

Modélisation de la convection naturelle et thermocapillaire dans une cavité contenant un fluide à faible nombre de Prandtl

Reçu le 22/04/2002 – Accepté le 11/02/2007

Résumé

On étudie numériquement l'effet combiné des forces de gravité et thermocapillaire sur l'écoulement d'un liquide à faible nombre de Prandtl ($Pr = 0,015$) se trouvant dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée. La méthode numérique des volumes finis est utilisée pour discrétiser les équations différentielles partielles du modèle mathématique. La structure de l'écoulement et le champ thermique sont illustrés par des contours des lignes de courants et des isothermes.

Mots-clés : Convection naturelle, Convection Thermocapillaire, Fluide à faible nombre de Prandtl

Abstract

We study the combined effect of buoyancy and thermocapillary forces on the flow of a low Prandtl number liquid ($Pr = 0.015$) contained in a rectangular cavity with differentially heated vertical end walls. The finite volume method was used to discretize the partial differential equations of the mathematical model. The flow structure and thermal fields are represented by stream functions and isotherms.

Key words : Natural convection, Thermocapillar convection, low Prandtl number liquid

O. KHOLAI

M.S. BOULAHLIB

M. KADJA

Département Génie Mécanique
Université Mentouri Constantine
Algérie

Lorsque la surface libre d'un bain liquide est soumise à un fort gradient thermique horizontal, il apparaît des mouvements de convection naturelle dus à la variation de densité provenant, d'une part de la dépendance de la densité à la température de fluide, Karcher et al [1] et d'autre part de la dépendance de la densité à la concentration du fluide où à un gradient de tension superficielle, Tsuguo et al [2], Kawamura et al [3], Briskman et Schwab [4] et Kamotani [5]. Ce phénomène suscite beaucoup d'intérêt à la fois pour son aspect fondamental et pour ses nombreuses applications pratiques, en particulier dans l'industrie métallurgique.

Le présent travail consiste à étudier la combinaison des forces de volume (de gravité) et thermocapillaire dans un écoulement convectif d'un fluide contenu dans une cavité ouverte, où l'écoulement est induit par la différence de température entre les deux parois verticales isothermes. La surface libre (l'interface liquide-gaz) et le gradient de température imposé, sont générées simultanément la convection naturelle (due à la variation de densité dans le liquide) d'une part et la convection thermocapillaire (due au gradient de la tension superficielle induit par le gradient de température le long de l'interface liquide-gaz) d'autre part. De nombreux travaux de recherches numériques et expérimentaux ont été publiés sur chacun de ces deux types de convection, les plus récents sont ceux de Kyu et al [6], Schwab [7], Behnia et al [8] et Rudraiah [9].

L'objet de ce travail est de présenter un modèle numérique en mesure de considérer simultanément les deux types d'écoulements. L'interaction de la convection naturelle et la convection thermocapillaire se trouve dans un large domaine d'intérêt pratique, tel que le moulage, la croissance de monocristaux à partir d'un bain fondu dans un environnement de micro-gravité, où un gradient de température horizontal est appliqué le long de l'interface liquide-gaz, Kamotani et al [10] et Benhadid et al [11].

L'étude est faite pour un liquide à faible nombre de Prandtl ($Pr = 0,015$) dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée.

ملخص

ندرس عددياً تأثير إشتراك القوة الطفوئية و القوة السطحية على الإنسياب لسائل يتميز بعدد برنتل ضعيف ($Pr=0.015$) منحس في تجويف مستطيل الشكل مع إخضاع جانبيه الشاقوليان لدرجاتي حرارة مختلفتين. الطريقة العددية للأحجام المتناهية أستعملت لتبسيط المعادلات التفاضلية الجزئية للنموذج الرياضي. نسيج الإنسياب و المجال الحراري يوضحان بدالة الجريان و خطوط تساوي الحرارة على التوال

الكلمات المفتاحية: القوة السطحية على الإنسياب لسائل- بعدد برنتل ضعيف

Le rapport d'aspect $A=L/H=4$. Les forces ascensionnelles sont caractérisées par le nombre de Grashof $Gr = g\beta G_h H^4/\nu^2$ et les forces thermocapillaires par le nombre Reynolds- Marangoni $Rm = -\frac{\partial\sigma}{\partial T} G_h \frac{H^2}{\rho\nu^2}$ avec $G_h = \frac{\Delta T}{L}$, la différence de température horizontal étant $\Delta T = |T_1 - T_2|$.

1. MODELE MATHEMATIQUE

1.1 Equations du modèle

On considère une cavité rectangulaire bidimensionnelle ouverte, de hauteur H et de longueur L (avec un rapport d'aspect constant A). Les deux parois verticales de cette cavité sont maintenues aux températures T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$ (figure 1). Cette cavité est remplie par un fluide de faible nombre de Prandtl (métal liquide) $Pr = \nu/\alpha$.

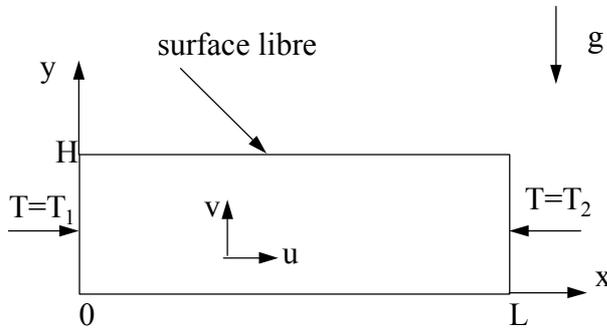


Figure 1 : Géométrie du problème

La surface supérieure libre est supposée plate, Viviani et al [13] et Christopher et Wang [14] (c'est à dire $Ca = |\partial\sigma/\partial T| \Delta T / \sigma_0 \ll 1$), et soumise à une tension superficielle variant linéairement avec la température $\sigma = \sigma_0 [1 - \gamma(T - T_0)]$ où $\gamma = -(1/\sigma_0)(\partial\sigma/\partial T)$ est le coefficient de température dû à la tension superficielle et l'indice 0 dénote l'état de référence $T_0 = (T_1 + T_2)/2$. Le fluide qui est au-dessus de l'interface est supposé un gaz dont la viscosité et la conductivité sont négligeables, et par conséquent, n'influent pas sur les champs d'écoulement et de température au sein du liquide.

Le liquide est supposé visqueux, quasi- incompressible et obéit à l'approximation de Boussinesq : $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T_1 - T_0)]$.

Le problème est traité sous une forme générale en utilisant une adimensionnalisation adéquate à l'aide des échelles suivantes : H , H^2/ν , $\nu Gr^{0.5}/H$, $\rho(\nu/H)^2$ et $\Delta T/A$ pour la longueur, le temps, la vitesse, la pression et la température respectivement. Les paramètres du problème sont : le rapport d'aspect A , le nombre de Prandtl Pr , le nombre de Grashoff Gr et le nombre de Reynolds-Marangoni Rm .

Les équations adimensionnelles sont représentées par : l'équation de continuité, les équations de quantité de mouvement et l'équation d'énergie.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Gr^{0.5} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Gr^{0.5} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Gr^{0.5} \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Gr^{0.5} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

u et v étant les composantes de la vitesse dans les directions x et y respectivement, θ la température adimensionnelle,

$Gr = g\beta G_h H^4/\nu^2$ et $Rm = -\frac{\partial\sigma}{\partial T} G_h \frac{H^2}{\rho\nu^2}$ avec $G_h = \frac{\Delta T}{L}$

1.2. Conditions aux limites

La condition dynamique au niveau de l'interface liquide- gaz relie le gradient de vitesse au gradient de température à travers la formule adimensionnelle suivante (Benhadid et al 1992).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{Rm}{Gr^{0.5}} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5)$$

Les conditions sur les limites horizontales sont :

$$u(x,0) = v(x,0) = 0, \quad v(x,1) = 0 \text{ et}$$

$$\theta(x,0) = \theta(x,1) = A - x \text{ (limites conductrices)}$$

Les conditions aux limites sur les parois rigides verticales sont :

$$\theta(0,y) = A, \quad \theta(A,y) = 0$$

et

$$(0,y) = u(0,y) = v(A,y) = u(A,y) = 0$$

L'effet de la déformabilité de l'interface n'est pas pris en compte dans cette étude à cause du faible nombre de capillarité (cas des métaux liquide). Les équations (1) – (4) avec les conditions aux limites ci-dessus sont destinées à modéliser ce problème avec une interface plate. Cette supposition est valable dans les applications où le fluide utilisé est un métal liquide [13 – 14] ($Pr \ll 1$) ; ce qui est le cas de notre travail.

2. METHODE NUMERIQUE

Les équations (1)-(4) du modèle mathématique avec les conditions aux limites ont été discrétisées en utilisant la méthode numérique des volumes finis. Pour l'évaluation des termes convectifs, on a opté pour le schéma numérique de différences centrées CDS (Patankar, 1980). La discrétisation temporelle est faite en utilisant une méthode complètement implicite. Pour le traitement du problème de couplage vitesse et pression dans les équations de quantité de mouvement, on a utilisé l'algorithme SIMPLER (S. Patankar, 1980). Les systèmes algébriques obtenus pour chaque variable ont été résolus par l'algorithme TDMA (Tri- Diagonal Matrix Algorithm). Le critère de convergence est basé sur la variation relative maximale des variables u , v et θ entre deux incréments de temps successifs.

La solution des équations de Navier-Stokes est supposée atteinte lorsque les résultats deviennent indépendants du temps avec une variation maximale sur les variables inférieure à 10^{-3} . Le maillage adopté dans les calculs est uniforme, de (80x30) points. Pour ce maillage, on a pu constater qu'il fallait 1000 à 2000 incréments de temps pour atteindre le régime permanent.

3. Résultats et discussions

Les résultats numériques obtenus pour la cavité en régime permanent sont présentés ci-dessous. L'effet des différents paramètres (Gr , Rm , Pr et A) sur la structure de l'écoulement est illustré par des contours des lignes de courant et des isothermes. Pour chacune des cas étudiés, on a obtenu un régime permanent stable, les champs des variables (u , v , p et T) obtenus pour une valeur du nombre de Reynolds-Marangoni Rm , sont utilisés comme des champs initiaux pour traiter le problème avec une autre valeur du Rm .

Les résultats ont été obtenus pour trois valeurs du nombre de Grashof ($Gr=3.10^3$, $Gr=6.10^3$ et $Gr=10^4$), avec un nombre de Reynolds-Marangoni Rm variant dans un large intervalle $67 \leq |Rm| \leq 10^4$ et un rapport d'aspect fixe. Pour chaque nombre de Grashof, deux situations ont été considérées : l'une avec des valeurs positives et l'autre avec des valeurs négatives du nombre de Reynolds-Marangoni Rm . Pour les valeurs positives de Rm (c-à-d $\partial\sigma/\partial T < 0$) la force thermocapillaire agit dans le sens inverse de la force gravitationnelle, cependant dans le cas des valeurs négatives de Rm (c-à-d $\partial\sigma/\partial T > 0$) la force thermocapillaire agit dans le même sens que la force gravitationnelle.

On commence par discuter les résultats pour le cas où le nombre de Reynolds-Marangoni Rm est positif. Aux faibles valeurs du nombre de Rm ($Rm=67$ et $Rm=500$), la situation correspond à un écoulement de convection naturelle presque pure, ce qui est montré par la structure d'écoulement et les isothermes sur les figures (5a et 5b), (6a et 6b) et (7a et 7b). On remarque que l'écoulement se caractérise principalement par une grande cellule occupant totalement la cavité et qui tourne dans le même sens des aiguilles d'une montre autour d'un point situé dans la région froide (partie droite de la cavité). L'allure des lignes isothermes correspondante à ces figures montre une forme légèrement déviée ce qui signifie que l'écoulement est du type convection naturelle de faible intensité.

En augmentant la valeur du nombre de $|Rm|$ (figures (5d et 5e), (6d et 6e) et (7d et 7e)), le sens de l'écoulement reste le même mais avec un vortex très intense et concentré autour d'un point plus proche de la paroi froide. En suivant le sens de l'écoulement (mouvement des particules fluides de la paroi chaude vers la paroi froide), on peut dire que cet écoulement est dû aux différences de températures T_1 et T_2 (convection naturelle), mais on constate que le vortex principal prend une structure différente de celle du 1^{er} cas discuté ci-dessus, ceci est dû à un phénomène autre que la convection naturelle. Ce phénomène influe directement sur la surface libre et provoque un gradient de vitesse normal à cette surface.

C'est la convection thermocapillaire qui domine dans ce cas. En plus, un autre vortex faible apparaît en bas de la cavité et qui tourne dans le sens inverse. La faiblesse de ce vortex se traduit par les lignes isothermes presque droites dans les $\frac{3}{4}$ de la partie droite de la cavité à l'opposé des lignes isothermes situées dans le vortex principal (coté gauche de la cavité) qui sont plus courbées. Les figures (5c), (6c) et (7c) montrent des cas intermédiaires entre un écoulement dominé par la convection naturelle et un écoulement dominé par la convection thermocapillaire (les deux phénomènes participent à constituer cet écoulement).

Quand $Rm > 0$, la force thermocapillaire agit au sens contraire de la force gravitationnelle, ce qui entraîne une compétition entre les deux forces. On peut remarquer toujours que pour des faibles Rm (figures (2a), (3a) et (4a)), la convection naturelle domine l'écoulement. Dans les figures (2b), (3b) et (4b et 4c), la compétition s'avère très remarquable et les deux convections participent à créer une structure d'écoulement se caractérisant par deux vortex le long de la cavité ; l'un situé en haut de la cavité et tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : il est causé par les forces thermocapillaires ; l'autre est situé en bas de la cavité et tourne au sens contraire du premier : il est dû aux forces gravitationnelles. En augmentant encore le nombre de Rm (figures (2d et 2e), (3d et 3e) et (4d et 4e)), on se trouve avec un écoulement dominé par la convection thermocapillaire dont la structure est similaire à celle des figures (5d et 5e), (6d et 6e) et (7d et 7e), mais avec un vortex situé dans la région froide de la cavité.

CONCLUSION

L'effet des forces thermocapillaires sur la structure de l'écoulement d'un fluide a été étudié pour les deux cas du nombre de Reynolds-Marangoni positif et négatif, à travers l'intervalle $67 \leq |Rm| \leq 10^4$ et pour trois valeurs du nombre de Grashof. La domination des forces thermocapillaires est clairement observée pour des petits nombres de Grashof $Gr=3000$ et $Gr=6000$ et pour des grands nombres de Reynolds-Marangoni $Rm=10000$. Pour des nombres de Rm et Gr de même ordre de grandeur, l'écoulement est stable et possède une seule zone de recirculation. Les résultats obtenus lors de cette étude sont en contradiction ceux de Benhadid et al 1990 peut être à cause de la méthode numérique utilisée par ces auteurs ou une fausse incorporation de la condition à l'interface (équation 5). Ces résultats peuvent être exploitées dans les procédés de préparation des cristaux semi-conducteurs dans un environnement de microgravité utilisés dans la fabrication des modules électroniques.

REFERENCES

- [1]- Karcher C., Kolesnikov Y., Andreev O. & Thess A. 2002, Natural convection in a liquid metal heated from above and influenced by magnetic field, Eur. J. Mech. B/Fluids, vol. 21, pp. 75-90.
- [2]- Zhong Z., Hiroshi M., Kiyoshi S., Tsugno F., Yoshiyaki K. & Kazuyuki H., 2002, Usefulness of experiments with model fluid for thermocapillary convection – effect of Prandtl number on two – dimensional thermocapillary convection, J. Crystal Growth, vol. 234, pp. 272-278

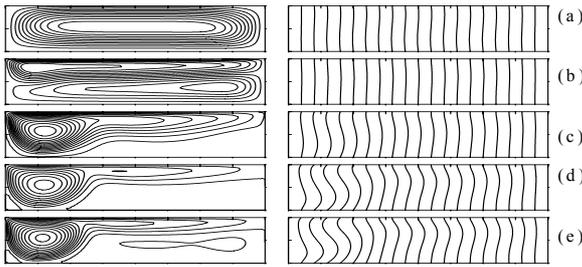


Figure 2 :
Lignes de courant et isothermes, $Gr = 3000$,
 $Rm > 0$: (a) $Rm = 67$, (b) $Rm = 500$,
(c) $Rm = 2 \times 10^3$, (d) $Rm = 6.67 \times 10^3$,
(e) $Rm = 10^4$

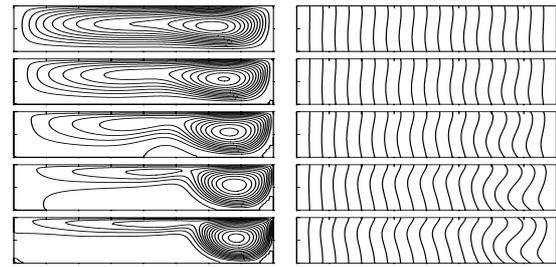


Figure 5 :
Lignes de courant et isothermes, $Gr = 3000$,
 $Rm < 0$: (a) $Rm = -67$, (b) $Rm = -500$,
(c) $Rm = -2 \times 10^3$, (d) $Rm = -6.67 \times 10^3$,
(e) $Rm = -10^4$

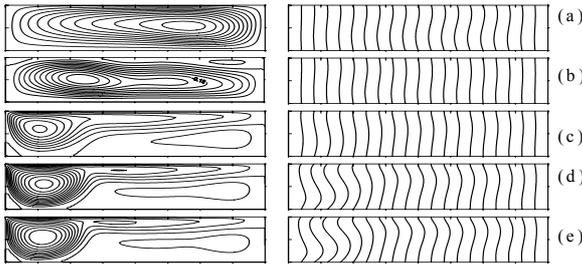


Figure 3 :
Lignes de courant et isothermes, $Gr = 6000$,
 $Rm > 0$: (a) $Rm = 67$, (b) $Rm = 500$,
(c) $Rm = 2 \times 10^3$, (d) $Rm = 6.67 \times 10^3$,
(e) $Rm = 10^4$

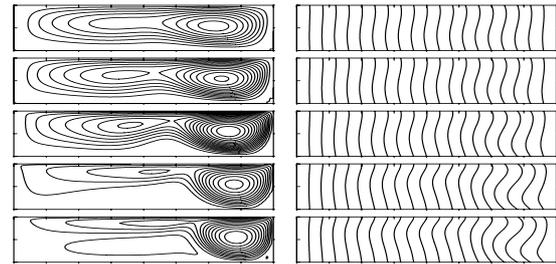


Figure 6 :
Lignes de courant et isothermes, $Gr = 6000$
 $Rm < 0$: (a) $Rm = -67$, (b) $Rm = -500$,
(c) $Rm = -2 \times 10^3$, (d) $Rm = -6.67 \times 10^3$,
(e) $Rm = -10^4$

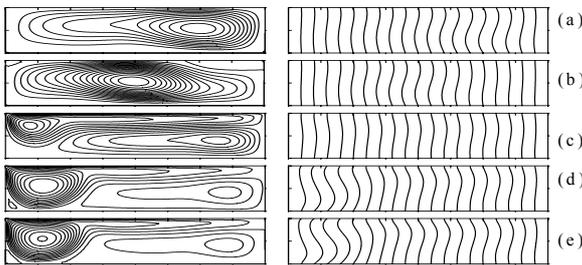


Figure 4 :
Lignes de courant et isothermes, $Gr = 10000$,
 $Rm > 0$: (a) $Rm = 67$, (b) $Rm = 500$,
(c) $Rm = 2 \times 10^3$, (d) $Rm = 6.67 \times 10^3$,
(e) $Rm = 10^4$

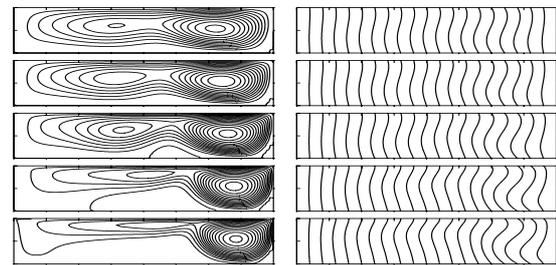


Figure 7 :
Lignes de courant et isothermes, $Gr = 10000$
 $Rm < 0$: (a) $Rm = -67$, (b) $Rm = -500$,
(c) $Rm = -2 \times 10^3$, (d) $Rm = -6.67 \times 10^3$,
(e) $Rm = -10^4$

- [3]- Kawamura H., Ueno I. & Shikawa T., 2002, Study of thermocapillary flow in a liquid bridge towards an on-orbit experiment aboard the international space station, *Adv. Space Res.*, vol. 29, N°4, pp. 611-618
- [4]- Chernatinsky V. I., Biriikh R. V., Briskman V. A. & Schwab D., 2002, Thermocapillary flows in long liquid bridges under microgravity, *Adv. Space Res.*, vol. 29, N°4, pp. 619-624
- [5]- Kamotani Y., 1999, Thermocapillary flow under microgravity – Experimental results, *Adv. Space Res.*, vol. 24, N°10, pp. 1357-1366
- [6]- Kyu-Jung L., Yasuhiro K. & Shinichi Y., 2002, Combined thermocapillary and natural convection in rectangular containers with localized heating, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 45, pp.4621-4630
- [7]- Shwab D., 2002, Buoyant – thermocapillary and pure thermocapillary convective instabilities in Czochralski systems, *J. Crystal Growth*, vol. 237, pp. 1849-1853
- [8]- Behnia M., Stella F. & Guj G., 1995, A numerical study of three – dimensional combined buoyancy and thermocapillary convection, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 21, N°3, pp. 529-542
- [9]- Rudraiah N., 1995, Combined surface tension and buoyancy driven convection in a rectangular open cavity in the presence of a magnetic field, *Int. J. Non – linear Mechanics*, vol. 30, N°5, pp.759-770
- [10]- Kamotani Y., Lee J. H. and Ostrash S., 1992, An experimental study of oscillatory thermocapillary convection in cylindrical containers, *J. Phys. Fluids A*, pp. 955-962
- [11]- Benhadid H., Laure P. and Roux B., 1990, Buoyancy and thermocapillary-driven flows in shallow open cavities, *Proc. VIIth S.M.F.S.M.*, pp. 309-314.