

## ANALYSE DES CONTRAINTES ELASTO-PLASTIQUES DANS UN CYLINDRE SOUS L'EFFET DE LA VARIATION DE LA PRESSION INTERNE

Reçu le 03/09/2006 – Accepté le 19/05/2007

### Résumé

Les corps cylindriques vierges soumis à des pressions internes ont une grande application dans le domaine de la mécanique tel que : les conduites d'eau, les gazoducs, les oléoducs, les turboréacteurs et les fusées ; et même dans la biomécanique tels que les tubes minces et les vaisseaux sanguins. En effet, sous l'effet des changements des pressions internes ou des changements de température, ces corps peuvent subir d'importante déformation élasto-plastique où le domaine des fissurations peut facilement apparaître d'où leur risque à un endommagement important ou à leur destruction. Pour cela, la détermination des zones élasto-plastiques de ces corps joue un rôle très important pour éviter leur fissuration et leur rupture. Notre travail consiste en l'analyse des contraintes limites élastiques et la détermination des zones plastiques en fonction de l'épaisseur d'un corps cylindrique homogène soumis à des changements de pressions internes. La mise en œuvre des équations élasto-plastiques utilisant la théorie de Tresca et leur résolution ont été considérées. Les contraintes radiales et circonférentielles à travers la zone élasto-plastique ont été déterminés et la fonction du potentiel plastique associée au critère de Von Mises nous a permis de déterminer l'allure des déformations élasto-plastiques en fonction de l'épaisseur de ce cylindre.

**Mots clés:** Corps cylindriques, tubes sous pression interne, vaisseaux sanguins, déformation élasto-plasticité, rayon limite de plasticité, Critère de Tresca

### Abstract

The cylindrical bodies have a great application in the field of mechanics such as: water or gas pipelines, tubes, turbojets and rockets as well as in biomechanics such as the thin tube and blood vessels. In fact, under the effect of the internal stresses, pressures or temperature changes, these bodies can undergo significant elasto-plastic deformations where the field of crack propagations can easily appear where the risk of their damage and their destruction. In this purpose, the determination of the elasto-plastic zones of these bodies play a very significant role to avoid their cracking and their damage. Our work consists on the ultimate elastic stress analysis and the determination of the plastic zones according to the thickness of a homogenous cylindrical body subjected to internal pressure changes. The implementation of the elasto-plastic equations using the theory of Tresca and their resolution has been considered. The radial and circumferential stresses through the elasto-plastic zone were found and the potential of the plastic function associated with Von Mises criterion allowed us to determine the elasto-plastic deformation forms in terms of the thickness of this cylinder.

**Keywords:** Cylindrical bodies, internal pressure in tubes, blood vessels, elasto-plasticity deformations, limit plastic radius, Tresca criterion.

Z. LABED

B. NECIB

Laboratoire de Mécanique  
Faculté des Sciences de  
l'Ingénieur  
Université Mentouri  
Constantine - Algérie

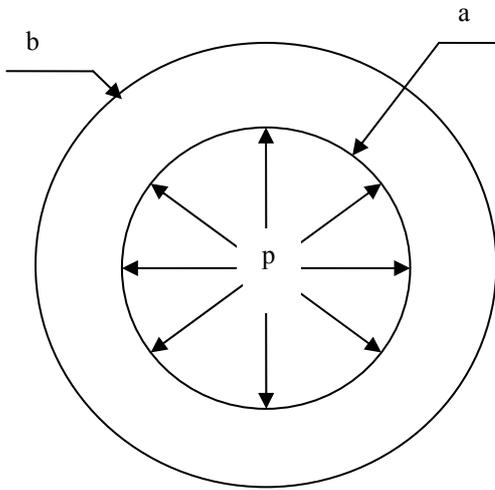
### ملخص

Le dimensionnement des corps cylindriques vierges soumis à des changements de pressions internes reste toujours un axe de recherche important dans le domaine de la mécanique et même de la biomécanique. En effet, l'augmentation de la pression à l'intérieur de ces corps peut provoquer d'importante déformation où le domaine des fissurations peut facilement apparaître d'où le risque de leur endommagement et de leur destruction.

En effet, le dimensionnement des chambres de combustion fait l'objet de plusieurs recherches à cause des pressions considérables produites par la combustion. Sous l'effet des contraintes internes, ces corps peuvent subir des fissurations très importantes, qui peuvent produire des fuites, des ruptures ou des explosions. Dans certaines situations, il est impossible de considérer toutes les contraintes qui agissent dans une structure comme appartenant au domaine élastique. Des contraintes supérieures à la limite d'écoulement du matériau peuvent se produire lorsqu'une structure est soumise à des sollicitations comme accidentelles ou exceptionnelles (pression interne). La structure doit alors résister sans s'effondrer, mais peut subir des déformations permanentes [1]. Par ailleurs et dans le domaine de la biomécanique, une petite variation de pression, hors de la limite élastique peut provoquer la fissuration d'un vaisseau sanguin ; d'où l'immobilisation du corps concerné [2].

Notre travail consiste à connaître la distribution des contraintes à travers l'épaisseur d'un corps cylindrique épais en matériau homogène, tout en faisant varier la pression interne (p)

En premier lieu pour déterminer ses limites élastiques puis pour pouvoir vérifier que la zone plastique se développe à partir de la face interne et enfin pour déterminer une relation entre le rayon de la zone plastique (c) et la variation de cette pression. L'intérêt primordial de ce travail est de déterminer la pression limite à la rupture par déformation excessive du corps, qui peut mettre à l'épreuve la structure de ce dernier avec d'autres, telles que les soudures d'où l'apparition des contraintes résiduelles. Le corps cylindrique considéré est un corps homogène en acier de rayon intérieur (a) et de rayon extérieur (b). En faisant l'hypothèse que le matériau est isotrope, de comportement élastique parfaitement plastique, la répartition des contraintes élasto-plastiques a été obtenue en utilisant comme critère de plasticité celui de Von Mises ou celui de Tresca. A l'état initial naturel, on soumet le corps à une pression normale uniforme (p) que l'on fait croître à partir de zéro (figure1).



**Figure 1 :** Pression interne appliquée dans le cylindre

**1. ANALYSE ÉLASTIQUE**

Le corps considéré est un cylindre axisymétrique en acier ayant les données techniques suivantes :  
 La contrainte limite élastique :  $p_{lim} = 100$  MPa  
 Le module d'Young :  $E = 70000$  MPa  
 Le coefficient de poisson :  $\nu = 0,3$   
 Les rayons du cylindre sont :  $r_1 = a$  et  $r_2 = b$

Dans notre cas, l'analyse élastique est très importante puisque l'étude élasto-plastique nécessite la connaissance des contraintes circonférentielles et radiales lors de la sollicitation élastique du cylindre [3]. Dans ce contexte, la méthode utilisée pour résoudre ce problème est basée sur l'introduction de la fonction d'Airy ( $\phi$ ) qui satisfait les conditions d'équilibre et de compatibilité ( $\nabla^4 = 0$ ) en utilisant les coordonnées polaires ( $r, \theta$ ) à une position longitudinale (Z) constante tout en négligeant les forces de masse de ce corps. Pour les corps axisymétriques, la fonction circonférentielle et de cisaillement sont exprimées à une position ( $r, \theta$ ) et en fonction de  $\phi$  par :

$$\phi(r) = Ar^2 \log r + Br^2 + C \log r + D \quad (1)$$

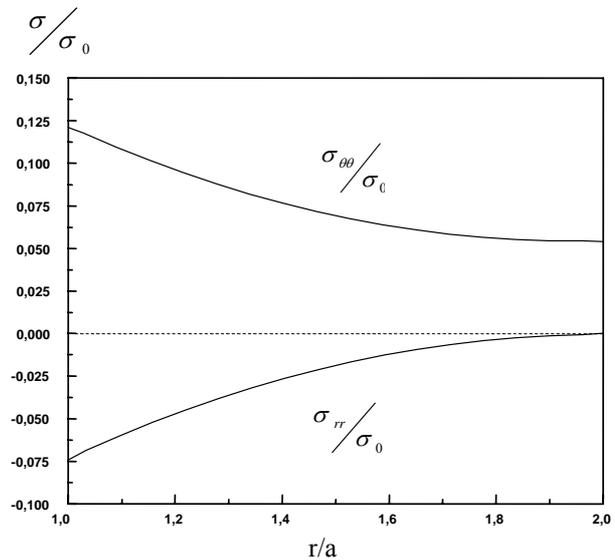
Où A, B, C et D sont des constantes qui seront déterminées utilisant les conditions aux limites des contraintes sur le cylindre. En fait, les contraintes radiales, d'Airy en coordonnée polaire est exprimée seulement en fonction de ( $r$ ) et elle est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

En utilisant les conditions aux limites, quand  $r = a$  où  $\sigma_{rr} = -p$  et quand  $r = b$  où  $\sigma_{rr} = 0$  ; on obtient comme résultats :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2pa^2 \nu}{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Le rapport des contraintes élastiques radiales et circonférentielles en fonction du rapport ( $r/a$ ) est présenté sur la figure 2, où  $\sigma_0$  est la pression interne appliquée (p).



**Figure 2 :** Distribution des contraintes élastiques radiale et circonférentielle à travers l'épaisseur du cylindre (zone élastique).

En effet il est clair de notifier que ces contraintes sont maximales sur la paroi interne du cylindre ( $r = a$ ) dû à l'application de la pression interne puis tendent progressivement vers zéro quand on s'approche du diamètre extérieur (b). Ceci peut expliquer le fait que si cette pression est proche à la limite élastique, le risque de la fissuration des corps non épais serait très probable.

## 2. ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE

Pour les corps cylindriques épais, soumis uniquement à des contraintes internes radiales, la théorie de l'état plan de contrainte est appliquée [4] ; et les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0 \quad (4) \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + F_z &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas axisymétrique et en négligeant les forces de masses  $\vec{F}$ , la première équation d'équilibre devient :

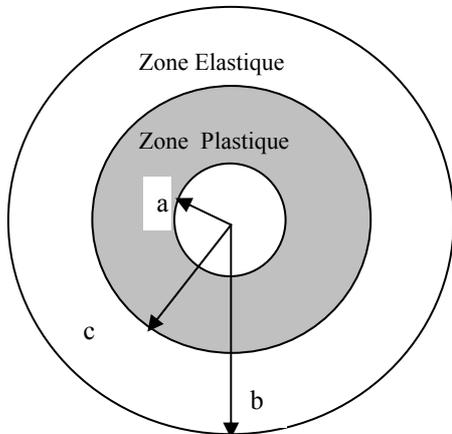
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (5)$$

Pour déterminer la pression critique dans le cylindre on applique le critère de Tresca, comme critère de la limite élastique [5] qui stipule que :  $\sigma_\theta > \sigma_r > \sigma_z$ , avec :  $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 > 0$

En substituant chaque contrainte par sa valeur respective on obtient :

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2p \left( \frac{b^2}{r^2} \right)}{\left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} = \sigma_0 \quad (6)$$

La variation croissante de la pression à l'intérieur du cylindre nous permet de constater le premier point de plasticité où  $r = a$  lorsque la pression  $p$  atteint sa valeur limite d'élasticité  $p_{lim}$ . A partir de cette valeur, une zone de plasticité totale de rayon  $(c)$  se développe en fonction de l'augmentation de la pression interne dans le cylindre d'où l'apparition d'une zone plastique et une autre zone élastique (figure 3).



**Figure 3** : Progression de la zone plastique à partir de la surface intérieure

La pression limite d'élasticité sur la face  $r = a$  est donc :

$$\sigma_0 = p_{lim} \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

D'où :

$$p_{lim} = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (7)$$

Lorsque la pression interne  $p$  croit au-delà de la valeur limite d'élasticité  $p_{lim}$  où le premier point plastique est apparu sur la face intérieure du cylindre, il est normal de supposer qu'une zone plastique se développe à partir de cette face, et occupe un volume de rayon  $r$  compris entre  $(a)$  et  $(c)$ , c'est-à-dire :  $(a \leq r \leq c)$ , où  $c$  est en fonction de la pression appliquée  $(p)$ . Tandis que la zone décrite par :  $(c \leq r \leq b)$  reste parfaitement élastique. Autrement dit, quand :  $r = c$ , la contrainte normale sera :  $\sigma_{rr} = \sigma_c = -q$ , qui représente la pression radiale critique de frontière. De cela on peut écrire que :

$$q = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (8)$$

Utilisant le critère de Tresca à l'équation (4) :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{\sigma_0}{r}$$

On trouve que :  $\sigma_{rr} = \sigma_0 \ln r + cte$

En appliquant les conditions aux limites pour  $(r = a)$  où  $\sigma_{rr} = -p$ , on aura :

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \ln \frac{r}{a} - p$$

En conséquence et à l'état critique quand  $r = c$  on a :

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \ln \frac{c}{a} - p = \sigma_c \quad (9)$$

Dans la zone élastique (figure 3) et quand  $r = c$  et employant l'équation 8,  $\sigma_0$  devient :

$$\sigma_0 = -\sigma_c \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \quad (10)$$

En éliminant  $\sigma_c$  des équations (9) et (10) où clairement on a une continuité de pression à  $r = c$ , on aura :

$$\frac{p}{\sigma_0} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\left( \frac{c}{a} \right)^2}{\left( \frac{b}{a} \right)^2} \right) + \ln \frac{c}{a}$$

Autrement dit :

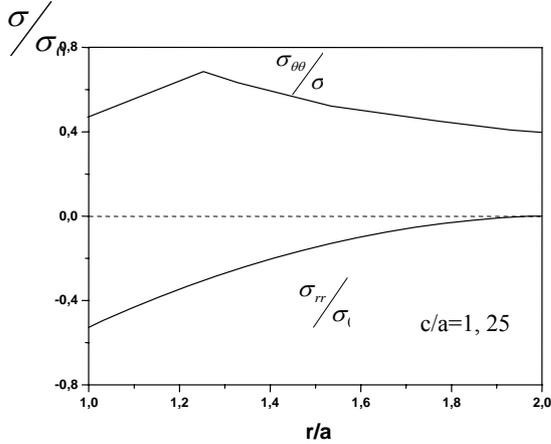
$$\frac{p}{\sigma_0} = \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (11)$$

Par ailleurs, la distribution des contraintes radiale et circonférentielle à n'importe quelle position  $(r)$  et pour différentes valeurs de  $(c)$  sont données par :

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \left[ \ln \frac{r/a}{c/a} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(c/a)^2}{(b/a)^2} \right) \right] \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0 \left[ \ln \frac{r/a}{c/a} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(c/a)^2}{(b/a)^2} \right) \right]$$

Dont leur allure respective est représentée sur la figure 4 en fonction du rapport radial ( $r/a$ ). Tandis que l'expression (11) nous permet de constater l'étendue de la zone de plasticité à n'importe quelle position du cylindre ( $c$ ) en fonction de la variation de la pression interne ( $p$ ).



**Figure 4 :** Distribution des contraintes élasto-plastiques radiale et circonférentielle à travers l'épaisseur du cylindre.

### 3. PLASTIFICATION TOTALE DU CYLINDRE

La plastification totale du cylindre est fonction de l'expansion radiale de la zone parfaitement plastique qui est contrôlée par la déformation élastique de la zone élastique qui l'entoure complètement où les déformations et les contraintes sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{rr} + 2\nu\varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr}) \end{aligned} \quad (14)$$

Où  $u_r$  et  $u_\theta$  sont les déplacements radial et circonférentiel. Et sachant que la déformation élastique se fait seulement radialement suivant la composante ( $r$ ), donc :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

Pour un petit élément du cylindre de dimension  $dr$  et  $d\theta$  où ( $c \leq r \leq b$ ), les forces d'équilibre de contrainte stipulent que :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{2(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})}{r}$$

En remplaçant on aura :

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} = \frac{2u_r}{r^2}$$

Après intégration et application des conditions aux limites, le déplacement radial sera :

$$u_r = \frac{3c^2 q r}{2E(b^2 - c^2)} \quad (15)$$

Substituant  $q$  par sa valeur et pour  $r = b$ , le déplacement s'exprime en fonction du rayon  $c$ , comme :

$$\frac{u_r}{b} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{c}{b} \right)^2 \quad (16)$$

Remplaçons l'équation (11) dans (16), pour obtenir une relation entre la pression appliquée  $p$  et l'élargissement radial du cylindre ( $u_r$ ) :

$$\frac{2p}{\sigma_0} = 1 - \frac{4}{3} \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_r}{b} + \ln \left( \frac{4}{3} \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_r}{b} \right) + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (17)$$

Qui est appliquée dans la zone  $a \leq c \leq b$ , autrement dit :

$$\frac{a^2}{b^2} \leq \frac{4}{3} \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_r}{b} \leq 1 \quad (18)$$

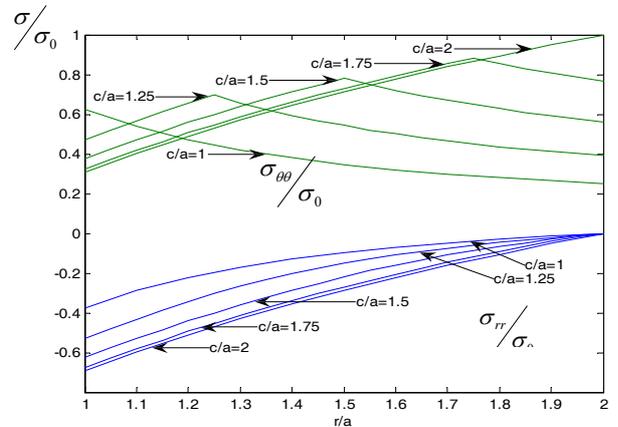
Ce qui explique que quand le cylindre est dans le domaine élastique l'équation (17) peut s'écrire de la forme suivante :

$$\frac{2p}{\sigma_0} = \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \left( \frac{4}{3} \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_r}{b} \right) \quad (19)$$

Par contre lorsqu'il est complètement plastifié et quand  $c = b$  l'équation (17) devient :

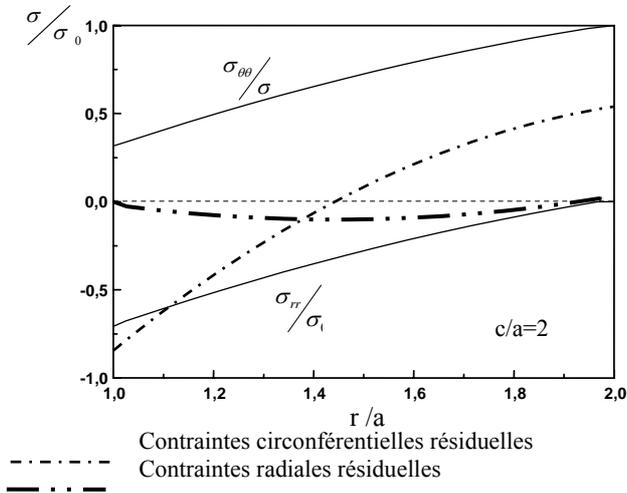
$$p_c = \sigma_0 \ln \frac{b}{a} \quad (20)$$

Cette équation représente la pression qui cause la plastification totale du cylindre et sa représentation est schématisée sur la figure 6.



**Figure 5 :** Distribution des contraintes élasto-plastiques pour différentes valeurs  $c/a$  et apparition des contraintes résiduelles

En fait la progression de la zone plastique à partir de la face intérieure en fonction du rayon  $c$  (figure 5) présente plusieurs niveaux des contraintes circonférentielles surtout quand  $c=b$  d'où la présence d'une différence de pression qui augmente en fonction de l'élargissement du rayon  $c$ . Cette dernière est appelée «contrainte résiduelle» et qui est répartie à l'intérieur du cylindre. En réalité, sans qu'aucune pression soit appliquée, ces contraintes résiduelles peuvent exister et sont réparties à l'intérieur de la structure et leur présence peut être bénéfique ou néfaste [9]. Dans notre cas, ces contraintes sont engendrées dans le cylindre quand on le charge à une pression  $p$  au-delà du domaine élastique, puis on le décharge; en conséquence, on obtient un champs de contraintes résiduelles radiales et circonférentielles pour la zone élastique  $a \leq r \leq c$  et pour la zone plastique  $c \leq r \leq b$ . Ces contraintes sont exprimées théoriquement par les systèmes d'équations (21) et (22) et sont représentées sur la figure 6.



**Figure 6 :** Distribution des contraintes parfaitement plastiques et des contraintes résiduelles à travers l'épaisseur du cylindre.

Contraintes résiduelles dans la zone élastique du cylindre :

$$\sigma_{rr} = \left[ 1 - \frac{(b/a)^2}{(r/a)^2} \right] \left[ \frac{-p}{(b/a)^2 - 1} + \frac{q(c/a)^2}{(b/a)^2 - (c/a)^2} \right] \quad (21)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left[ 1 + \frac{(b/a)^2}{(r/a)^2} \right] \left[ \frac{-p}{(b/a)^2 - 1} + \frac{q(c/a)^2}{(b/a)^2 - (c/a)^2} \right]$$

Contraintes résiduelles dans la zone plastique du cylindre :

$$\sigma_{rr} = -p \left[ 1 + \frac{1}{(b/a)^2 - 1} \left( 1 - \frac{(b/a)^2}{(r/a)^2} \right) \right] + \sigma_0 \ln \frac{r}{a} \quad (22)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p \left[ 1 + \frac{1}{(b/a)^2 - 1} \left( 1 + \frac{(b/a)^2}{(r/a)^2} \right) \right] + \sigma_0 \left( 1 + \ln \frac{r}{a} \right)$$

#### 4. DISCUSSION DES RESULTATS

Les résultats obtenus montrent que durant sa déformation, le cylindre passe par trois phases de déformation : élastique, élasto-plastique et parfaitement plastique.

Dans la phase élastique le matériau du cylindre obéit à la loi de l'élasticité linéaire et les contraintes radiales et circonférentielles (équation 3) sont présentées en fonction du rapport  $(r/a)$  sur la figure 2, où il est clair de notifier que ces contraintes sont maximales sur la paroi interne du cylindre  $(r/a=1)$  dû à l'application d'une pression interne  $(p=\sigma_0)$ . Par contre, quand  $r$  tend vers  $b$ , c'est à dire  $(r/a=2)$  la contrainte radiale s'annule, tandis que  $\sigma_{\theta\theta} = 0.05 \sigma_0$ . Ce qui explique le fait que lorsque le tube est très mince (c'est-à-dire  $b/a \approx 1$ ) la contrainte radiale sur la face (a) reste importante au voisinage de  $\sigma_0$ , et si cette dernière est proche à la limite élastique, un risque de la fissuration du cylindre serait très probable (cas de vaisseau sanguin). Dans la phase élasto-plastique on constate une propagation de la zone plastique de rayon  $r$  au fur et à mesure que la pression interne augmente au delà de la limite élastique (figure 3); par contre, quand  $r \geq c$ , la zone est élastique. En effet cet état est décrit par l'équation (11) et les résultats sont représentés sur la figure 4, pour un rapport de plasticité  $c/a = 1,25$ . On constate que dans la zone plastique les contraintes circonférentielle et radiale augmentent progressivement jusqu'à atteindre les rapports de  $c/a$  puis décroissent dans la zone élastique et tendent vers les valeurs décrites ultérieurement pour  $r/a=2$  où :

$$\sigma_{rr} = 0 \text{ et } \sigma_{\theta\theta} = 0.2 \sigma_0 .$$

Par ailleurs, un résumé des résultats est représenté sur la figure 5 pour plusieurs valeurs de  $c/a$ , où on remarque que le niveau des contraintes circonférentielles augmente en fonction de l'élargissement du rayon de plasticité  $c$ , d'où la présence d'une différence de pression qui augmente en fonction de l'élargissement du rayon  $c$ , ce qui explique la présence des contraintes résiduelles dans le cylindre.

Lorsque le rayon atteint la valeur maximale  $c=b$ , la plastification est totale et théoriquement décrite par l'équation logarithmique (20) et elle est représentée sur la figure 6 où les contraintes résiduelles sont aussi schématisées. Dans ce cas, la plastification est totale à travers toute l'épaisseur du cylindre. Il est clair de notifier que ces contraintes résiduelles sont plus importantes surtout quand le cylindre est épais et elles jouent un rôle important durant le chargement et le déchargement brusque du cylindre. Dans le cas où il n'y a pas de plastification après décharge il s'agit alors d'un régime de fonctionnement ordinaire. Si au contraire il y a plastification, des déformations plastiques cycliques vont se produire avec un phénomène de fatigue plastique qui conduira à la ruine et la destruction de la structure interne du cylindre. Donc, il serait plus important de connaître le niveau des contraintes résiduelles, pour pouvoir éviter la rupture du cylindre avant même d'atteindre sa limite élastique.

### CONCLUSION

Cette étude a été menée dans le but d'étudier le comportement d'un cylindre vierge sous l'effet de la variation d'une pression interne qui augmente régulièrement dans le tube. Elle nous a permis de déterminer la distribution des contraintes circonférentielles et radiales à travers le cylindre durant ses trois phases de déformation.

Il a été noté que quand le cylindre est très mince son risque de fissuration est très probable si la pression interne est au voisinage de la limite élastique. Par contre, quand il est épais, la zone élasto-plastique augmente en fonction de la pression interne jusqu'à atteindre son maximum et la plastification totale est atteinte.

Il a été noté que les contraintes circonférentielles augmentent en fonction de l'élargissement du rayon de plasticité ( $c$ ), ce qui entraîne l'apparition des contraintes résiduelles qui ont un effet néfaste sur la structure du cylindre ce qui peut provoquer l'apparition des fissurations ou même son éclatement.

### REFERENCES

- [1]- R.Hill. "The Mathematical Theory of Plasticity" 1950
- [2]- Coe JD, et al. "Biomechanical evaluation of cervical spinal stabilization in human cadaveric model". Spine 1989; 14:1122-31
- [3]- S.Timoshenko, J .N.Goodier "Theory of Elasticity" McGraw Hill, New York 1951
- [4]- G. Duvant "Mécanique du Milieu continu" Masson, Paris 1990
- [5]- W.Johnson , P.B Mellor "Engineering Plasticity" VNR London 1980
- [6]- A.Mendelson, Plasticity "Theory & Application" 1986
- [7]- A.Aloisio Ernesto "Nonlinear analysis reinforced concrete cylindrical shells"2002
- [8]- X-L.Gao "Elasto-plastic analysis of an internally pressurised thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory".Int.J.Solides Stuct 2003
- [9]- T.Mac Lan Nguyen-Tajan "Prise en compte des contraintes résiduelles de traitement thermique dans la prédiction de la tenue en service des culasses en aluminium" Mécanique & Ind 2005