

APPROCHE D'HOMOGENEISATION POUR L'ANALYSE DYNAMIQUE LIBRE DES POUTRES MULTICOUCHES DISSIPATIVES D'ENERGIE : APPLICATION AUX POUTRES BERNOULLI A SYMETRIE MIROIR

Reçu le 24/07/2007 – Accepté le 28/12/2009

Résumé

Partant des développements théoriques connus dans le domaine de la dynamique des poutres homogènes Euler Bernoulli (cas des poutres élancées), deux approches d'homogénéisation des poutres composites sont développées en se basant respectivement, sur les propriétés physiques équivalentes et les propriétés mécano-géométriques équivalentes. Les équations du mouvement libre et/ou amorti, sont établies et les réponses en termes de fréquences propres des vibrations et/ ou facteurs d'amortissements de Rayleigh sont alors obtenues, en tenant compte de différentes conditions aux limites. Les valeurs de ces réponses relatives aux deux approches, sont confrontées avec celles obtenues par une approche de modélisation par éléments finis

Mots clés : Composite, vibration, Poutre multicouche, homogénéisation, propriétés physiques globales équivalentes, propriétés mécano-géométrique globales équivalentes, facteurs d'amortissements de Rayleigh.

Abstract

Using theoretical development as known in the area of dynamic behavior of homogeneous beam based on Euler Bernoulli theory, two approaches are explored based respectively on equivalent physical as well as mechanical and geometrical properties, are presented to analyze the dynamic behavior of multi-layer composite beam. The equilibrium governing equations of free undamped and/or damped vibration are formulated, then, the responses in term of natural frequencies and/or Rayleigh Damping Factor are obtained, under various boundaries conditions. Several examples are presented to illustrate the validity and accuracy of the analysis using an FEM modelisation considered

Keywords : Composite, vibration, multilayered beam, homogenization, global physical properties, global mechanical-geometrical properties, Rayleigh damping factor.

¹ T. BENMANSOUR

² K. BENMAIL

² A. SEKHRI

¹ Département de Génie Mécanique
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Université Mentouri
Constantine – Algérie

² Département d'Hydraulique
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Université Hadj Lakhdar
Batna – Algérie

ملخص

انطلاقاً من التطورات النظرية و المعادلات التفاضلية المعروفة في مجال ديناميكا الروافد المنسجمة أولر- برنولي (Euler-Bernoulli) حالة الروافد المتطاولة، نقترح في هذا البحث طريقتان تتوسعان في استخدام نفس المعادلات التفاضلية و تطبيقها في حالة الروافد الغير منسجمة المتكونة من تراكب طبقي من مواد مختلفة، موزعة بطريقة توصف بالتناظر (تناظر المرآة) أو بعبارة أخرى بصفة متناظرة حول المحور الوسطي للمقطع العرضي للرافدة. الطريقة الأولى تعتمد على جملة الخصائص الفيزيائية المتكافئة والطريقة الثانية تأخذ في عين الاعتبار جملة الخصائص الميكانيكية الهندسية المتكافئة. معادلات الحركة الحرة و / أو المكبوحة معطاة في هذا البحث والنتائج المعبر عنها بالترددات الذاتية للذبذبات و / أو عوامل الكبح لرايلي (Rayleigh) مستخرجة مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط الحدودية (أو القيم الحدية). اعتماداً على التحليل بالمقارنة نقارن هذه النتائج الخاصة بكلى الطريقتين التحليليتين مع النتائج المتحصل عليها بطريقة رقمية للمقاطع المنتهية (éléments finis).

الكلمات المفتاحية : القضيب المركب، رافدة متعددة الطبقات، ذبذبات، الانسجام، التردد الدائري، جملة الخصائص الفيزيائية المتكافئة، جملة الخصائص الميكانيكية الهندسية المتكافئة، نظرية (Bernoulli)، الحركة الديناميكية، معامل الكبح.

Les impératifs de légèreté, alliés à la robustesse ont dirigé très tôt les constructeurs aéronautiques, civils, navals et industriels vers des solutions composites [1]. L'analyse dynamique des poutres composites permet une meilleure maîtrise de leur comportement mécanique et facilite par la suite, leur exploitation du point de vue de leur conception ainsi que leur utilisation.

Ce travail porte sur l'étude du comportement de flexion dynamique des poutres composites, constituées de multicouches à phase isotrope, réparties symétriquement par rapport à l'axe neutre. On présente deux approches d'homogénéisation, l'une basée sur les caractéristiques physiques équivalentes et l'autre, sur les caractéristiques mécano-géométriques équivalentes [2,3]. L'analyse vibratoire du mouvement transverse libre de la poutre composite homogénéisée est investie, d'après l'hypothèse Euler-Bernoulli.

L'expression générale des coefficients de passages équivalents développés d'après les deux approches d'homogénéisations est obtenue, en tentant compte de l'effet de dissipation d'énergie (amortissement interne et externe). Les réponses dynamiques sont obtenues sur la base des fréquences naturelles et les facteurs d'amortissements de Rayleigh.

Les fréquences naturelles sont déterminées et confrontées avec celles obtenues par une modélisation par éléments finis. Par la suite l'influence des conditions de fixité sur l'apport en amortissement est considérée. L'étude comparative a montré une très bonne concordance.

L'objectif étant d'élaborer une formulation homogène, c'est-à-dire, aboutir à des relations de comportement identiques à celles des poutres homogènes isotropes, permettant ainsi d'obtenir une solution simple et rapide au problème de calcul des fréquences des poutres multicouches.

1. CARACTERISTIQUES DE LA SECTION DROITE

La figure 1, représente une poutre droite de section (S) constituée par un empilement symétrique de N_m matériaux isotropes de différentes épaisseurs. Soit A, la surface totale et h la hauteur totale de la section droite (S) et soit A_i et h_i respectivement, la surface et la hauteur du $i^{ème}$ pli. On a les relations suivantes :

$$A = \sum_{i=1}^N A_i$$

et

$$h = \sum_{i=1}^N h_i$$

D'autre part, les caractéristiques mécaniques de la poutre multicouche, sont pour chaque pli i, la masse volumique, le module d'élasticité, les coefficients d'amortissements intérieurs et extérieurs ; soient respectivement, ρ_i , E_i , CS_i , et Ci .

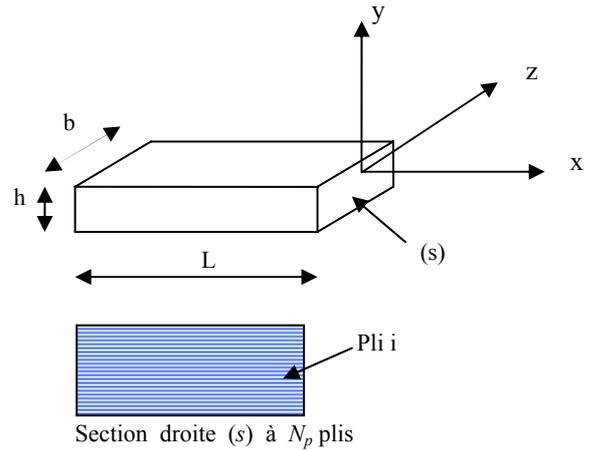


Figure 1 : Poutre multicouche

2. APPROCHE D'HOMOGENEISATION

2.1. Cas des poutres élancées

Dans ce qui suit, les équations du mouvement sont déterminées à partir des études à l'équilibre dynamique [4,5]. Les équations d'équilibre exprimées à travers l'étude d'une tranche de poutre restent vérifiées à chaque instant et sont strictement les mêmes que celles des poutres homogènes isotropes, puisque leur démonstration ne fait pas intervenir les propriétés des matériaux. Cependant, si le calcul des fréquences naturelles de la poutre est fonction de ses propriétés mécaniques, il est par contre indépendant des forces excitatrices mises en jeu. Ce qui nous permet donc de faire cette étude dans le domaine des vibrations libres.

Hypothèses et rappel :

- on considère le cas de petits mouvements harmoniques autour d'une position d'équilibre.
- pas de glissement, ni séparation entre deux couches voisines.
- la discontinuité à l'interface entre les couches due à l'effet Poisson, est négligeable.
- la rigidité flexionnelle est constante.
- les sections planes avant déformation restent planes après déformation.
- l'effet de l'effort tranchant est négligé dans une première étude.
- dans le cas des vibrations libres harmoniques transversales d'une poutre non amortie et en l'absence de toute force excitatrice, l'équation du mouvement est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_s I \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \right] + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + C \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

La solution est déterminée par la méthode de séparation de variables et l'expression de la fréquence naturelle, dans le cas des poutres à section rectangulaire homogène, est donnée par :

$$\omega = C \sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}} \quad (2) \quad n = \frac{N_p - 1}{2} \quad (7)$$

où :

$C = (al)^2$: Coefficient qui dépend des conditions aux limites.

2.1.1. Approche 1 : Approche d'homogénéisation d'après les propriétés physiques E^* , ρ^* , C_S^* et C^*

Cette approche permet de retrouver les propriétés physiques équivalentes d'une poutre multicouche. L'équilibre des forces et des moments est donné par les relations suivantes:

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - \left(\sum_{i=1}^{N_p} (f_{li} + f_{Di}) \right) dx = 0 \quad (3)$$

$$(M + M_D) + \frac{\partial(M + M_D)}{\partial x} dx - (M + M_D) + T dx = 0 \quad (4)$$

où

- l'indice 0 indique le pli central,
- f_{li} , f_{Di} représentent respectivement les forces d'inertie et d'amortissement réparties dans le sens transversal du matériau i .

$$f_{li} = \rho_i A_i \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

$$f_{Di} = C_i(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

D'autre part, on a d'après l'étude statique, les moments fléchissants :

$$M = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \sum_{i=0}^n \iint_A E_i y^2 dA \quad (5a)$$

et la courbure :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \alpha : \text{vitesse de rotation} \quad (5b)$$

où : v est le déplacement vertical.

Le moment d'amortissement induit par la résistance visqueuse partielle vis à vis de la déformation du matériau constitutif de chaque pli.

$$M_{Di} = C_{Si} I_i \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3 \partial t} \quad (6)$$

En développant l'intégrale des forces intervenant dans l'équilibre dynamiques de l'élément différentiel dx de la poutre multicouche; et après substitution des valeurs respectives de ces forces dans (3), et (4). On obtient l'équation différentielle régissant le mouvement dynamique amorti libre écrite sous sa forme globale homogénéisée (cas de multicouches à N_p plis, répartis en symétrie miroir (figure 2)) avec en se basant sur l'indice de récurrence:

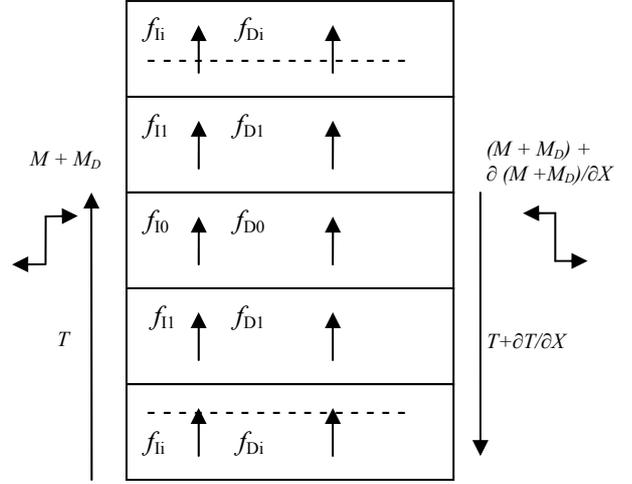


Figure 2 : Tronçon de Poutre à N_p plis avec forces agissant sur chaque Pli.

L'équation différentielle du mouvement dynamique amorti explicite, s'écrit

$$\left[E_0 + 2 \left[\sum_{i=1}^n E_i \left[\left(\frac{A_i}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_i}{A_0} \left(\frac{A_i}{A_0} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_{(i-1)}}{A_0} - 1 \right)^2 \right] \right] \right] I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \left[C_{s0} + 2 \left[\sum_{i=1}^n C_{Si} \left[\left(\frac{A_i}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_i}{A_0} \left(\frac{A_i}{A_0} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_{(i-1)}}{A_0} - 1 \right)^2 \right] \right] \right] I \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} + \left[\rho_0 + 2 \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \frac{A_i}{A_0} \right) \right] \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_0} \right]^2 A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_0} \right]^3 \left[C_0 + \sum_{i=1}^n C_i \right] \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

Cette équation, une fois homogénéisée, a la même forme que celle obtenue par Euler-Bernoulli pour les poutres homogènes à savoir :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E^* I \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_s^* I \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \right] + \rho^* A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + C^* \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Par identification analogique des équations (8) et (9), on retrouve le module d'élasticité équivalent, en divisant la rigidité par le moment d'inertie I de toute la section droite. On obtient ainsi :

$$E^* = \left[E_0 + 2 \left[\sum_{i=1}^n E_i \left[\left(\frac{A_i}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_i}{A_0} \left(\frac{A_i}{A_0} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_{(i-1)}}{A_0} - 1 \right)^2 \right] \right] \right] \quad (10)$$

De même, la masse volumique équivalente sera donnée par :

$$\rho^* = \left[\rho_0 + 2 \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \frac{A_i}{A_0} \right) \right] \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_0} \right]^2 \quad (11)$$

Les coefficients d'amortissements, qui représentent respectivement, l'effet de la résistance à la vitesse de déformation globale (amortissement interne)

$$C_s^* = \left[C_0 + 2 \left[\sum_{i=1}^n C_i \left[\left(\frac{A_i}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_i}{A_0} \left(\frac{A_i}{A_0} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_{(i-1)}}{A_0} - 1 \right)^2 \right] \right] \right] \quad (12)$$

et l'effet de la résistance visqueuse à la vitesse transversale globale (amortissement externe réparti)

$$C^* = \left[C_0 + 2 \left(\sum_{i=1}^n C_i \right) \right] \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_0} \right]^3 \quad (13)$$

La solution générale de cette équation (8), se détermine de la même manière que dans le cas homogène (1). Il suffit de remplacer E par E^* , ρ par ρ^* , C_s par C_s^* , et C par C^* dans l'équation homogène. L'équation aux fréquences est obtenue suivant les différents cas aux conditions aux limites (tableau 1).

Tableau 1 : Equations aux fréquences sous différentes conditions aux limites

Schéma	Condition aux limites	Equations aux fréquences
	$x=0, v(0,t)=M(0,t)=0$ $x=l, v(l,t)=M(l,t)=0$ Ou: $x=0, \phi(0)=\phi''(0)=0$ $x=l, \phi(l)=\phi''(l)=0$	$Sin(a_n l)=0$
	$x=0, v(0,t)=v'(0,t)=0$ $x=l, v(l,t)=v'(l,t)=0$ Ou: $x=0, \phi(0)=\phi'(0)=0$ $x=l, \phi(l)=\phi'(l)=0$	$Cos(a_n l).Ch(a_n l)-1=0$
	$x=0, v(0,t)=v'(0,t)=0$ $x=l, T(l,t)=M(l,t)=0$ Ou: $x=0, \phi(0)=\phi'(0)=0$ $x=l, \phi''(l)=\phi'''(l)=0$	$Cos(a_n l).Ch(a_n l)+1=0$
	$x=0, v(0,t)=v'(0,t)=0$ $x=l, v(l,t)=M(l,t)=0$ Ou: $x=0, \phi(0)=\phi'(0)=0$ $x=l, \phi(l)=\phi''(l)=0$	$Tg(a_n l).Tgh(a_n l)-1=0$
	$x=0, v(0,t)=v'(0,t)=0$ $x=l, v(l,t)=M(l,t)=0$ Ou: $x=0, \phi(0)=\phi'(0)=0$ $x=l, \phi(1)=\phi''(1)=0$	$Tg(a_n l).Tgh(a_n l)-1=0$

2.1.2. Application théorique au calcul des propriétés physiques homogénéisées d'un multicouche symétrique, constitué d'un pli orthotrope interverti (ou biphasé à phase isotrope).

C'est le cas courant, pour réaliser des applications industrielles, ou pour développer des modèles d'essais symétriques à usage expérimental.

On remarque, que l'on peut résumer les propriétés physiques homogénéisées, par simple récurrence, sous leur forme générale suivante :

Pour N_p quelconque:

- Si n : paire on a pour les couches extrêmes ($i=0$)
- Si n : impaire on a pour les couches extrêmes ($i=1$)

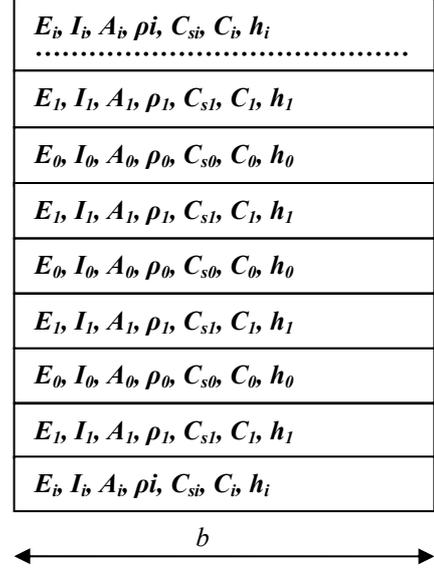


Figure 3 : Section transversale d'un multicouche à symétrie miroir

Paramètres physiques homogénéisés pour un nombre de couches N_p :

$$\begin{aligned}
 E^* &= E_0 + 2 \sum_{i=1}^n E_i (1 + 12n^2) \\
 \rho^* &= \left(\rho_0 + 2 \sum_{i=1}^n \rho_i \right) N_p^2 \\
 C^* &= \left(C_0 + 2 \sum_{i=1}^n C_i \right) (N_p)^3 \\
 n &= \left(\frac{N_p - 1}{2} \right)
 \end{aligned} \quad (14)$$

2.2. Approche 2 : Approche d'homogénéisation d'après les propriétés mécanico-géométriques équivalentes: $(EI)_{eq}$, $(\rho A)_{eq}$, $(C_s I)_{eq}$, (C_{eq})

Par analogie, l'équation dynamique du mouvement libre amorti d'une poutre composite multicouche homogénéisée, peut être exprimée en fonction des propriétés physico-mécaniques, sous sa forme globale, comme suit:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(EI)_{eq} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (C_s I)_{eq} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \right] + (\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + C_{eq} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

L'expression de la fréquence naturelle sera de la forme :

$$\omega = a^2 \sqrt{\frac{(EI)_{eq}}{\sum_{i=1}^n (\rho A)_i}} = C \sqrt{\frac{(EI)_{eq}}{I^4 \sum_{i=1}^n (\rho A)_i}} \quad (16)$$

avec: $i=1,2, \dots, n$ nombres de couches

2.2.1. Facteur de rigidité flexionnelle

On écrit l'expression des efforts de réductions pour les deux cas d'hypothèse homogène et non homogène puis on procède à l'identification des paramètres équivalents.

Le paramètre d'équivalence (EI), est déterminé, en supposant un collage parfait au niveau des différentes interfaces, par l'égalité des courbures élastiques relatives aux deux types de poutres.

On obtient ainsi :

$$M_F(x) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{Np} bE_i (y_i^3 - y_{i-1}^3) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (17)$$

Par identification avec l'équation élastique d'une poutre homogène :

$$M_F(x) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (18)$$

on a :

$$(EI)_{eq} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{Np} bE_i (y_i^3 - y_{i-1}^3) \quad (19)$$

Pour une largeur (b) égale à l'unité, la rigidité équivalente à la flexion sera :

$$(EI)_{eq} = \frac{1}{3} \sum E_i (y_i^3 - y_{i-1}^3) \quad (20)$$

où : (y_i) , (y_{i-1}) - coordonnées des positions supérieure et inférieure du pli (i).

En procédant de la même façon pour l'ensemble des forces intervenant dans l'équilibre dynamique de l'élément différentiel dx , on obtient :

2.2.2. Facteur d'amortissement équivalent

$$M_{Di}(x) = \iint \sigma_{Di} y dA = \int_{-b}^{+b} \int_{y_{i-1}}^{y_i} C_{Si} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} y dz dy = \int_{y_{i-1}}^{y_i} C_{Si} b y^2 \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dy \quad (a)$$

$$M_D(x) = \sum_{i=1}^{Np} M_{Di} = \sum_{i=1}^{Np} C_{Si} \frac{y_i^3 - y_{i-1}^3}{3} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} b dy \quad (b)$$

D'autre part il est facile de montrer sous réserve de l'hypothèse Euler Bernoulli (la déformation varie linéairement suivant la section transversale), l'expression du moment d'amortissement global s'écrit:

$$M_D = \int_{y_{i-1}}^{y_i} (C_S I)_{eq} \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \right] b dy \quad (c)$$

Par identification on aura

$$(C_S I)_{eq} = \frac{1}{3} \sum b C_{Si} (y_i^3 - y_{i-1}^3) \quad (21)$$

2.2.3. Facteur d'inertie transversale

$$F_I = (\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{Np} F_{Ii} = \sum_{i=1}^{Np} \rho_i A_i \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} (\rho A)_{eq} = \sum_{i=1}^{Np} \rho_i A_i \quad (22)$$

2.2.4. Facteur d'amortissement externe C_{eq}

$$F_D = (C(x))_{eq} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] b A = \sum_{i=1}^{Np} f_{Di} = \sum_{i=1}^{Np} C_i(x) \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] b A \quad (C(x))_{eq} = \sum_{i=1}^{Np} C_i(x) \quad (23)$$

On remarque que cette approche est d'une formulation plus simple et rapide d'utilisation ; elle constitue une bonne alternative pour une première appréciation. Par ailleurs, l'équation (15) obtenue, est similaire à l'expression donnée par la théorie classique des multicouches [7].

2.3. Analyse pour l'homogénéisation des facteurs d'amortissements en phase linéaires

Afin de compléter l'analyse dynamique d'un point de vue formel, et faciliter son utilisation future, pour les cas amortis forcés, l'équation différentielle partielle régissant le mouvement dynamique des systèmes à caractéristiques réparties est reformulée sous sa forme découplée en fonction des coordonnées normales.

2.3.1. Expression de l'équation dynamique découplée en flexion amortie

L'équation dynamique pour le cas amortie libre est obtenue sous sa forme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + C_S I \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (24)$$

Après transformation cette équation est découplée puis obtenue sous sa forme en coordonnées normales

$$v_i(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) Y_i(t) \quad (25)$$

Φ_i : mode de vibration i

Y_i : amplitude modale (coordonnée principale ou normale)

$v_i(x,t)$: Coordonnée géométrique de déplacement pour le mode i .

- Equation découplée avec amortissement

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho A \phi_i^2(x) \left(\frac{d^2 Y_i(t)}{dt^2} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} C(x) \phi_i(x) \left(\frac{d Y_i(t)}{dt} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[C_s I \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right] \frac{d Y_i(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right] Y_i(t) = 0 \quad (26)$$

2.3.2. Conditions pour l'orthogonalité de l'amortissement

On suppose que la transformation en coordonnées normales permet de découpler les forces d'amortissement de la même manière que pour la masse et la rigidité. Rayleigh [6] a montré que cette hypothèse est possible si on admet que les effets de l'amortissement sont proportionnels à la masse et à la rigidité sous la forme:

$$C(x) = a_0 m(x) = a_0 \rho A \quad \text{et} \quad C_s = a_1 E$$

avec a_0 et a_1 coefficients arbitraires de proportionnalité. Après substitution dans l'équation, on obtient une équation découplée en coordonnées normales :

$$M_n \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + (a_0 + a_1 \omega_n^2 M_n) \frac{d Y(t)}{dt} + \omega_n^2 M_n Y(t) = 0 \quad (27)$$

Par définition on appelle masse généralisée M_n de la poutre, pour le mode Φ_n , l'intégrale

$$M_n = \int_0^L \phi_n^2(x) \rho A dx \quad (28)$$

On peut réarranger cette équation, en divisant par M_n et en posant pour le facteur d'amortissement du $n^{ème}$ mode

$$\xi_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1 \omega_n}{2} \quad (29)$$

L'équation pour le facteur d'amortissement (29) montre que pour un amortissement proportionnel à la masse ($C(x)=a_0 m(x)$) : le facteur d'amortissement est inversement proportionnel à la fréquence, d'autre part pour un amortissement proportionnel à la rigidité ($C_s=a_1 E$) : le facteur d'amortissement est directement proportionnel à la fréquence. Suivant les types de structures et pour le domaine des fréquences extrêmes, le facteur d'amortissement ξ_n s'associe de façon privilégiée avec l'un ou l'autre des deux facteurs d'amortissements.

Finalement on obtient la forme standard de l'équation découplée du mouvement dynamique amortie libre de la poutre multicouche homogénéisée

$$\frac{d^2 Y_n(t)}{dt^2} + 2\xi_n \omega_n \frac{d Y_n(t)}{dt} + \omega_n^2 Y_n(t) = 0 \quad (30)$$

Suivant le type d'approche I, ou II les paramètres équivalents sont injectés pour obtenir les fréquences modales, les modes de vibrations, et les facteurs d'amortissement modal correspondant.

3. ETUDE COMPARATIVE

3.1. Etude d'après les Fréquences propres

Une modélisation par éléments finis [9], utilisant l'élément solide, a été faite dans le but d'apprécier la convergence des approches proposées pour le cas d'hypothèse Euler- Bernoulli. Plusieurs cas de fixations ont été étudiés, en examinant l'influence de la variation de l'élanement géométrique (l/r , r : est le rayon de giration).

Les résultats sont obtenus sur un exemple multicouche à symétrie miroir à cinq plis, d'épaisseurs constantes $h=2mm$ (tableau 2), avec une poutre d'élanements ($L/r=346, 242, 121$).

Les résultats sont illustrés sur les figures 4, 5, 6 et 7 pour la poutre de Bernoulli.

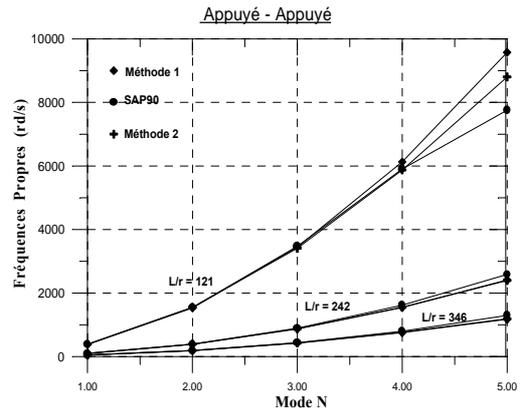


Figure 4 : Fréquences propres des cinq premiers modes d'une poutre multicouche à cinq plis – appuyée - appuyée (AA)

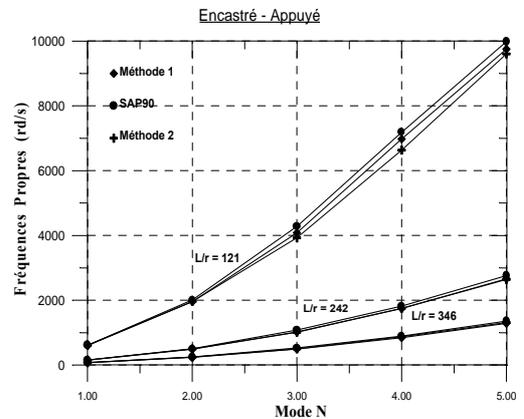


Figure 5 : Fréquences propres des cinq premiers modes d'une poutre multicouche à cinq plis – encastree - appuyée (EA)

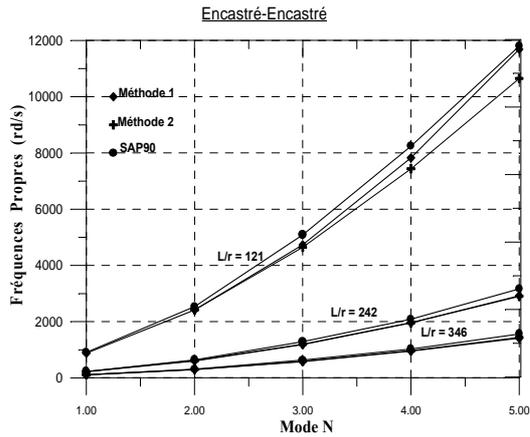


Figure 6 : Fréquences propres des cinq premiers modes d'une poutremulticouche à cinq plis – encastree- encastree (EE).

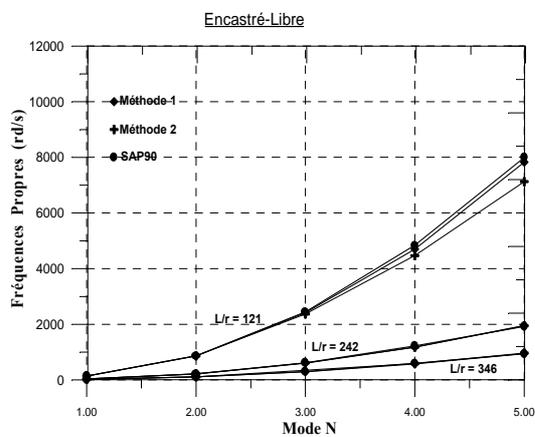


Figure 7 : Fréquences propres des cinq premiers modes d'une poutre multicouche à cinq plis – encastree - libre (EL).

3.2. Discussion: Poutre élancée

On constate dans l'ensemble une très bonne convergence des résultats des 2 approches proposées, notamment pour les 4 premiers modes. Les courbes se démarquent légèrement (environ 10%) pour le dernier mode. Cette divergence s'accroît pour les faibles valeurs de l'élancement géométrique ($l/r = 120$). Ceci pourrait être attribué à la non prise en compte de l'effet de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation.

3.2.1. Etude d'après le facteur d'amortissement modal

A titre indicatif les courbes de correspondance sont obtenues d'après l'approche I, basée sur les propriétés physiques, pour le cas de la poutre composite ($l/r=346$), constituée de 5 couches isotropes réparties symétriquement par rapport au plan moyen et définies d'après le tableau II.

4 types de conditions d'appuis AA- AE- EE- EL sont considérés. L'analyse comparative entre les 4 variantes de courbes (figure 8.) est obtenue sous forme de graphes afin d'apprécier l'influence des conditions limites sur l'apport dissipatif potentiel modal.

Tableau 2 : Présentation du modèle d'étude

N°	Type de Matériau	Masse volumique (t/m^3)	Module de Young $E \times (10^7)$ (t/m^2)	Module de Poisson μ
2	Aluminium	2,7	0,72	0,3
1	Cuivre	2,93	1,2	0,3
0	Acier	7,8	2	0,3
1	Cuivre	2,93	1,2	0,3
2	Aluminium	2,7	0,72	0,3

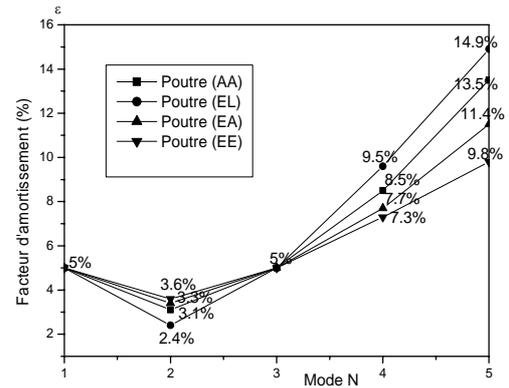


Figure 8 : Effet des conditions limites sur le taux d'amortissement modal, pour une poutre d'élancement ($L/r=346$).

3.2.2. Discussion: Evaluation des facteurs d'amortissement modaux – cas: du multi-couche à phase isotrope ($N_p=5$ couches)

Toutes les courbes présentent des formes paraboliques dont les pics minima ont lieu au droit du 2^{ème} mode 2. Pour les modes 1 et 2 les branches sont décroissantes à partir du facteur d'amortissement commun $\xi_{mode1}=5\%$. Puis croissante pour les modes 2 et 3, le mode 3 constituant un 2^{ème} point de convergence. La courbe EL constitue l'enveloppe inférieure, par contre la courbe EE occupe l'enveloppe supérieure. A partir du 3^{ème} mode toutes les branches sont croissantes cependant, l'ordre des courbes est inversé, la courbe EL formant l'enveloppe supérieure à l'inverse de la courbe EE qui occupe la position inférieure. On remarque finalement que pour la première tranche modale 1,2 et 3 les courbes sont ordonnées par ordre décroissant allant des conditions de fixité les plus rigides EE ($\xi_{max}=3.6\%$) vers les conditions les moins rigides EL ($\xi_{min}=2.4\%$). A partir du 3^{ème} mode les courbes sont ordonnées par ordre décroissant, allant des conditions de fixités les moins rigides EL ($\xi_{max}=14.9\%$) vers les conditions les plus rigides EE ($\xi_{min}=9.8\%$).

CONCLUSION

La théorie la plus couramment utilisée en mécanique des structures, pour modéliser le comportement de flexion dynamique des poutres est la formulation d'Euler-Bernoulli. A cet effet deux approches d'homogénéisation

ont été proposées pour le cas de poutres non excitées amortie et/ou non amorties.

L'étude comparative concernant l'effet des conditions limites sur le taux d'amortissement a montré que pour les modes inférieurs l'amortissement croit avec l'augmentation de la rigidité des liaisons, notamment pour les deux premiers modes (basses fréquences), les poutres hyperstatiques EE et EA présentent un taux d'amortissement élevé comparé aux poutres isostatiques. Les liaisons surabondantes sont génératrices d'apport potentiel supplémentaire en taux d'amortissement. Pour les modes supérieures (hautes fréquences), les taux d'amortissement relié à la masse s'épuisent asymptotiquement à de très faibles valeurs, par contre à l'opposé les poutres isostatiques développent des taux d'amortissements plus élevés. Ceci est du essentiellement à la contribution d'onde qui actionne l'effet des rigidités.

Les réponses naturelles investies par les deux approches sont satisfaisantes pour les poutres multicouches relativement élancées. Etant donné leur forme simple, elles sont très utiles pour des calculs de pré dimensionnement et de comparaison.

Cependant, l'étude doit être élargie, pour tenir compte de certains phénomènes tels que l'inertie de rotation et le cisaillement transversal afin qu'elles soient généralisées aux poutres Timoshenko.

REFERENCES

- [1] Gay D., 'Matériaux Composites', Edition Hermes 1989
- [2] Benmansour T. & al, 'Proposition d'approches d'homogénéisation pour l'analyse des vibrations libres des poutres Bernoulli...', 1^{er} Séminaire National, Mécanique des Géomatériaux et Structures, MGS'2000 Guelma, Algérie.
- [3] Benmansour T, 'Analyse du Comportement Dynamique des Structures Complexes: Application aux Poutres Composites à Symétrie Miroir', Thèse de Doctorat d'Etat, Université Mentouri, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Département de Génie Mécanique, Constantine, N°d'ordre: 222/JE/2004; Série: 04/GM/2004.

- [4] Benmansour T. & al, 'Approche d'Homogénéisation pour l'Analyse Dynamique des poutres Composites', European Journal of Mechanical And Environmental Engineering.
- [5] Clough R.W. and Penzien J., 'Dynamiques des Structures', Edition. Pluralis, 1980.
- [6] Christensen R.N., 'Mechanics of Composite Materials', J.Wiley & Sons,
- [7] Batoz J.L., 'Modélisation des Structures par Eléments Finis', Vol.2, Ed. Hermes, 1985.
- [8] Wilson E.L. & al, 'Structural Analysis Program (SAP), User's Manual', University of Berkeley, 1990

NOTATIONS

- n : indice de récurrence;
- E^* : module d'élasticité équivalent;
- ρ^* : masse volumique équivalente;
- C_s^* : coefficient d'amortissement interne équivalent;
- C^* : coefficient d'amortissement externe équivalent;
- $(EI)_{eq}$: facteur de rigidité flexionnelle;
- $(C_s D)_{eq}$: facteur d'amortissement équivalent;
- $(\rho A)_{eq}$: Facteur d'inertie transversale;
- C_{eq} : facteur d'amortissement externe;
- $A, I, \text{ et } r$: respectivement surface totale de la section, moment d'inertie et rayon de giration;
- $b, h \text{ et } L$: respectivement largeur, hauteur et longueur de la poutre;
- $\rho, E \text{ et } G$: respectivement masse volumique, module de Young et de cisaillement;
- A_i, h_i, ρ_i : caractéristiques relatives au pli i ;
- N_p : nombre de pli;
- M_n : masse généralisée;
- ξ_n : facteur d'amortissement du $n^{ème}$ mode;
- $a_0 \text{ et } a_j$: respectivement coefficients arbitraires;
- Φ_i : mode de vibration i ;
- Y_i : amplitude modale (coordonnée principale ou normale);
- $v_i(x,t)$: Coordonnée géométrique de déplacement pour le mode i ;
- ω_n : fréquence naturelle de vibration pour le mode N ;