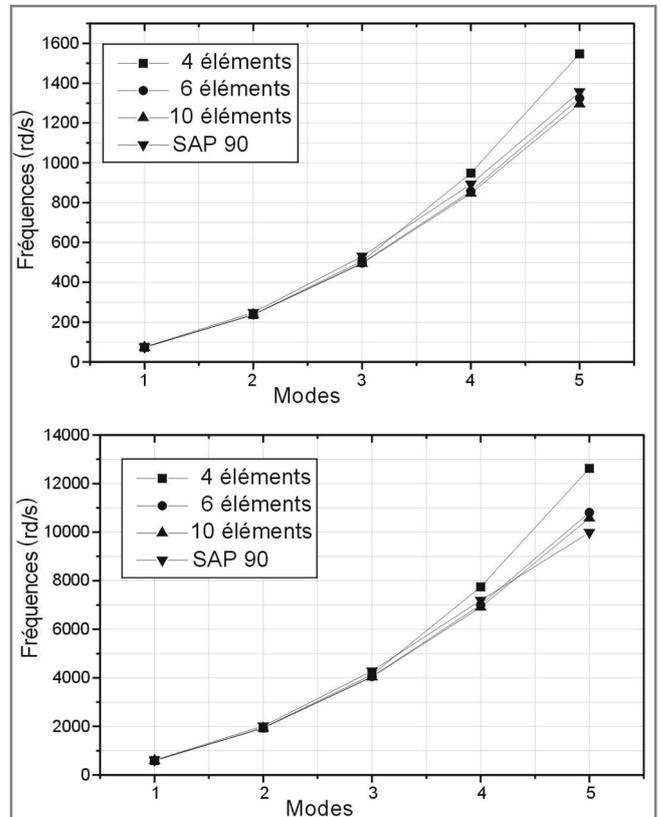


Figure 3: Poutre encastree-appuyée. Variation de la fréquence circulaire en fonction du nombre d'éléments; (a) pour  $L/h=100$ , (b) pour  $L/h=35$ .

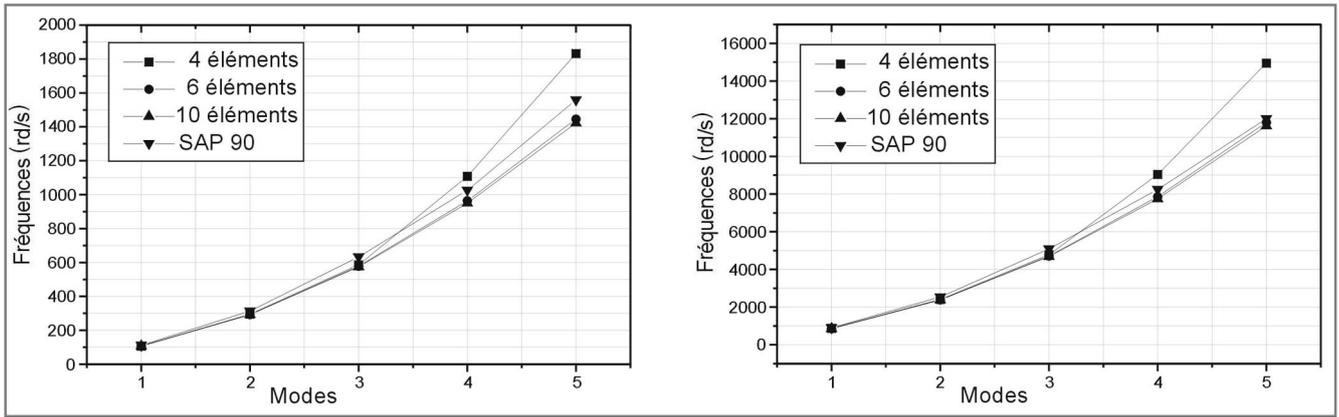


Figure 4: Poutre encastree-encastree. Variation de la frequence circulaire en fonction du nombre d'elements; (a) pour L/h=100, (b) pour L/h=35.

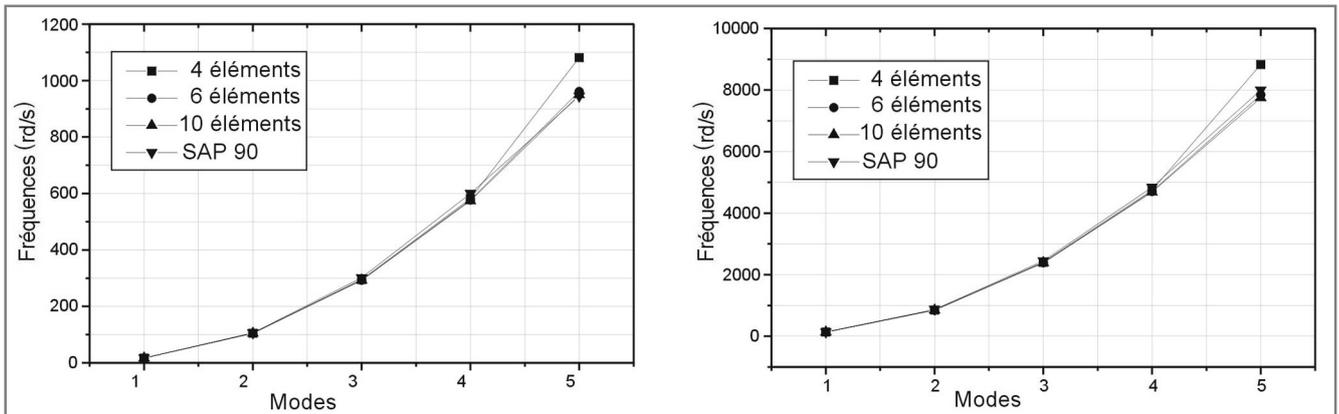


Figure 5: Poutre encastree-libre. Variation de la frequence circulaire en fonction du nombre d'elements; (a) pour L/h=100, (b) pour L/h=35.

Tableau 1: Fréquences naturelles (kHz) d'une poutre simplement appuyée.

L/h	Modes	TPS	Chandrashekhara	Yildirim	Modèle présent	
					(Eq.1)	(Eq.2)
120	1	0.051	0.051	0.051	0.050858	0.05079
	2	0.203	0.203	0.202	0.20342	0.2024
	3	0.457	0.454	0.451	0.45771	0.4527
	4	0.812	0.804	0.795	0.81371	0.7982
	5	1.269	1.262	1.229	1.2714	1.232
15	1	0.813	0.7550	0.7560	0.813718	0.7565
	2	3.25	2.548	2.544	3.25487	2.551
	3	7.314	4.716	4.711	7.323466	4.715
	4	13.002	6.960	6.956	13.01949	6.948
	5	20.316	9.194	9.195	20.34296	9.168

Les résultats de l'équation (1) (basée sur l'hypothèse de Bernoulli - Euler), comparés à ceux de la théorie classique des stratifiés (TPS), montrent un écart inférieur à 0.2%.

Les résultats de l'équation (2), (basée sur l'hypothèse de Timoshenko), comparés à ceux de Chandrashekhara et de Yildirim montrent un écart variant entre 0.07 et 0.4%

Le tableau 2 reporte, pour les autres cas d'appuis, les fréquences naturelles du mode fondamental sous forme non

$$\text{dimensionnelle } \varpi = \sqrt{(\rho / E_1 h^2)} \omega L^2 .$$

Il s'ensuit que les valeurs obtenues par le modèle développé sont sensiblement les mêmes que celles reportées par les articles sus mentionnés pour la poutre simplement appuyée et la console; pour les deux autres cas d'appuis, elles sont légèrement supérieures.

Ces comparaisons ont permis d'une part, de vérifier la validité du modèle proposé et, d'autre part, de montrer que pour un ordre de précision sensiblement équivalent à celui donné par un calcul par éléments finis ou par la méthode

**Tableau 2:** Fréquences naturelles pour les autres cas d'appuis ( $l/h=15$ ).

	Chandrashekhara	Yildirim	Modèle présent	
			(Eq.1)	(Eq.2)
Encastrée - Encastrée	4.6602	4.5869	6.0695	5.687
Encastrée - Libre	0.9231	0.9215	0.9538	0.91308
Encastrée - Appuyée	3.5446	3.5183	4.1827	3.9191

des matrices de transfert, le modèle simple que nous avons développé s'est avéré suffisant et satisfaisant pour les cas étudiés.

### CONCLUSION

En calculant la rigidité homogénéisée à partir de celle des différentes couches, un modèle de calcul des fréquences propres d'une poutre composite multicouche symétrique est développé. Le code de calcul correspondant est introduit dans un logiciel de calcul pour poutres homogènes modifié à l'occasion. Les différentes vérifications effectuées montrent une bonne corrélation entre les valeurs calculées à partir du modèle et les valeurs numériques données par SAP90. La comparaison des résultats obtenus avec d'autres modèles trouvés dans la littérature est aussi très satisfaisante. Cependant, ce travail ne représente qu'une première approche du problème, et plusieurs prolongements sont envisageables.

### REFERENCES

- [1]- Hodges D.H., Atilgan A.R., Fulton M.V., and Rehfield L.W., "Free-vibration analysis of composite beams", *Journal of the American Helicopter Society*, 36, (1991), pp. 36-47.
- [2]- Chandrashekhara K., Krishnamurthy K., Roy S., "Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation", *Composites and Structures*, 14, (1990), pp. 269-279.
- [3]- Banerjee J.R., Williams F.W., "Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications", *Journal Of Sound and Vibration*, 194 (4), (1996), pp. 573-585.
- [4]- Yildirim V., Sancaktar E., Kiral E., "Free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach", *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 15, (1999), pp. 651-660.
- [5]- Aouissate K., "Programmation et calcul des poutres composites multicouches symétriques", *2<sup>ème</sup> Colloque Maghrébin en Génie Civil*, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie (2002).
- [6]- Paz M., "Structural Dynamics", *Van North Chapman et Hall*, (1997) □

