

1. MODELE DE COMPORTEMENT EN COMPRESSION

Un modèle d'élasticité linéaire est utilisé pour la partie réversible de la déformation et une approche basée sur la plasticité avec écrouissage isotrope est employée pour la partie irréversible de la déformation. Le taux de déformation total $d\varepsilon$ est donc décomposé en un taux de déformation élastique $d\varepsilon_e$ et un taux de déformation plastique $d\varepsilon_c^p$ associé à la compression [6,9] :

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_c^p \quad (1)$$

d'où :

$$d\sigma = D_e \cdot d\varepsilon_e = D_e \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon_c^p) \quad (2)$$

avec :

D_e la matrice élastique définie par la loi de Hooke.

Le modèle nécessite la définition d'une surface de charge qui caractérise le critère de plastification, une loi d'écoulement plastique, une loi d'écrouissage, et une condition d'effondrement.

La fonction de charge pour le béton sous un état de contrainte biaxial est généralement supposée dépendre de deux invariants du tenseur de contraintes. Une fonction de charge de type Drucker- Prager dépendant du premier invariant du tenseur des contraintes I_1 et du second invariant du tenseur déviateur des contraintes J_2 a donc été adopté [4]:

$$F = \frac{C\sqrt{j_2} + DI_1}{f_c(k)} - 1 = 0 \quad (3)$$

L'expérience a montré que de la dépendance de la fonction de charge en J_2 et I_1 , donne des résultats assez satisfaisants et de plus une telle forme simplifie beaucoup les calculs.

Les constantes C et D sont déterminées comme suit :

$$C = \frac{\sqrt{3}(2\mu - 1)}{\mu} \quad (4);$$

et

$$D = \frac{\mu - 1}{\mu} \quad (5);$$

e t

$$\mu = \frac{f_{bc}}{f_c} \quad (6)$$

avec :

f_c : contrainte de résistance à la compression simple;

f_{bc} : contrainte de résistance à la compression biaxiale.

Pour μ nous adoptons la valeur de 1.16 provenant des résultats expérimentaux de Kupfer [5,6]

2. MODELE DE COMPORTEMENT EN TRACTION

Le comportement bidimensionnel du béton est basé sur le critère de Rankine [8] pour la traction. L'évolution de l'état de fissuration est prise en compte par la mise à zéro

du module d'élasticité selon la direction fissurée et par la redistribution des contraintes correspondantes.

L'emploi d'un terme de cisaillement fonction de l'ouverture de la fissure, dans la matrice d'élasticité de l'élément fissuré, permet de simuler l'engrènement des agrégats. L'adhérence entre le béton et les barres d'acier est considérée parfaite.

Le béton fissuré est traité comme un matériau orthotrope avec des axes d'orthotropie parallèles et normaux à la direction de la fissure [2]. L'effet de Poisson est négligeable à cause du manque d'interaction entre les deux directions orthogonales après fissuration et le module d'élasticité du béton normal à la direction de la fissure est réduit à zéro.

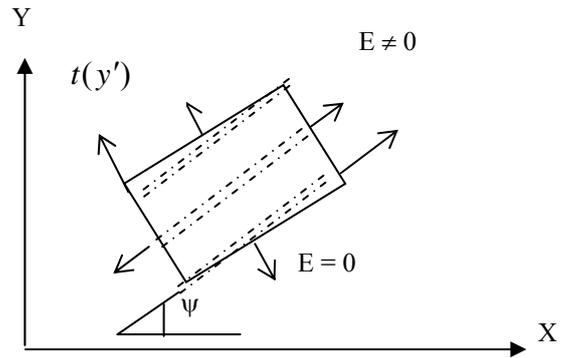


Figure 1 : Représentation d'une fissure continue

Les contraintes totales après fissuration sont données par rapport aux axes de coordonnées locales (n,t) par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} = [D_c] \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

avec :

E_b : module d'élasticité du béton,

β : paramètre de cisaillement du béton ($0 < \beta < 1$),

G : module de cisaillement du béton,

$[D_c]$: matrice d'élasticité après fissuration dans le repère local (n,t)

Le module de cisaillement G est réduit par le facteur de cisaillement β qui est compris entre 0 et 1.

$$0 \leq \beta \leq 1$$

Dans beaucoup d'application, la valeur de β est prise égale à 0 quand la fissure est ouverte et égale à 1 quand la fissure est fermée. Ceci implique qu'il n'y a pas d'effet d'engrènement quand la fissure est ouverte et un rétablissement parfait (perfect healing) quand la fissure est fermée.

Afin de transformer les contraintes du béton d'un repère local à un repère global (figure 1), on utilise la procédure suivante :

$$[D] = [P]^T \cdot [D_c] \cdot [P] \quad (8)$$

avec :

$$[P] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & c.s \\ s^2 & c^2 & -c.s \\ -2.c.s & 2.c.s & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$c = \cos \psi, s = \sin \psi$$

[P] : la matrice de passage

[D] : la matrice d'élasticité après fissuration dans le repère global (X,Y)

ψ : Angle entre la direction de la fissure et l'axe OX.

Le vecteur résiduel de contraintes après fissuration est donné par la relation suivante :

$$\{\sigma_0\} = [I] - \begin{bmatrix} c^4 & c^2 s^2 & 2sc^3 \\ c^2 s^2 & s^4 & 2s^3 c \\ c^3 s & cs^3 & 2s^2 c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

avec :

$\{\sigma_0\}$: vecteur de contraintes ajustées après fissuration,

[I] : matrice identité d'ordre 3x3.

La relation incrémentale (contraintes vs déformation) dans le béton fissuré est donnée comme suit:

$$\{d\sigma\} = [D_c] \{d\varepsilon\} \quad (11)$$

Les contraintes totales libérées après fissuration $\{\sigma_0\}$ seront distribuées dans les éléments adjacents (figure 2). La variation totale des contraintes sera donc:

$$\{\Delta\sigma\} = \{d\sigma\} - \{\sigma_0\} = [D_c] \{d\varepsilon\} - \{\sigma_0\} \quad (12)$$

avec:

$[D_c]$: Matrice de rigidité du béton fissuré.

$\{\sigma_0\}$: Contraintes libérées après fissuration du béton.

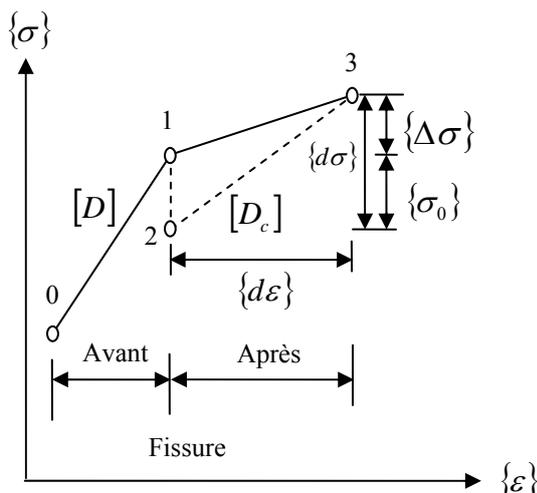


Figure 2 : Modèle (contraintes - déformations) du béton fissuré

3. PROCEDURE DE CALCUL NON LINEAIRE

Les étapes de calcul utilisées sont les suivantes :

1. introduction des données nécessaires pour le maillage
2. introduction des conditions aux limites
3. génération du maillage en tenant compte des aciers longitudinaux et verticaux.
4. appliquer un incrément de charge Δf_i
5. début de la procédure itérative (Newton Raphson)
6. évaluer le vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$, et le vecteur des forces résiduelles, $\{f_0\}$,
7. calculer la norme du vecteur de forces résiduelles, $\{f_0\}$,
 - Si la norme de $\{f_0\}$ est inférieure à la tolérance. La convergence est vérifiée. Si le chargement final n'est pas atteint, appliquer un nouvel incrément. Répéter les étapes précédentes à partir de (4).
 - Si la norme de $\{f_0\}$ est supérieure à la tolérance. La convergence n'est pas vérifiée et le nombre d'itération maximum n'est pas atteint, répéter les étapes précédentes à partir de (5)
 - Si le nombre d'itérations maximum est atteint, ce qui correspond au palier horizontal de la courbe charge - déplacement, alors la charge ainsi trouvée correspond à la charge ultime.
8. affichage des résultats.

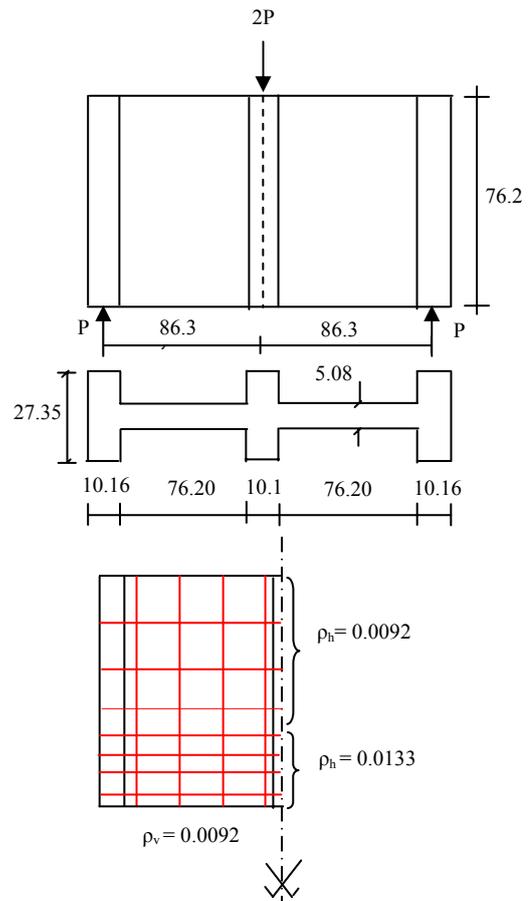


Figure 3 : Géométrie, chargement et ferrailage du panneau (Dimensions en cm)

3.1. Validation et exemples d'application numériques

Le modèle élaboré pour le calcul plan des structures en béton armé par la méthode des éléments finis est appliqué à l'étude d'un panneau [2] en béton armé soumis à une charge concentrée en son milieu figure 3, et d'une poutre isostatique [8] dont les dimensions, le ferrailage, et le chargement sont illustrées dans la figure 7. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié du panneau et de la poutre est modélisée.

Propriétés mécaniques	Béton	Acier
E (MPa)	20400	192000
ν	0.2	0.3
Fc 28 (MPa)	26.7	--
Ft 28 (MPa)	3.4	--
F _v	--	360

Panneau en béton armé [2]

Les figures (4), (5), (8) et (9) présentent la réponse des éléments (panneau et poutre isostatique) en terme de diagramme liant la flèche de l'élément à l'effort appliqué et compare les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

Propriétés mécaniques	Béton	Acier
E (MPa)	30000	207000
ν	0.2	0.3
Fc 28 (MPa)	56	--
Ft 28 (MPa)	6	--
F _v	--	320

Poutre isostatique [8]

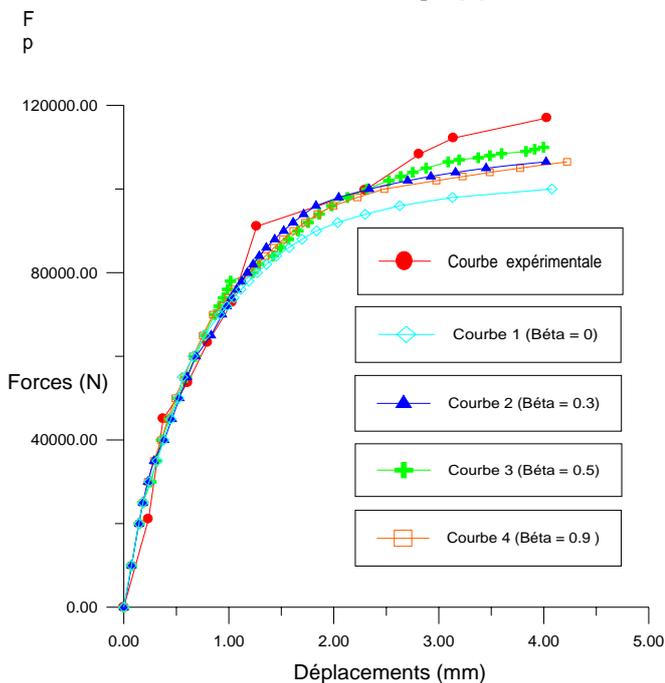


Figure 4 : Courbe forces vs déplacements au point d'application de la charge pour les différentes valeurs de Béta (panneau de 20 éléments)

L'allure générale des résultats numériques s'accorde assez bien avec l'expérience. Le raffinement du maillage conduit, comme attendu, à une réponse plus souple qui approche bien l'expérience.

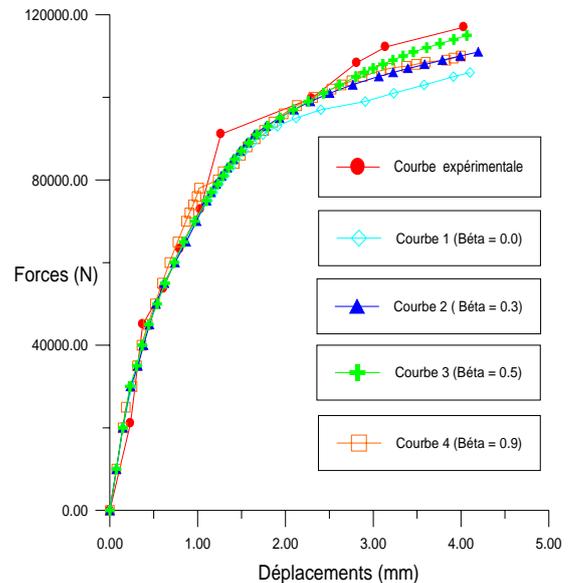


Figure 5 : Courbe forces vs déplacements au point d'application de la charge pour les différentes valeurs de Béta (panneau de 77 éléments)

Afin d'apprécier l'influence du facteur de cisaillement β , une simulation avec les différentes valeurs a été réalisée. Les courbes charge - flèche ainsi obtenues sont représentées (voir figures 4, 5, 8, et 9) au même temps que la courbe expérimentale. On constate que la charge ultime est mieux approchée par les valeurs de β comprises entre 0.3 et 0.5.

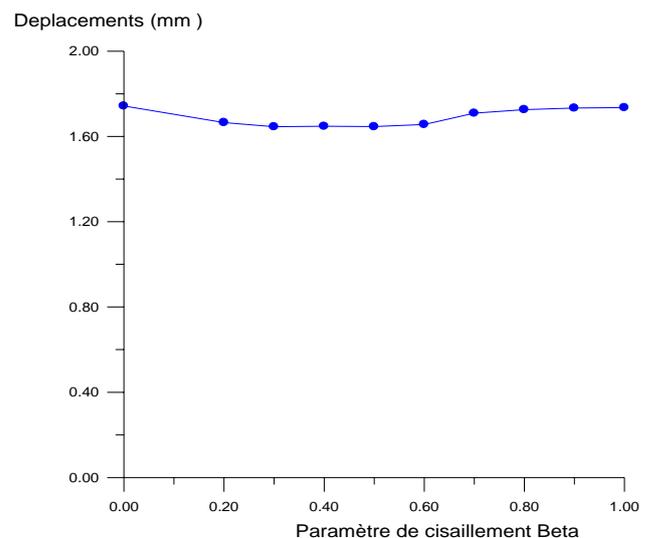


Figure 6 : Déplacement au point d'application de la force vs variation du paramètre de cisaillement Béta.

Afin d'étudier l'influence de la finesse du maillage par élément finis sur la solution, des simulations d'essais ont été effectuées avec deux maillages différents :

Les courbes reliant l'effort à la flèche de l'élément obtenues par les deux maillages sont aussi représentées.

Les figures 6, et 10 nous donnent les déplacements à mi-travée de l'élément pour une charge de 90 KN et pour chaque valeur de β allant de 0 à 1.0.

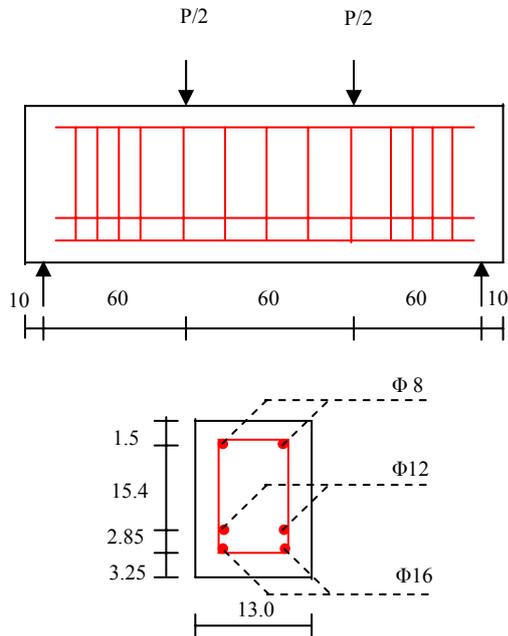


Figure 7 : Géométrie, chargement et ferrailage de la poutre (Dimensions en cm)

On constate que pour la valeur de β comprise entre 0.3 et 0.5 les déplacements sont presque constants et s'accordent bien avec les valeurs expérimentales de 1.6235 mm pour le panneau et 3.7125 mm pour la poutre isostatique. Donc on peut conclure que le choix du facteur β influe considérablement sur la réponse des éléments de structures en béton armé.

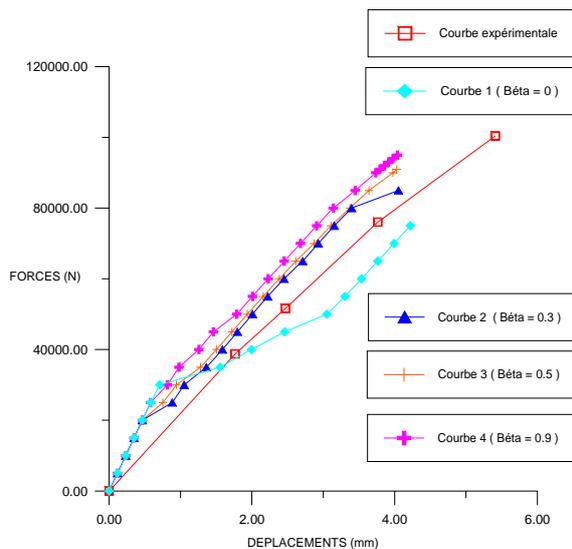


Figure 8 : Courbe force vs déplacements à mi-travée pour les différentes valeurs de Béta (poutre de 28 éléments)

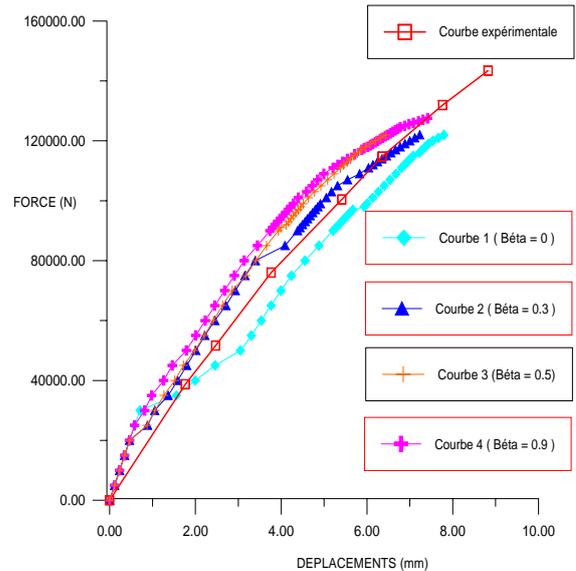


Figure 9 : Courbe force vs déplacement à mi-travée pour les différentes valeurs de béta (poutre de 60 éléments)

Figure de cis

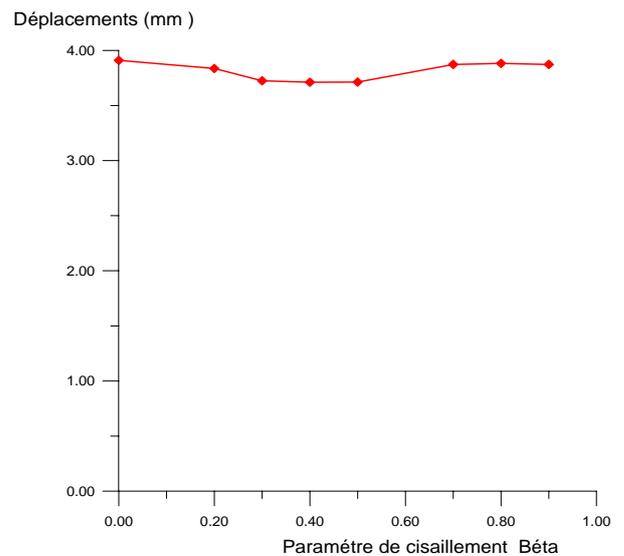


Figure 10 : Déplacement à mi-travée vs variation du paramètre de cisaillement de béta

Par contre dans la modélisation par éléments finis, un maillage plus fin conduit généralement à des résultats plus précis. Cependant, plus le maillage est dense, plus le temps d'exécution augmente. Comment peut-on avoir un maillage nécessaire pour satisfaire au même temps la précision des résultats et le temps d'exécution? On doit réaliser une étude de convergence de maillage comme suit:

- créer un maillage en utilisant, le nombre raisonnable d'éléments et analyser le modèle.

- Recréer le maillage avec une distribution plus dense d'élément, le ré analyser et comparer les résultats à ceux du maillage précédent.
- Augmenter la densité du maillage en réanalysant le modèle jusqu' à ce que les résultats convergent d'une manière satisfaisante.

Ce type d'étude de convergence de maillage peut nous permettre d'obtenir une solution précise avec un maillage qui est suffisamment dense et qui n'exige pas excessivement de temps d'exécution.

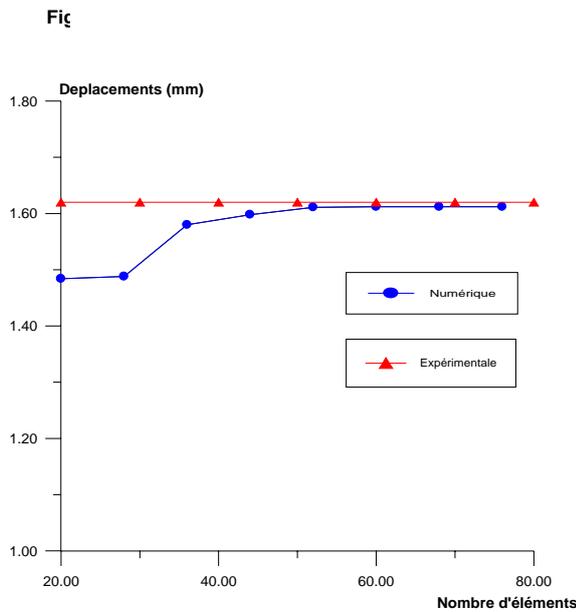


Figure 11 : Déplacement à mi-travée vs nombre d'éléments. Panneau de Cervinka

3.2. Influence de la densité du Maillage

Il n'y a pas de rapport direct entre le paramètre de cisaillement β et la finesse du maillage.

Les figures 11 et 12 nous donnent les déplacements trouvés à mi-travée en fonction de la densité du maillage pour le panneau de Cervinka et la poutre isostatique respectivement.

Les résultats convergent vers la valeur objective dès un maillage de 50 éléments.

Ceux ci peut s'expliquer par la fait que l'élément isoparamétrique quadrilatérale utilisé pour la modélisation reconstitue correctement la déformée requise par la théorie des poutres en générale.

CONCLUSION

Il est présenté ici un modèle de calcul numérique pour évaluation de la réponse des éléments de structures en béton armé sous l'action des charges statiques dans le domaine élasto-plastique.

Les résultats de simulation numériques s'accordent bien avec les résultats expérimentaux. On constate aussi que le

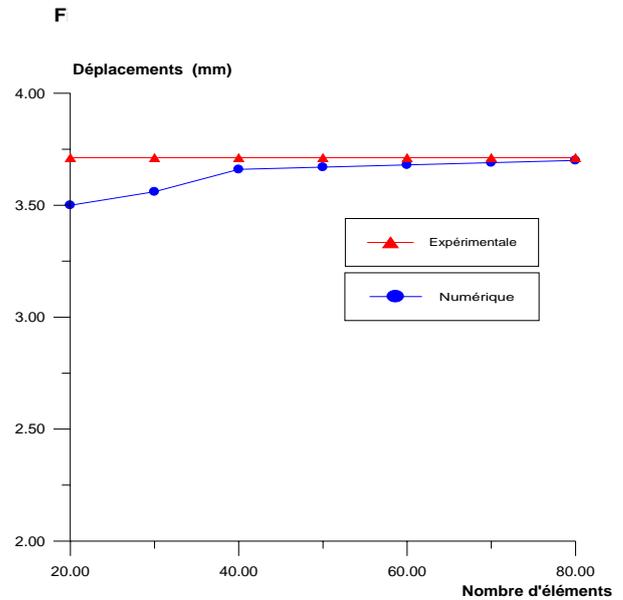


Figure 12 : Déplacement à mi-travée vs nombre d'éléments. Poutre isostatique

choix d'un paramètre de cisaillement joue un rôle important dans la réponse globale des éléments en béton armé. La valeur de β comprise entre 0.3 et 0.5 donne des résultats satisfaisant (voir figures 6 et 10).

Pour les futures recherches et comme perspective, une amélioration peut être obtenue en introduisant dans le modèle un facteur de cisaillement β qui diminue lorsque la déformation normale à la fissure augmente c'est-à-dire un coefficient qui varie en fonction de l'ouverture des fissures.

REFERENCES

- [1] Bazant, Z. P., Kim S. S., « Plastic fracturing theory of concrete », J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 105, n°EM3, June, proc.pap.14653, pp. 407-428.
- [2] Cervenka, V., Pulk, R. « Computer models of concrete structures » Structural Engendering International, 2/92, IABSI, 1992, Vol.2, pp. 103-107.
- [3] Chen, W. F. and Han, D. J. « Plasticity for structural engineers ». Springer-Verlag New-York 1988.
- [4] Drucker D.C., Prager W., « Soil mechanics and plastic analysis or limit design », Quart. Appl. Math., 1952, 10, 157-165.
- [5] Kupfer, H.B., Gerstle, K.H., « Behaviour of concrete under biaxial stresses », Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1973, Vol.99, n°4, pp. 853-866.
- [6] Kupfer, H. Hilsdorf, H. K. and Rusch, H. « Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses ». Int. Journal, Aug. 1969, pp. 656-666.
- [7] Mourad, K., « Analyse par éléments finis des panneaux en béton armé », Thèse de Magister, Dept. Génie Civil, UMMTO, Septembre 2000.
- [8] Ngo, D., Scordelis, A.C., « Finite element analysis of reinforced concrete beams », Journal of the American Concrete Institute, 1967, Vol. 54, n° 3, pp. 152-163
- [9] Rashid, Y. R. « Analysis of Prestressed Concrete nuclear reactor structures », Unpublished notes presented at conference on prestressed concrete nuclear reactor structures, University of California, Berkley, March 1968.