

ETUDE DES CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES DES PROFILES D'AILES D'AVION DE FORME ELLIPTIQUE ET DE FORME PLANE ARBITRAIRE

Reçu le 26/01/2000 - Accepté le 04/11/2001

Résumé

Dans ce travail, les propriétés d'une aile d'avion avec des distributions différentes de circulation ont été décrites. Ces distributions sont considérées avec des formes elliptiques et arbitraires, qui représentent analytiquement une aile d'avion avec une traînée minimale. Il était convenable de représenter cette distribution de circulation en termes de séries infinies ou les premiers termes décrivent la distribution elliptique.

Les résultats ainsi obtenus montrent que les propriétés aérodynamiques des ailes de formes arbitraires ne diffèrent pas radicalement de celle des ailes de formes elliptiques.

Mots clés: *aérodynamique, aile d'avion, forme elliptique, forme arbitraire, circulation, séries.*

Abstract

In this paper, the aerodynamic property of an airplane wing with different distribution of circulation has been described. These distributions were considered with elliptic and arbitrary forms, which represent analytically the airplane wing with a minimal drag. It was convenient to represent this circulation distribution in terms of an infinite series, where its first terms describe the elliptic distribution.

Then, the results obtained show that the aerodynamic properties of airplane wings with arbitrary forms do not differ obviously from that of wings with elliptic forms.

Key words: *aerodynamic, airplane wing, elliptical form, arbitrary form, circulation, series.*

A. MERABET

B. NECIB

Laboratoire de mécanique
Département de Génie Mécanique
Faculté des sciences de l'ingénieur
Université Mentouri
Constantine, Algérie

ملخص

يتضمن هذا المقال وصفا للخصائص الأيروديناميكية لجناح طائرة ذات انتشار جريان عشوائي. انتشار هذا الجريان يكون على أشكال إهليلجية أو أشكال مختلفة والتي تمثل تحليليا جناح طائرة ذات قيمة جرّ دنيا. لذا يستحسن تمثيل انتشار هذا الجريان على شكل سلاسل غير منتهية. العبارة الأولى توصف انتشار إهليلجي.

توضح النتائج المحصل عليها أن الخصائص الأيروديناميكية للأجنحة ذات أشكال عشوائية لا تختلف جذرياً عن الأجنحة ذات أشكال إهليلجية.

الكلمات المفتاحية: الخصائص الأيروديناميكية، جناح الطائرة، أشكال إهليلجية و مختلفة، انتشار، سلاسل.

L'aérodynamique des profils d'ailes a été étudiée par Kutta (1902) sur des profils squelettes et Joukowski (1905) sur des profils présentant de l'épaisseur. Ces profils étaient obtenus par la transformation conforme d'un cercle en un contour fermé avec un arrondi à l'avant et une pointe à l'arrière. La théorie de Joukowski en mouvement plan, dite théorie de l'aile d'envergure infinie, marque le début de l'aérodynamique moderne. A la même époque, les travaux des pionniers de l'aviation, les frères Wright, qui se sont basés sur l'analyse de la stabilité de l'avion faite par Lanchester en 1894 [1,4], permettent de faire voler un avion. Parallèlement, les études expérimentales prennent un nouvel essor par l'essai en souffleries de maquettes faites en Angleterre par Wenham et Philips. Un pas nouveau fut franchi par Prandtl [3, 12, 19] qui édifia la théorie de l'aile d'envergure limitée (1917-1918).

Cette théorie donna un nouvel essor à l'aérodynamique. Pendant vingt ans, les théories de Joukowski et de Prandtl furent les points de départ de nombreux travaux théoriques et expérimentaux, et nous permettent dans ce contexte de décrire les propriétés aérodynamiques de l'aile de distribution elliptique [5, 6] et de distribution de forme arbitraire. Cette distribution représente l'aile avec une traînée minimale; il est alors convenable de présenter cette distribution de circulation en terme de séries infinies [13-18]. Le premier terme décrit une distribution elliptique, faisant que les propriétés aérodynamiques des ailes de forme planes arbitraires ne diffèrent pas radicalement de celles des ailes elliptiques.

Une définition géométrique des profils d'ailes est donnée sur la figure 1 [20-26].

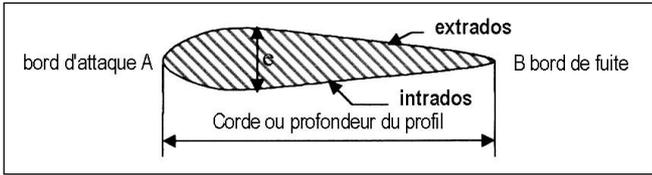


Figure 1: Géométrie du profil d'aile.

I- ETUDE DE L'AILE PLANE A ENVERGURE FINIE

I.1-Théorie tourbillonnaire de l'aile

Les différents types de circulation sur une aile à envergure finie sont représentés sur la figure 2.

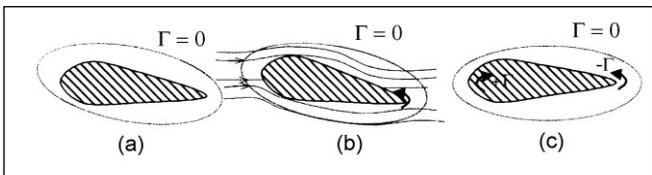


Figure 2: Schéma descriptif du tourbillonnement de l'aile à envergure finie.

Sur la figure 2a, le fluide est supposé au repos et la circulation Γ sur un contour C entourant l'aile est nulle, autrement dit

$$\Gamma = \int \vec{V} \cdot d\vec{L} = 0 \quad (1)$$

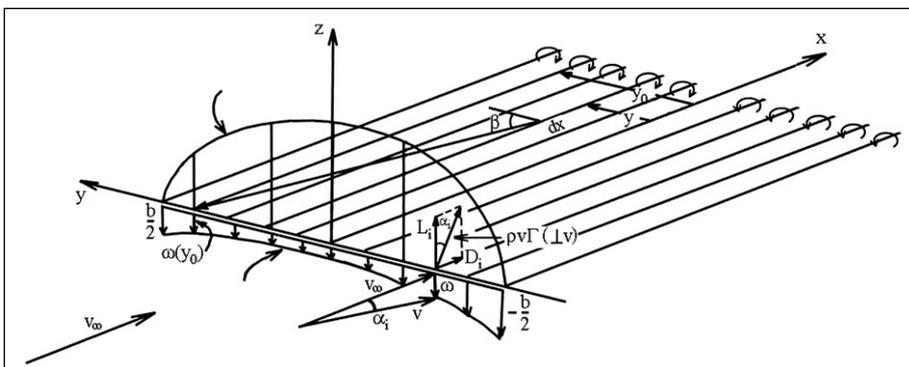
Sur la figure 2b, le fluide est mis en mouvement, on constate que le tourbillon formé au bord de fuite de l'aile finit à s'en détacher.

Sur la figure 2c, le tourbillon de démarrage emporte avec lui une circulation Γ tandis que l'aile, de son côté, développe une circulation opposée.

I.2- Champ de flux autour des ailes planes à envergure finie

Considérons une aile d'avion d'envergure finie. A la limite, lorsque la distribution de circulation devient stationnaire et continue, comme montré sur la figure 3, le changement de circulation $d\Gamma$ du tourbillon sur n'importe quel point de l'aile est donné théoriquement par:

Figure 3: Distribution de circulation due aux tourbillonnements.



$$d\Gamma = \frac{d\Gamma}{dy} \cdot dy$$

La vitesse résultante sur l'aile a deux composantes V_∞ et $\omega(y)$ en n'importe quel point, définissant un angle d'attaque induit $\alpha_i(y)$ donné par:

$$\alpha_i(y) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{V_\infty} \right) \quad (2)$$

où ω est la vitesse induite et V_∞ est la vitesse d'incidence de l'avion.

A partir du théorème de Kutta-Joukowski [21], une force $(\rho \cdot V \cdot \Gamma)$ est générée perpendiculairement au sillage induit et à la vitesse V. Cette force est inclinée d'un angle α_i (appelé angle induit) par rapport à l'axe Z.

Celle-ci a une composante de portance (L_i), normale à V_∞ , donnée par:

$$L_i = \rho \cdot V \cdot \Gamma \cdot \cos \alpha_i \quad (3)$$

et une composante de traînée (D_i), appelée traînée induite, donnée par:

$$D_i = -\rho \cdot V \cdot \Gamma \cdot \sin \alpha_i \quad (4)$$

Dans la plupart des applications pratiques, le sillage induit est petit puisque la vitesse induite en valeur absolue est inférieure à la vitesse d'incidence, c'est-à-dire $|\omega| < V_\infty$.

Ceci montre que : $\tan \alpha_i \approx \alpha_i$.

En conséquence, les formules précédentes deviennent:

$$\alpha_i(y) = \frac{\omega}{V_\infty} \quad (5)$$

$$L(y) = \rho \cdot V_\infty \cdot \Gamma \quad (6)$$

$$D_i(y) = -L \cdot \alpha_i = -\rho \cdot \omega \cdot \Gamma \quad (7)$$

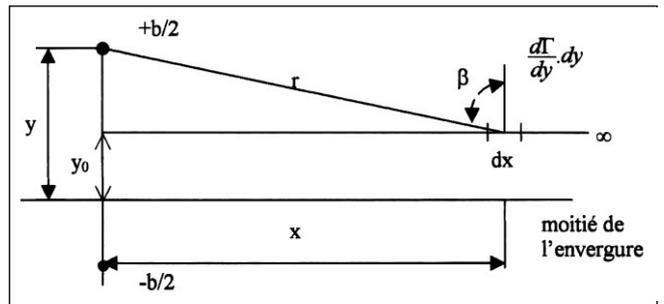


Figure 4: Diagramme de calcul de la vitesse induite d'un filament d'intensité $d\Gamma$.

On note en particulier que la traînée induite D_i est une composante de la force de Kutta-Joukowski dans la direction de V_∞ . En utilisant la loi de Biot-Savat [26], on calcule la vitesse induite et l'angle d'attaque induit; La figure 4 représente le cas $Z = 0$.

Cette loi donne l'expression suivante:

$$d\omega y_0 = -\frac{d\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\cos \beta \cdot dx}{r^2} \quad (8)$$

Le filament du tourbillon entier y est ainsi donné par:

$$\omega y_0 y = -\frac{d\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta \cdot dx}{r^2} = -\frac{d\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{y_0 - y} \quad (9)$$

Après intégration et en divisant par V_∞ , on obtient la vitesse induite à y_0 :

$$\alpha_i(y_0) = \frac{\omega y_0}{V_\infty} = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} \cdot dy \quad (10)$$

C'est une expression qui donne l'angle d'attaque induit et la vitesse induite comme étant une fonction de y_0 le long de l'envergure.

II- LES EQUATIONS FONDAMENTALES DES CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES DES AILES D'AVION DE DIFFERENTS PROFILS

L'équation fondamentale qui doit être résolue pour trouver la distribution de circulation pour une aile d'avion finie est exprimée comme étant une équation reliant trois angles α_a , α_0 et α_i (Fig.5), représentant respectivement les angles d'attaque absolu, effectif et induit.

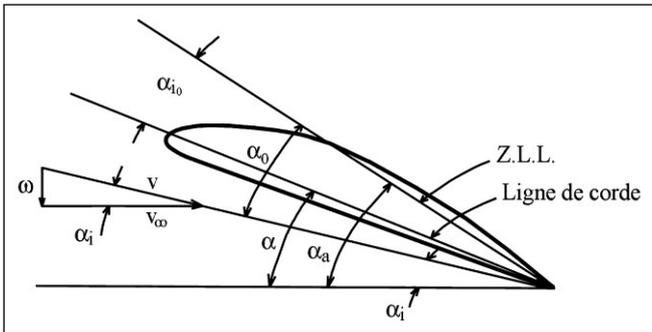


Figure 5: Diagramme fondamental de la théorie de l'aile plane à envergure finie.

La relation qui relie les angles d'attaque aérodynamiques est donnée par:

$$\alpha_a = \alpha_0 - \alpha_i = \alpha \pm \alpha_{L0} \quad (11)$$

avec α et α_{L0} les angles géométriques pour une station d'envergure y donnée. L'angle d'attaque effectif α_0 satisfait la propriété suivante:

$$C_L = m_0 \cdot \alpha_0 \quad (12)$$

m_0 varie selon le type du profil; $m_0 = 2\pi$ pour une aile mince.

On peut également définir Cl par:

$$C_L = m \cdot \alpha_a \quad (13)$$

où m est une fonction de α_i ; la relation entre m_0 et m est donc:

$$m = \frac{m_0}{1 - m_0 \cdot \alpha_i / C_L} = \frac{m_0}{1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_0}} \quad (14)$$

Pour la résolution du problème, et en posant:

$$\rho \cdot V_\infty \cdot \Gamma = m_0 \cdot \alpha_0 \cdot q_\infty \cdot C = m_0 \cdot \alpha_0 \cdot \frac{1}{2} \rho \cdot V_\infty^2 \cdot C \quad (15)$$

nous déduisons l'expression de α_0 :

$$\alpha_0 = \frac{2\Gamma}{m_0 \cdot V_\infty \cdot C} \quad (16)$$

Par suite, l'équation fondamentale dans sa forme finale est obtenue en substituant les équations (10) et (16) dans l'équation (11):

$$\alpha_a(y_0) = \left(\frac{2\Gamma}{m_0 \cdot V_\infty \cdot C} \right) y_0 + \frac{1}{4\pi V_\infty} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} \cdot dy \quad (17)$$

La seule inconnue dans l'intégrale de cette équation différentielle est la circulation Γ .

II.1- Les caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes de forme elliptique

Un cas spécial important est le cas de la distribution de circulation elliptique. Cette distribution représente l'aile avec une traînée induite minimale.

Les propriétés des ailes de forme planes arbitraires ne diffèrent pas radicalement de celles des ailes elliptiques. Il est toutefois nécessaires d'écrire les propriétés de l'aile elliptique.

Si Γ_S représente la circulation dans un plan de symétrie, la variation de circulation elliptique avec l'envergure est:

$$\Gamma = \Gamma_S \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^2} \quad (18)$$

L'angle d'attaque induit est trouvé en introduisant l'équation (18) dans l'équation (9):

$$\alpha_i(y_0) = \frac{\Gamma_S}{4\pi V_\infty} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dY} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^2} \cdot \frac{1}{y_0 - y} \cdot dy \quad (19)$$

L'intégrale est aisément déterminée après la substitution trigonométrique $y = \left(\frac{b}{2} \right) \cdot \cos \theta$ (Fig.6).

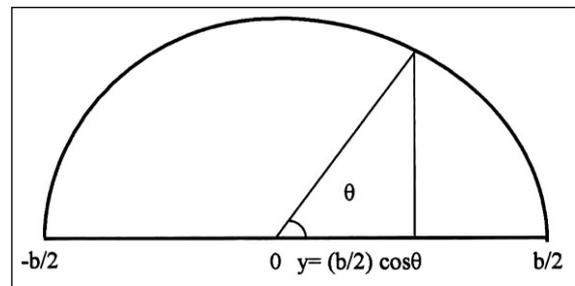


Figure 6: Interprétation trigonométrique.

L'équation (19) devient :

$$\alpha_i(\theta_0) = \frac{\Gamma_S}{2\pi b V_\infty} \int_0^\pi \frac{d \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \quad (20)$$

sachant que:

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0}$$

Notre cas correspond à $n = 1$.

L'angle d'attaque induit devient:

$$\alpha_i = \frac{\Gamma_S}{2b V_\infty} \quad (21)$$

A partir des équations (15) et (18), la portance elliptique est:

$$L = \rho V_\infty \Gamma_S \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2} = m_0 \alpha_0 \cdot \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot C \quad (22)$$

Ainsi, le coefficient de portance C_L est défini comme étant la portance totale de l'aile L divisé par le produit de la pression dynamique q_∞ et la surface de l'aile S .

$$C_L = \frac{L}{q_\infty \cdot S} = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot S} \int_{-b/2}^{b/2} L \cdot dy = \frac{\Gamma_S \cdot \pi b}{2 V_\infty \cdot S} \quad (23)$$

L'équation (23) est résolue pour Γ_S , et cette valeur est utilisée dans l'équation (22) qui donne l'expression pour l'angle d'attaque induit pour une distribution elliptique.

$$\alpha_i = \frac{\omega}{V_\infty} = \frac{C_L}{\pi \cdot A} \quad (24)$$

où A est l'allongement: $A = b^2/S$ (25)

En substituant l'équation (24) dans l'équation (4), le coefficient de traînée induite de l'aile elliptique est donné par:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \cdot A} \quad (26)$$

L'équation (14) devient:

$$m = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{\pi \cdot A}} \quad (27)$$

II.2- Les caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes de forme arbitraire

Il est possible de présenter une distribution de circulation arbitraire en termes de séries infinies, le premier terme décrivant une distribution elliptique. L'équation (18) peut être écrite de la manière suivante:

$$\Gamma = \Gamma_S \cdot \sin \theta \quad (28)$$

Prandtl considéra une distribution de circulation exprimée par les séries de Fourier.

Une présentation dimensionnelle correcte d'une circulation symétrique arbitraire peut être mise sous la forme suivante:

$$\Gamma_S = \frac{1}{2} m_{0S} C_S V_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (29)$$

En substituant l'équation $y = \frac{b}{2} \cos \theta$ dans l'équation

(17), on aura:

$$\alpha_a(\theta) = \frac{1}{2} m_{0S} C_S V_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta_0 + \frac{m_{0S} \cdot C_S}{4\pi \cdot b} \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \quad (30)$$

Après différentiation et intégration, en utilisant l'équation (20), l'équation (30) se réduit à:

$$\alpha_a(\theta) = \underbrace{\frac{m_{0S} C_S}{m_0 C} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta}_{\alpha_0} + \underbrace{\frac{m_{0S} C_S}{4b} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot A_n \cdot \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}}_{-\alpha_i} \quad (31)$$

L'indice S se réfère aux valeurs du plan de symétrie C .

Les coefficient de portance et de traînée induite sont trouvés par substitution à partir des équation (29) et (31) dans les équations (6) et (7) respectivement.

$$C_L = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{q_\infty \cdot C} = \frac{m_{0S} \cdot C_S}{C} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (32)$$

$$C_{Di} = C_L \cdot \alpha_i = \frac{m_{0S}^2}{4b \cdot C} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} \quad (33)$$

Pour la dernière série, dans l'équation (33), l'indice n est remplacé par k pour éviter la confusion en multipliant les deux séries.

Le coefficient de portance totale de l'aile est déterminé en intégrant (32):

$$C_L = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{c_l q_\infty \cdot c \cdot dy}{q_\infty \cdot S} = \frac{m_{0S} \cdot C_S}{C} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \cdot \frac{b}{2} \sin k\theta \cdot d\theta \quad (34)$$

Sachant que:

$$\int_0^\pi \sin n\theta \cdot \sin k\theta \cdot d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{\pi}{2}, & n = k \end{cases} \quad (35)$$

Puisque $k = 1$ dans l'équation (34), alors toutes les intégrales, sauf pour $n = 1$, sont nulles, et le coefficient de portance de l'aile devient:

$$C_L = \frac{m_{0S} \cdot C_S \cdot \pi \cdot b}{4 \cdot S} \cdot A_1 \quad (36)$$

Le coefficient de traînée induite totale de l'aile est calculé en intégrant l'équation (33) et en exprimant dy en terme de $d\theta$.

$$C_{Di} = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{c_{di} \cdot q_\infty \cdot c}{q_\infty \cdot S} \cdot dy \quad (37)$$

$$C_{Di} = \frac{m_{0S} \cdot C_S^2}{8 \cdot S} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot A_n \cdot A_k \cdot \sin n\theta \cdot \sin k\theta \cdot d\theta \quad (38)$$

Lorsque $k = n$, l'équation (38) se simplifie:

$$C_{Di} = \frac{m_{0S}^2 \cdot C_S^2 \cdot \pi}{16 \cdot S} \sum_{k=1}^{\infty} n \cdot A_n^2 \quad (39)$$

Pour une distribution de portance elliptique (désignée par el), l'équation (26) devient: $(C_{Di})_{el} = \frac{C_L^2}{\pi \cdot A}$

De cette expression et des expressions de C_L et C_D donnée par les équations (36) et (37) respectivement, on aura, pour une distribution de portance symétrique arbitraire:

$$C_{Di} = (C_{Di})_{el} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot A_n^2}{A_1^2} = (C_{Di})_{el} (1 + \sigma) \quad (40)$$

où:
$$\sigma = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n A_n^2}{A_1^2} \right) \quad (41)$$

σ est le facteur de correction.

II-3. Calcul des caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes d'avion de forme carré et elliptique

L'analyse des résultats est maintenant appliquée pour calculer les caractéristiques aérodynamiques d'une aile rectangulaire de différents allongements: $A=6$, $A=7$ et $A=8$, volant à un angle d'attaque α dans le domaine subsonique.

On considère que le profil est non cambré; alors, l'angle d'attaque absolu α_a est égale à α le long de l'envergure, et les sections de l'aile ne varient pas. On aura donc:

$$A - \frac{b^2}{S} = 6, 7 \text{ ou } 8$$

$C = C_S$ et $m_0 = m_{0S} = 2\pi$; ainsi, l'équation (31) devient:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \left(1 + \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot A \sin \theta} \right) = \alpha \quad (42)$$

Pour une aile symétrique, les coefficients A_n varient pour toute valeur de n .

Cas 1 : $A = 6$:

L'équation (42) pour chaque station $\theta = \cos^{-1}(2y/b)$ devient:

$$A_1 \sin \theta \left(1 + \frac{\pi}{12 \sin \theta} \right) + A_3 \sin 3\theta \left(1 + \frac{\pi}{4 \sin \theta} \right) + A_5 \sin 5\theta \left(1 + \frac{5\pi}{10 \sin \theta} \right) + A_7 \sin 7\theta \left(1 + \frac{7\pi}{12 \sin \theta} \right) = \alpha \quad (43)$$

Il suffit de choisir quatre stations le long de la demi envergure, vu la symétrie de l'aile rectangulaire.

Pour $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{2}$, on obtient un système de quatre équations simultanément linéaires pour les coefficients A_n qui sera résolu par la méthode de Gauss [2].

$$\left. \begin{aligned} 0.7618 A_1 + 2.5708 A_3 + 1.8090 A_5 - 1.8326 A_7 &= \alpha \\ 0.9690 A_1 + 1.4925 A_3 - 2.0161 A_5 - 2.2397 A_7 &= \alpha \\ 0.6445 A_1 + 2.8200 A_3 + 4.0805 A_5 + 2.2153 A_7 &= \alpha \\ 1.2618 A_1 - 1.7854 A_3 + 2.3090 A_5 - 2.8306 A_7 &= \alpha \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\text{Programme de Gauss} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} A_1 &= 0.9267 \alpha \\ A_3 &= 0.1067 \alpha \\ A_5 &= 0.0192 \alpha \\ A_7 &= 0.0095 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$C_L = \pi^2 \frac{A_1}{2} = 4.588\alpha$$

$$(C_{Di})_{el} = \frac{(C_L^2)}{\pi \cdot A} = 1.1168\alpha^2 \quad (46)$$

$$\sigma = \frac{3 \cdot A_3^2 + 5 \cdot A_5^2 + 7 \cdot A_7^2}{A_1^2} = 0.042417$$

$$C_{Di} = (C_{Di})_{el} (1 + \sigma) = 1.16417\alpha^2$$

qui est approximativement 4.07% plus grand que $(C_{Di})_{el}$.

$$(C_L)_{el} = \frac{m_0 \alpha}{1 + \left(\frac{m_0}{\pi \cdot A} \right)} = 4.7106\alpha$$

L'inclinaison du coefficient de portance $\frac{dC_L}{d\alpha}$ de l'aile rectangulaire est approximativement 2.6026% plus petite que celle de l'elliptique.

Cas 2 : $A = 7$:

L'équation (42) devient:

$$A_1 \sin \theta \left(1 + \frac{\pi}{14 \sin \theta} \right) + A_3 \sin 3\theta \left(1 + \frac{3\pi}{14 \sin \theta} \right) + A_5 \sin 5\theta \left(1 + \frac{5\pi}{14 \sin \theta} \right) + A_7 \sin 7\theta \left(1 + \frac{\pi}{2 \sin \theta} \right) = \alpha \quad (47)$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{2}$, on obtient un système de quatre

équations simultanément linéaires pour les coefficients A_n qui sera résolu par la méthode de Gauss.

$$\left. \begin{aligned} 0.7244 A_1 + 2.3464 A_3 + 1.6220 A_5 - 2.0708 A_7 &= \alpha \\ 0.9315 A_1 + 1.3803 A_3 - 1.8291 A_5 - 2.2780 A_7 &= \alpha \\ 0.6070 A_1 + 2.5491 A_3 + 3.6326 A_5 + 1.9534 A_7 &= \alpha \\ 1.2243 A_1 - 1.6731 A_3 - 2.1220 A_5 - 2.5700 A_7 &= \alpha \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\text{Programme de Gauss} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} A_1 &= 1.0213 \alpha \\ A_3 &= 0.0938 \alpha \\ A_5 &= 0.0345 \alpha \\ A_7 &= 0.0078 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$C_L = \pi^2 \frac{A_1}{2} = 5.048\alpha$$

$$(C_{Di})_{el} = \frac{(C_L^2)}{\pi \cdot A} = 1.1155\alpha^2$$

$$\sigma = \frac{3 \cdot A_3^2 + 5 \cdot A_5^2 + 7 \cdot A_7^2}{A_1^2} = 0.0314$$

$$C_{Di} = (C_{Di})_{el} (1 + \sigma) = 1.19137\alpha^2 \quad (50)$$

qui est approximativement 3% plus grand que $(C_{Di})_{el}$.

$$(C_L)_{el} = \frac{m_0 \alpha}{1 + \left(\frac{m_0}{\pi \cdot A} \right)} = 4.8855\alpha$$

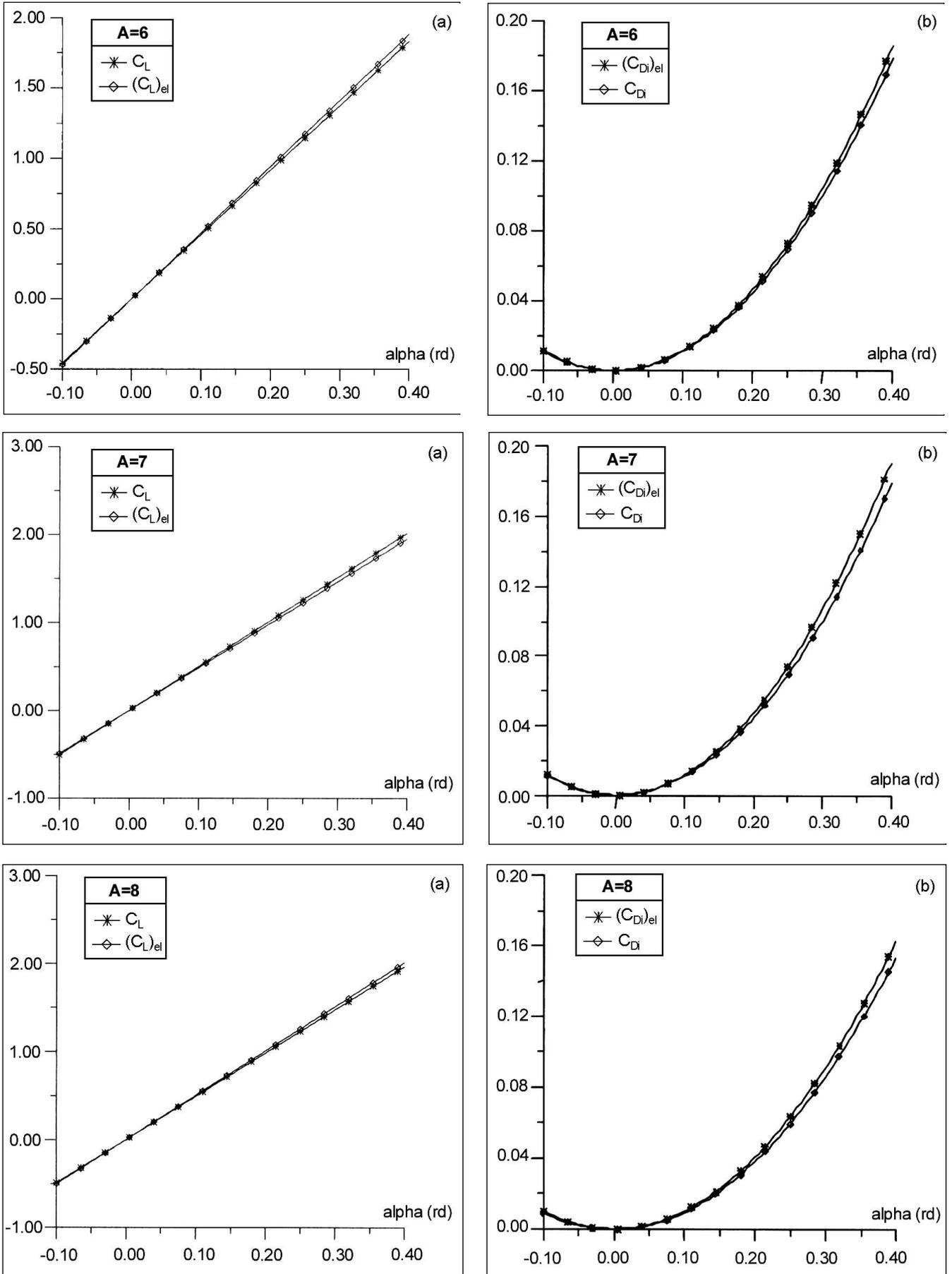


Figure 7: Caractéristiques aérodynamiques des ailes rectangulaire et elliptique: (a) Courbe de portance; (b) courbes de traînée.

L'inclinaison du coefficient de portance $\frac{dC_L}{d\alpha}$ de l'aile rectangulaire est approximativement 3% plus petite que celle de l'elliptique.

Cas 3 : A = 8 :

L'équation (42) devient:

$$\begin{aligned} A_1 \sin \theta \left(1 + \frac{\pi}{16 \sin \theta}\right) + A_3 \sin 3\theta \left(1 + \frac{3\pi}{16 \sin \theta}\right) + \\ A_5 \sin 5\theta \left(1 + \frac{5\pi}{16 \sin \theta}\right) + A_7 \sin 7\theta \left(1 + \frac{7\pi}{16 \sin \theta}\right) = \alpha \end{aligned} \quad (51)$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{2}$, on obtient un système de quatre équations simultanément linéaires pour les coefficients A_n qui sera résolu par la méthode de Gauss.

$$\left. \begin{aligned} 0.6963 A_1 + 2.1781 A_3 + 1.4817 A_5 - 1.8744 A_7 &= \alpha \\ 0.9034 A_1 + 1.2961 A_3 - 1.6888 A_5 - 2.0815 A_7 &= \alpha \\ 0.5790 A_1 + 2.3459 A_3 + 3.2940 A_5 + 1.7571 A_7 &= \alpha \\ 1.1963 A_1 - 1.5890 A_3 + 1.9817 A_5 - 2.3744 A_7 &= \alpha \end{aligned} \right\} (52)$$

$$\text{Programme de Gauss} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} A_1 &= 0.9940 \alpha \\ A_3 &= 0.1338 \alpha \\ A_5 &= 0.0268 \alpha \\ A_7 &= 0.0125 \alpha \end{aligned} \right\} (53)$$

$$\begin{aligned} C_L &= \pi^2 \cdot A_1/2 = 4,9052\alpha \\ (C_{Di})_{el} &= C_L^2/\pi \cdot A = 0,9573 \cdot \alpha^2 \\ \sigma &= \frac{3A_3^2 + 5A_5^2 + 7A_7^2}{A_1^2} = 0,0601 \\ C_{Di} &= (C_{Di})_{el}(1 + \sigma) = 1.0148\alpha^2 \end{aligned} \quad (54)$$

qui est approximativement 5,66% plus grand que $(C_{Di})_{el}$.

$$(C_L)_{el} = \frac{m_0 \alpha}{1 + \left(\frac{m_0}{\pi \cdot A}\right)} = 5.0245\alpha$$

L'inclinaison du coefficient de portance $\frac{dC_L}{d\alpha}$ de l'aile rectangulaire est approximativement 2.35% plus petite que celle de l'elliptique.

III- ANALYSE DES RESULTATS

En comparant les résultats de notre analyse concernant le profil d'aile elliptique et celui d'une aile rectangulaire pour les allongements A= 6, 7 et 8, on aura deux types de courbes:

a) Courbe des portances (Figures 7a)

- La variation du coefficient de portance avec l'angle d'attaque α est linéaire; elle est proportionnelle à l'angle d'attaque α .

- A 0° , on obtient déjà un coefficient de portance positif, quel que soit le profil d'aile.

b) Courbe des traînées (Figures 7b)

La variation du coefficient de traînée induite avec l'angle d'attaque α est parabolique ($C_{Di}, (C_{Di})_{el} = f(\alpha^2)$).

- La traînée induite est minimale aux environ de 0° .

- Si l'angle d'attaque est légèrement négatif, le coefficient de traînée induite tend vers zéro.

- Jusqu'à 6° , l'augmentation de la traînée induite n'est pas très rapide; au fur et à mesure que l'angle croît, elle devient considérable.

Finalement, on peut déduire, d'après les résultats obtenus et les graphes tracés (Fig. 7), que les propriétés des profils d'ailes de forme plane arbitraires sont presque semblables aux profils elliptiques.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons développé les équations fondamentales pour le calcul des caractéristiques aérodynamiques des ailes elliptiques et des ailes de forme plane arbitraire. L'analyse de ces équations est basée essentiellement sur la théorie de Kutta-Joukowski et de Prandtl. Les équations finales ont été appliquées pour calculer les caractéristiques aérodynamiques d'une aile rectangulaire. En second lieu, notre approche consistait à comparer ces propriétés avec celles des ailes elliptiques dans le domaine subsonique. On a pu déduire que les propriétés des ailes de forme plane arbitraire ne diffèrent pas radicalement de celles de forme elliptique.

Une aile elliptique est techniquement difficile à construire sans compter son coût. Les ailes de forme plane arbitraire et les ailes elliptiques possédant les mêmes caractéristiques aérodynamiques, il serait préférable de construire une aile rectangulaire non conique, puisque l'aile rectangulaire non chanfreinée a une longueur de corde constante le long de l'envergure.

REFERENCES

- [1]- Sherwood H., "The first to fly, Aviation's pioneer days", Simon and Schuster Ed., New York, (1970).
- [2]- Blum E.K., "Numerical analysis and computation theory and practice", Addison-Wesley Ed., 1972.
- [3]- Mc Cormick B.W., "Aerodynamics aeronautics and flight mechanics", 2d edition, Ed. Wiley, New York, (1995), pp.112-119.
- [4]- Rasmussen M.L. and Smith D.E., "Lifting-line theory for arbitrary shaped wings", *Journal of Aircraft*, 36, 2, (1999), pp.340-348.
- [5]- Van Dam C.P., Vijgen P.M.H.W., Holmes B.J., "Aerodynamic characteristics of Grescent and elliptic wings at high angles of attack", *AIAA of aircraft*, 28, 4 April (1991).
- [6]- Klunker E.B., "Contribution to methods for calculating the flow about thin lifting wings at transonic speeds – analytic expression for the far field", NASA TN D 6530, Nov. (1971).
- [7]- Carlson L.A., "Transonic Airfoil flow field analysis Cartesian coordinates", final report, NASA-CR-2577, Texas University, (1975).
- [8]- Carlson L.A., "A program for high lift separated flow about air foils", final report, NASA-CR-3376, Texas University, (1980).
- [9]- Henderson M.L., "A solution to the 2-D separated wake modeling problem and its use to predict CL max of arbitrary air foil sections", *AIAA Journal of Aircraft*, January (1978), pp.78-156.

- [10]- Zumwalt G.W. and Nark S.N., "An analytical model for highly separated flow on air foils at low speeds", Wichita, state university report AR-77-2, may (1977).
- [11]- Eppertev, R , and Somers, "A computer program for the design and analysis of low-speed airfoils, including transition", D-M NASATM-80210, august (1980).
- [12]- Somers D., "Subsonic natural-laminar-flow air foils, natural laminar flow and laminar flow control", Somers, Danm, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [13]- Schlichting H., "Boundary layer theory", Mc Graw Hill, 7th Edition (1979).
- [14]- Hennes P.A., "Applied computational aerodynamics", *AIAA Journal of Aircraft*, (1990).
- [15]- Aboutt I.H. and Von Doenhoff A.E., "Theory of wing sections", Dover publications , Inc, (1979).
- [16]- Hoak D.E. and Ellison D.E., "USAF stability and control datcom", Air force flight dynamics laboratory, Base, Ohio, (1968).
- [17]- Eggers A.J. *et al.*, "The generalized shock-expansion method and application to bodies traveling at high supersonic air speeds", *Journal Aerospace Sciences*, April (1977).
- [18]- Kats J. and Plotkin A., "Low-speed aerodynamics", Chapter 8, McGraw-Hill, New York, (1991).
- [19]- Kuethe A.M. and Schetzer J.D., "Foundations of aerodynamics bases of aerodynamic design", Chapter 6, 4th Edition, Wiley, New York (1986).
- [20]- Anderson J.D., "Fundamentals of aerodynamics", 2nd Ed., McGraw Hill, New York (1991).
- [21]- Anderson J.D., Corda S. and Van Wie S.M., "Numerical lifting-line theory applied to dropped leading-edge wings below and above stall", *Journal of Aircraft*, 17, 12, (1980), pp.898-904.
- [22]- Philips W.F. and Snyder D.O., "Modern adaptation of Prandl's classic lifting-line theory", *Journal of Aircraft*, 37, 4, (2000), pp.662-670.
- [23]- Bauer F., Garabedian P., "Supercritical wing", Ed. Springer Verlag, N.Y. and West Germany, section II, vol. 108, (1975).
- [24]- Roskam J., "Methods for estimating stability and control derivatives of conventional subsonic airplanes", Kansas, 66044, third printing (1977).
- [25]- Roskam J., "Airplane flight dynamics and automatic flight controls", Kansas, (1979).
- [26]- Whitcomb R.T., "Review of NASA superficial airfoils", *ICAS paper*, N° 74, 10, June (1974). □